RAZÃO ÁUREA E APLICAÇÕES: A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A ESPIRAL ÁUREA.

Alexandre Ramon de Souza[1]

Maria do Carmo Vila[2]

Resumo: Esta pesquisa teve por objetivos verificar se o estudo da razão áurea e de suas aplicações, a partir da sequência de Fibonacci e da espiral áurea, contribuiria para a aprendizagem de razão e proporção de alunos do 9º ano de uma escola pública e para o desenvolvimento da percepção desses alunos acerca da importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, e contou com a participação de quarenta alunos de uma turma do Ensino Fundamental. Para coleta de dados, foram utilizados quatro instrumentos: observação participante, relatório dos alunos, manuscritos dos alunos e teste. Os dados resultantes da observação participante foram anotados no diário de campo do pesquisador e gravados por meio de filmagens em áudio e vídeo. Transcritos e analisados, os dados apresentaram evidências significativas sobre as contribuições para a aprendizagem de razão e proporção.

Palavras-chave: Educação Matemática; Sequência de Fibonacci; Espiral áurea

1. 2 Introdução

Ao longo dos anos de minha carreira no magistério, tinha a impressão de que algo não funcionava muito bem. Eu tentava repassar os conteúdos matemáticos para os alunos, mas verificava que poucos dentre eles os entendiam. Uma boa parcela deles ficava “a ver navios”. Desenvolvi algumas atividades visando aproximar a Matemática e a Física da realidade do estudante. Obtive alguns resultados favoráveis, mas ainda constatava que muitos estudantes continuavam com dificuldades em aprender Matemática. Um assunto que sempre me despertava a atenção, pois os alunos tinham muita dificuldade de aprendê-lo, era a proporcionalidade, assunto constante do programa do 9º ano do Ensino Fundamental.

Em 1997, participei de um curso de Capacitação de Professores para o Ensino Médio e, em 1998, de um curso Capacitação de Professores para o Ensino Fundamental. Tais cursos foram promovidos pela Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (SEEMG). Eles foram muito importantes para a minha profissão, pois me incentivaram a buscar alternativas que pudessem minimizar as dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem da Matemática.

Em 2010, participei da seleção do Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto e fui aprovado. Depois de ter cursado algumas disciplinas, tomei conhecimento de outras formas de intervir no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, de modo a reduzir as dificuldades dos alunos no estudo dessa disciplina. O caminho era buscar metodologias e abordagens matemáticas que possibilitassem ao aluno construir seus conhecimentos, ao invés de submetê-lo a aulas monótonas, nas quais o professor expunha os conteúdos usando o quadro e o giz.

Foi assim que optamos por realizar a presente pesquisa, que buscou verificar se o estudo da razão áurea e de suas aplicações, a partir da sequência de Fibonacci e da espiral áurea, contribuiria para a aprendizagem de razão e proporção de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Além de sua aplicação em áreas da própria Matemática, a razão áurea pode ser observada na vida cotidiana e usada em várias outras áreas do conhecimento como a pintura, arquitetura, música, odontologia. Assim sendo, também buscamos verificar se essa diversidade de aplicação poderia cooperar para o desenvolvimento da percepção dos alunos acerca da importância da Matemática e de sua contribuição para outras áreas do conhecimento.

2. Justificativa

Duas razões principais justificaram a presente investigação: a) dificuldade manifestada pelos alunos em relação à aprendizagem de razão, proporção e semelhança; b) interesse pelo assunto.

2.1 Dificuldades manifestadas pelos alunos em relação à aprendizagem de razão, proporção e semelhança.

Ao longo de dezessete anos lecionando para o 9º ano do Ensino Fundamental, o pesquisador percebeu que havia uma grande dificuldade dos alunos em identificar figuras semelhantes e, assim, encontrar a proporção entre elas. Tentando minimizar as dificuldades apresentadas, inseriu o tema razão áurea em suas aulas. Os resultados lhe pareceram positivos, mas o pesquisador não chegou a realizar nenhum estudo para comprovar sua percepção sobre as contribuições dessa abordagem na aprendizagem da proporcionalidade pelos meus alunos.

Concluiu, então, que se fazia necessário sistematizar a abordagem, aplicá-la em sala de aula, e coletar dados consistentes sobre a experiência realizada. Nascia aí o germe da presente pesquisa.

ISSN 2178-034X

2. 2 Interesse em pesquisar o tema.

Durante o ano de 2004, conversando com uma professora que trabalhava com educação artística, o pesquisador percebeu mais profundamente a importância das aplicações da razão áurea na Matemática e em outras áreas do conhecimento e, em particular¸ nas artes.

