

PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 5º ANO APROVADOS NO PNLD 2016

Glauce Vilela Martins
Universidade Federal de Pernambuco
glaucevilela_@hotmail.com

Resumo:

O objetivo deste estudo foi observar como são tratados problemas de raciocínio combinatório em livros e manuais do professor do 5º ano do Ensino Fundamental, analisando se há uma preocupação em abordar esse conteúdo levando em consideração variedades nas três dimensões de conceitos propostas por Vergnaud (significados, invariantes e representações simbólicas). Nos 8 livros de Matemática analisados, os significados com maiores percentuais totais de apresentação foram a Combinação e o Produto Cartesiano. Houve pouca variação das representações simbólicas utilizadas na apresentação e na solicitação de resolução dos problemas. Verificou-se também, que não houve preocupação por parte dos autores das obras em apresentarem as propriedades invariantes da Combinatória, nem chamaram a atenção do professor sobre os diferentes significados envolvidos. Para um trabalho mais efetivo em sala de aula, os livros didáticos poderiam orientar melhor os professores sobre diferentes aspectos da combinatória a serem considerados.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório; Livro didático; Anos iniciais.

1. Introdução

Investigações no campo da Educação Matemática, especificamente no que se refere ao ensino e aprendizagem da Combinatória, têm sido cada vez mais frequentes nos últimos anos (Schliemann 1988; Soares e Moro, 2006; Pessoa e Borba, 2009; Martins e Borba 2010; Barreto e Borba, 2011; Azevedo e Borba, 2012; Assis e Magalhães, 2012). Essas investigações trazem elementos norteadores para o trabalho docente desse conteúdo. Antes reservado a turmas de Ensino Médio, há algum tempo, esse conteúdo vem ganhando lugar de destaque nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Diante dessa perspectiva, e tomando como ponto de partida que a aprendizagem matemática é um direito e uma necessidade (individual e social) básica para as pessoas exercerem seus direitos de cidadania, o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, assume um papel importante na formação desses indivíduos.

Respeitando-se as particularidades de vivências dos estudantes, dentro da Educação Matemática, pesquisadores, estudiosos e documentos oficiais defendem que o ensino sistemático dos conteúdos adote como ponto de partida para aprendizagem a resolução de

problemas, assegurando diferentes contextos significativos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p.43), “o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas”.

Nesse sentido, os problemas devem ser apresentados aos alunos de todos os níveis de ensino, em situações diversificadas, apresentando e solicitando para sua resolução representações simbólicas diversas, bem como apresentando com textos compatíveis à sua modalidade de ensino, de modo a estimular os seus desenvolvimentos conceituais. A partir da apresentação dos problemas matemáticos, podem ser destacadas situações significativas que fazem parte do cotidiano dos estudantes.

O conhecimento das crianças é composto pelo conhecimento de variados conceitos, nesse sentido, Vergnaud (1986), em sua Teoria dos Campos Conceituais, afirma que “um campo conceitual é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. De acordo com esta teoria, o indivíduo desenvolve o entendimento de conceitos dentro de um amplo contexto de problemas. Para Vergnaud (1986), todo conceito é constituído por um “tripé de três conjuntos” interdependentes: a) o conjunto de situações que atribuem *significados* ao conceito; b) o conjunto de *invariantes* do conceito, ou seja, propriedades e relações que se mantêm constantes nas diversas situações nas quais o conceito se faz presente e c) o conjunto de *representações simbólicas* que podem ser utilizadas para representar e operar com o conceito.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é formado por um conjunto de situações que envolvem a divisão e a multiplicação, a proporção e as proporções múltiplas, bem como outros conceitos matemáticos. Entre essas situações, encontra-se os problemas que envolvem raciocínio combinatório, que pode ser definido como um conjunto de conceitos que propicia a observação de situações de contagem, ou seja, possibilita a enumeração e esgotamento do número de possibilidades, a partir de conjuntos de elementos dados e de condições distintas nas quais esses elementos devem ser agrupados.

Nesse contexto, Borba (2010, p.3) define o raciocínio combinatório como:

um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios

específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p.3).

A partir desse pressuposto, o referido estudo teve como objetivo observar como são tratados problemas de raciocínio combinatório em livros e manuais do professor do 5º ano do Ensino Fundamental, analisando se há uma preocupação em abordar esse conteúdo levando em consideração variedades nas três dimensões de conceitos propostas por Vergnaud (significados, invariantes e representações simbólicas).

2. O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e a Combinatória: Classificação de Problemas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas, como todo campo conceitual, se constrói a partir de um amplo contexto de problemas que dão sentidos aos conceitos que estão em estreita conexão entre si. O mesmo é formado por um conjunto de situações que envolvem a divisão e a multiplicação, as proporções simples e as proporções múltiplas, bem como outros conceitos matemáticos, tais como a Combinatória e os números racionais.

Para Vergnaud (1982), os conceitos desenvolvem-se ao longo do tempo através da experiência envolvendo situações variadas, dentro e fora do ambiente escolar. Sua teoria oferece contribuições importantes no que se refere à compreensão do conhecimento matemático e suas inter-relações.

Segundo Vergnaud, a Teoria dos Campos Conceituais tem por objetivo:

Propiciar uma estrutura às pesquisas sobre atividades cognitivas complexas, em especial com referência às aprendizagens científicas e técnicas. Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual (VERGNAUD, 1999, p.1).

Dentre as situações que compreende o campo multiplicativo, destacaremos a Combinatória que é o alvo desse estudo. O raciocínio combinatório se configura como uma forma de pensar sobre a Combinatória, podendo essa ser definida, historicamente, como a arte de contar. Segundo Borba (2010), o raciocínio combinatório está relacionado à maneira de pensar essencial para analisar situações que envolvem agrupamentos de elementos atendendo a condições específicas, as quais estão associadas às ações de escolha e/ou

ordenamento de elementos, podendo esses serem repetidos, ou não, ou, ainda, terem que obedecer a critérios específicos de proximidade, de elementos, dentre outros. De acordo com Batanero, Godino e Pelayo (1996), a Combinatória é um elemento fundamental da Matemática discreta, mostrando-se essencial para a construção do pensamento formal.

Pessoa e Borba (2009), na classificação dos problemas combinatórios, indicam a seguinte organização para os problemas combinatórios: *produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação*. Observa-se que as autoras citadas fazem uma junção dos significados apresentados em Vergnaud (1983, 1991), Nunes e Bryant (1997) e os PCN (1997), os quais tratam apenas de problemas que envolve o significado de *produto cartesiano*, juntando aos significados de *arranjo, permutação e combinação* descritos por Merayo (2001) Seja um conjunto de m elementos distintos. Recebe o nome de arranjo de ordem n desses m elementos, a todo grupo ordenado formado por n elementos tomados dos m , de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados (p.236)... Permutação de m objetos distintos, qualquer agrupamento desses objetos que difere um do outro unicamente pela ordem de colocação de seus objetos (p.241)... Seja um conjunto formado por m elementos distintos. Recebe o nome de combinação de ordem n desses m elementos, cada grupo formado por n elementos tomado dos m , tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que, dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem (MERAYO, 2001, p. 269).

Para esse estudo, usaremos a classificação indicada por Pessoa e Borba (2009) descrita no quadro a seguir.

Significado PESSOA (2006)	Definição	Exemplos PESSOA (2006, p.14)
Produto Cartesiano	“O problema envolve dois conjuntos básicos, mais um outro conjunto, que é formado pela combinação de cada elemento de um conjunto básico, com cada elemento do outro conjunto básico” (Nesher, 1988, apud Nunes e Bryant, 1997, p.158).	Maria tem 3 saias e 5 blusas. Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?
Permutação	“Dados n elementos distintos, chama-se permutação simples desses elementos cada uma das maneiras de ordená-los”. (Dias Filho e Fevorini, 1985, p.155).	Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.
Arranjo	“Consideremos n elementos distintos. Chama-se arranjo simples de ordem p cada maneira de escolher e ordenar p elementos entre eles ($p \leq n$).” (Dias Filho e Fevorini, 1985, p.167).	O quadrangular final da copa do mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?
Combinação	“Dados n elementos distintos, chama-se combinação simples de ordem p cada maneira de escolher p elementos entre eles, com $p \leq n$.” (Dias Filho e Fevorini, 1985, p.161) ”.	Uma escola tem 9 professores, dos quais 5 devem representar a escola em congresso. Quantos grupos de 5 professores pode-se formar.

3. A Combinatória em livros didáticos de Matemática

Diante da variedade de material didático oferecido aos docentes para o desenvolvimento do trabalho pedagógico, o livro didático aparece como um desses recursos mais utilizados em salas de aula brasileira. Segundo Choppin (2004, p. 549), esse recurso vem ganhado destaque nas pesquisas nas últimas décadas. Nesse mesmo direcionamento, Rojo e Batista (2003) destaca que esse movimento se intensificou após as mudanças ocorridas em 1997, com as políticas públicas governamentais para o livro didático no Brasil, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Observa-se a veracidade dessas informações na quantidade de pesquisas, dissertações e teses a esse respeito.

Em consonância com essa perspectiva de pesquisas em livros didáticos, Barreto, Amaral e Borba (2007), analisaram a proposta de ensino de Combinatória em cinco coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLD para as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse estudo, as autoras analisaram como eram tratados os problemas de combinatórios nos livros didáticos de 1^a a 4^a série e no manual do professor, no que se refere aos tipos de problemas apresentados, as representações simbólicas apresentadas nos problemas e as sugeridas pelos autores para sua resolução. Também verificaram se havia proposta de compreensão de propriedades envolvidas nos problemas de raciocínio combinatório. Como resultado desta pesquisa, as autoras identificaram que os significados dos problemas combinatórios que mais apareceram nos livros analisados foi o de *combinação* e *produto cartesiano*. De forma geral, os problemas apresentaram uma boa variação de representações simbólicas. No que se refere à abordagem dos manuais do professor, foi observado que nenhum autor orientou o trabalho docente com os significados e invariantes da Combinatória.

Seguindo esse mesmo direcionamento, Martins e Borba (2011) investigaram como os livros didáticos de Jovens e Adultos, aprovados no PNLA, trabalhavam os problemas de estrutura multiplicativa envolvendo seus diferentes significados. O estudo analisou como eram tratados os problemas de estrutura multiplicativa à luz da teoria dos Campos Conceituais e a adequação aos contextos nos 19 livros aprovados na primeira edição do PNLA. De acordo com as autoras, no que se refere à Combinatória, de forma geral, foi identificado que os livros

didáticos apresentam pouca diversidade de problemas que envolvem esse raciocínio, apresentam pequena variedade de representações simbólicas, tanto na apresentação dos problemas, quanto na solicitação para resolução dos mesmos.

Assis e Magalhães (2012), realizaram um estudo comparativo ao de Barreto, Amaral e Borba (2007) sobre o tratamento dado aos problemas de raciocínio combinatório levando em consideração duas dimensões conceituais proposta por Vergnaud (1986). Os autores verificaram que houve diminuição em relação ao quantitativo geral de problemas de combinatória nos livros didáticos aprovados no PNLD 2007 para os de 2010. De forma geral os problemas de produto cartesiano apresentaram maior frequência, e em relação as representações simbólicas abordadas, o desenho se destacou quanto as apresentadas e questões com *apenas enunciados*, como sugeridas.

Com base no exposto acima, essas pesquisas apontam que os livros didáticos, tanto nos anos do Ensino Fundamental, como na alfabetização de jovens e adultos, precisam propor aos estudantes diversificadas situações combinatórias, trabalhando representações simbólicas variadas e propondo aos educandos outras formas de solucionar os problemas. Esses estudos apontam também, a necessidade de uma maior articulação para o trabalho com os significados da Combinatória nos manuais dos docentes, tendo em vista que a mediação do professor é fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

4. Metodologia

Com o objetivo de analisar o tratamento dado a combinatória em livros didáticos das séries iniciais do ensino fundamental, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, foram selecionados 8 livros didáticos do 5º ano aprovados no PNLD 2016, de forma aleatória, ou seja, dentro as 16 coleções de matemática aprovadas para o 4º e 5º ano do ensino fundamental, foram escolhidos 8 obras do 5º ano, às quais tinha acesso.

O motivo da escolha de obras do 5º ano para análise se deu devido a identificação de maiores quantitativos de problemas em pesquisas anteriores como Barreto, Amaral e Borba (2007) e Assis e Magalhães (2012).

Para tal, foram selecionadas as seguintes obras: Livro do 5º ano da *Coleção Porta Aberta* da editora FTD, que tem como autores Marília Centurion, Junia La Scania e Arnaldo Rodrigues, Livro do 5º ano do *Projeto Buriti* da editora Moderna, que tem autoria coletiva,

Livro do 5º do *Projeto Copera* da editora Saraiva, que tem como autoras Eliane Reame e Priscila Montenegro, livro do 5º ano do *Projeto Ápis* da editora Ática, que tem como autor Luiz Roberto Dante, livro do 5º ano da *Coleção Fazer, compreender e criar em matemática* da editora Ibsp, que tem como autores Aínda Ferreira Munhoz, Helenalda Nazareth e Marília Toledo, livro do 5º ano do Projeto *Mundo Amigo* da editora SM, que tem como autores Ana Claudia Lesinska, Maria José Vasconcelos, Liane G. Poggetti e Sandra Carlini, livro do 5º ano da coleção *A escola é nossa* da editora Scipione, que tem como autores Fábio Vieira, Jackson Ribeiro e Karina Pessôa e o livro do 5º ano da coleção *Pequenos exploradores* da editora Positivo, que tem como autora Carla Cristina Tolsato. No intuito de garantir o direito ao anonimato, os livros foram renomeados aleatoriamente como A, B, C, D, E, F, G e H.

Foi feito o levantamento das atividades e orientações para as mesmas, apresentadas no livro do estudante e no manual do professor, dentro e fora dos capítulos destinados as estruturas multiplicativas. Havendo uma atividade com itens a, b, c, d, cada item foi analisado separadamente como uma nova questão.

Essa pesquisa é de natureza qualitativa, adotando como base teórica a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986), onde foi feita a identificação das situações de combinatória apresentadas e sugeridas para resolução das atividades apresentadas no livro, bem como a análise das orientações do manual do professor em relação aos invariantes do conceito nas atividades mapeadas.

5. Resultados e Análise de dados

De acordo com o levantamento das atividades relacionadas ao raciocínio combinatório nos livros de 5º ano do ensino fundamental, foi possível identificar 55 atividades ao longo dos 8 livros analisados.

Nota-se, ao longo desta análise, que foi identificado todos os significados da combinatória, porém, apenas um livro, o livro F, os reúne na mesma obra. Observa-se que 44% das atividades analisadas envolvem o significado de combinação, seguido de 38% com significado de produto cartesiano, e 9% para os significados de permutação e arranjo.

Na tabela 1, a seguir, observa-se o quantitativo dos significados dos problemas de combinatória encontrado nas obras.

Tabela 1 – significados dos problemas combinatórios

LIVRO	COMBINAÇÃO	PERMUTAÇÃO	PRODUTO CARTESIANO	ARRANJO
Livro A	2	-	6	3
Livro B	-	1	3	-
Livro C	4	-	-	-
Livro D	5	2	2	-
Livro E	4	-	3	1
Livro F	4	1	4	1
Livro G	3	1	3	-
Livro H	2	-	-	-

Verificou-se resultados semelhantes em Barreto, Amaral e Borba (2007) e Assis e Magalhães (2012), onde foram identificados problemas de produto Cartesiano e Combinação com maior frequência de apresentação nas coleções analisadas.

A partir dos resultados apresentados nesse estudo, no que se refere aos problemas apresentados com maior frequência, é possível estabelecer relações entre os resultados de Pessoa e Borba (2007), que identificaram em seu estudo que alunos de anos iniciais apresentaram melhor desempenho em problemas que envolve significado de produto cartesiano. No que se refere aos problemas com menor frequência, estudos como o de Azevedo, Costa e Borba (2011), identificaram que problemas que os alunos dos anos iniciais possuem maior dificuldades em resolver, são problemas que envolvem o significado de permutação, corroborando com a ideia de que o menor ou não conhecimento deste significado por parte do estudante pode gerar a falta de êxito na resolução desses tipos de problemas.

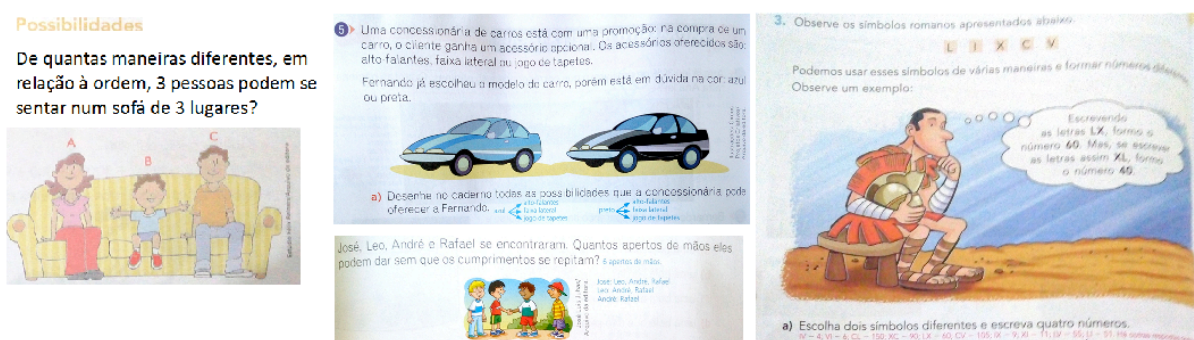


Figura 1 – exemplos dos diferentes significados de combinatória encontrados nos livros analisados

No que se refere as representações simbólicas apresentadas nas atividades, verificou-se que a maioria das obras analisadas apresentou enunciados com desenhos (51%), seguido de apenas enunciado (34%), enunciado com tabela (11%) enunciado com árvore de possibilidades (4%).

Observou-se que tanto os desenhos, as tabelas e as árvores de possibilidades apresentadas nas questões, estavam estreitamente relacionadas com o enunciado, servindo como apoio para o entendimento da questão. Podemos verificar na tabela 2 os tipos de representações simbólicas apresentadas nas atividades encontradas.

Tabela 2 – tipos de representações simbólicas apresentadas nos problemas de combinatória

LIVRO	APENAS ENUNCIADO	DESENHO	TABELA	ÁRVORE DE POSSIBILIDADES
Livro A	5	5	1	-
Livro B	1	1	2	-
Livro C	1	3	-	-
Livro D	3	4	1	1
Livro E	4	4	-	-
Livro F	2	5	2	1
Livro G	2	5	-	-
Livro H	1	1	-	-

De forma geral, observou-se pouca variação de representações simbólicas apresentadas como suporte na apresentação dos problemas, o que diverge das recomendações de estudos científicos e de documentos oficiais, que salienta a necessidade da abordagem de representações simbólicas variadas para auxiliar na compreensão das situações-problema. Dessa maneira, a ausência de representações variadas na apresentação dos problemas não estimula os alunos a resolverem as situações propostas a partir do uso de diferentes simbologias.

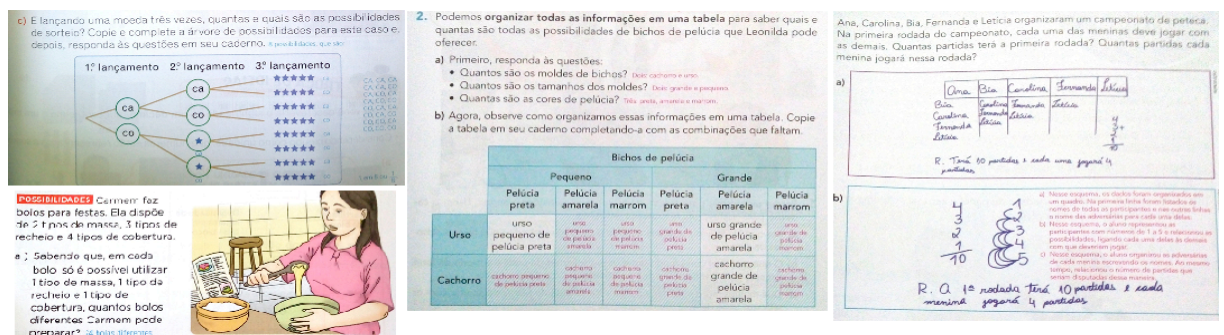


Figura 2 – Tipos de representações simbólicas encontradas na apresentação dos problemas de combinatória

Referente as representações simbólicas solicitadas aos alunos para resolução de problemas, podemos observar na Tabela 3 que a maioria dos problemas não sugerem nenhum tipo de representação simbólica para resolução (69%) , poucos solicitam que o estudante resolva o problema utilizando desenhos (10%) , preenchimento de tabelas (9%), construção de tabela (4%), preenchimento de árvore de possibilidades (4%), construção de árvore de possibilidades (2%) e o uso de material manipulativo (2%) para a solução do problema.

Tabela 3 – Representações simbólicas solicitadas para a resolução do problema

Livro	Nenhuma solicitação	Desenho	Preenchimento de tabela	Construção de tabela	Preenchimento de árvore de possibilidades	Construção de árvore de possibilidades	Uso de material manipulativo
Livro A	6	2	1	1	1		
Livro B	3	1					
Livro C	4						
Livro D	5	1	1	1	1		
Livro E	8						
Livro F	6	1	3				
Livro G	4	1				1	1
Livro H	2						

De forma geral, o que se observou nesse estudo é que a maioria dos problemas analisados não solicita nenhum tipo de representação simbólica na sua resolução, também solicitam com pouca frequência formas diversificadas de representação na resolução das situações problema. Dessa forma, pouco se buscou nas obras analisadas colocar os alunos em contato com diversas formas de resolução de problemas, de modo que estes percebam que diferentes simbologias podem ser utilizadas, e que as mesmas dão destaque a diferentes aspectos dos conteúdos.

No que diz respeito a orientações ao professor referente a explicitação dos invariantes de cada tipo de problema combinatório, nenhuma das obras analisadas apresentou orientações aos docentes, apenas algumas atividades solicita que o professor convide alunos a expor suas soluções para possíveis discussões.

6. Considerações Finais

Diversos são os avanços observados em cada edição de avaliação do livro didático proposta pelo Governo Federal. Na área de Matemática, muitos autores têm voltado a sua atenção a aspectos conceituais, didáticos e gráficos, visando o processo de aprendizagem dos alunos. Após análise dos dados coletados neste estudo, ficou constatado que, embora os livros busquem trabalhar aspectos variados do raciocínio combinatório, ainda há necessidade de uma maior variedade de significados abordados, de formas de representação utilizadas, bem como orientações metodológicas que oriente o professor a trabalhar com as propriedades invariantes da combinatória. Esta maior diversidade se faz necessária, de modo a aproveitar os conhecimentos anteriores e promover a ampliação da compreensão de crianças, jovens e adultos a respeito das estruturas multiplicativas.

7. Referências

ASSIS, Adryanne; MAGALHÃES, Sthenio. Amor, Roma, Mora: o raciocínio combinatório nos livros didáticos do 2º ao 5º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DE PERNAMBUCO, IV, 2012, Caruaru. Anais... Caruaru: EPEPE, 2012.

AZEVEDO, J.; BORBA, R. In: Anais do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática (XVI Ebrapem), Canoas, RS, 2012.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BARRETO, F.; AMARAL, F. & BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia. Recife: UFPE, 2007 v. 2, p. 1-21.

.BATANERO, C.; GODINO, J. & NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio*. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*: Salvador, 2010(Palestra).

BRASIL, MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

MARTINS, G. V.; BORBA, R. (2010) Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos: um estudo sobre as estruturas multiplicativas. In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia

MERAYO, F. Matemática Discreta. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001

PESSOA, C. & BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009

ROJO, R.; BATISTA, A.A. Livro didático de língua portuguesa, letramento e cultura escrita. Campinas, São Paulo, 2003.

SCHLIEMANN, A. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. ; SCHLIEMANN, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988

SOARES, M. T.; & MORO, M. L. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), Addition and subtraction: a cognitive perspective. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

_____. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). Acquisition of mathematics: Concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

_____. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. Análise Psicológica, 1, p. 75-90. 1986.

_____. El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

_____. Teoria dos campos conceituais. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1999 (tradução