Leituras sobre proporcionalidade confirmaram as preocupações do pesquisador com relação às dificuldades dos alunos quanto à aprendizagem da proporcionalidade e o potencial da razão áurea para minorar tais dificuldades.

A literatura sobre esses assuntos revelou que a construção dos conceitos matemáticos pelos alunos se dá ao longo do tempo e que eles devem ser trabalhados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, senão antes (PCN, 2008; PNLD, 2008; CARRAHER et al, 1986, p. 96 apud PONTES, 1996, p. 66).

Por outro lado, autores criticavam o ensino da proporcionalidade na atualidade, mostrando que, em geral, ele consistia na apresentação mecânica da regra de três e de todas as regras que dela decorrem sem possibilidade de os alunos adquirirem um verdadeiro conhecimento de proporcionalidade (BOISNARD et al; 1994; OLIVEIRA e SANTOS, 2000).

Por fim, a posição de documentos e de educadores (VERGNAUD, 2003; LESH, POST e BEHR, 1988) sobre a importância da proporcionalidade, seja na formação das estruturas cognitivas dos alunos, na aprendizagem de outros conceitos matemáticos, na aplicação em várias áreas do conhecimento científico ou, ainda, nas aplicações no cotidiano das pessoas, levaram o pesquisador a se preocupar ainda mais com o aprendizado desse conteúdo e à decisão de realizar uma investigação nessa área.

3. Questão de investigação e objetivo

As considerações anteriores levaram o pesquisador a propor a seguinte questão de pesquisa: Quais as contribuições do estudo da sequência de Fibonacci e da espiral áurea para a aprendizagem de razão e proporção de alunos do 9º ano de uma escola pública e para a percepção deles sobre a importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento?

Para respondê-la, foi fixado como objetivo o de verificar se o estudo da sequência de Fibonacci e a construção da espiral áurea contribuiriam para a aprendizagem de razão e proporção de alunos do 9º ano de uma escola pública e para percepção deles sobre a importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

Para realizar a pesquisa, foi elaborada uma um conjunto de ativiaddes sobre a sequência de Fibonacci e a espiral áurea para o 9º ano do Ensino Fundamental como elemento introdutório ao estudo de razão e proporção.

4. Fundamentos teóricos

4. 1 Razão áurea

Quando se analisa as diversas situações em que a razão áurea aparece, percebe-se que, realmente, se trata de um número diferenciado onde suas aplicações englobam diversos campos tais como a biologia, a música, a literatura, as artes, a arquitetura e situações na própria matemática como, por exemplo, a sequência de Fibonacci e a espiral áurea.

A primeira definição de razão áurea apareceu, por volta de 300 a.C., no livro XIII, proposição 5, de Euclides de Alexandria. Euclides definiu essa proporção da divisão de uma linha e a chamou de razão extrema e média. Nas palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.”

Esta definição pode ser melhor entendida, usando a figura seguinte:

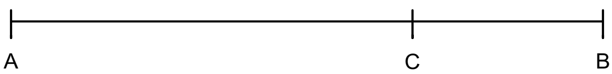


Figura 1- Divisão de um segmento em média de extrema razão

O comprimento do segmento AB é maior que o do segmento AC; da mesma forma, o comprimento do segmento AC é maior que o do segmento CB. Se a razão entre os comprimentos dos segmentos AB e CB for igual à razão entre os comprimentos dos segmentos AC e CB, então esse segmento AB foi dividido na razão extrema e média, ou numa razão áurea.

Para realizar o cálculo da razão áurea vamos considerar a figura seguinte:

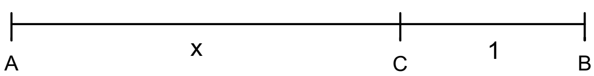


Figura 2- Cálculo da razão áurea

ISSN 2178-034X

Na figura, fazendo AC = x e CB = 1, tem-se que:

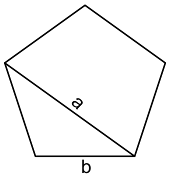
$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Logo: $x^2 = x + 1$. Resolvendo esta equação, obtêm-se as seguintes raízes:

$$x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

A solução positiva da equação é chamada razão áurea, usualmente, nomeada pelo símbolo Φ (lê-se phi). Calculando a raiz positiva da equação, chega-se ao seguinte resultado aproximado: Φ ≈ 1,618, ou seja, a razão áurea é, aproximadamente, igual ao número 1,618.

Os Pitagóricos sabiam que havia relação áurea entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida do seu lado, conforme mostra a figura seguinte.



Relação Áurea

$$\frac{a}{b} \approx 1{,}61$$

Figura 3 - Pentágono e razão áurea

Os Pitagóricos também sabiam que a relação entre a medida do raio de uma circunferência circunscrita ao decágono regular e a medida de um de seus lados estavam em razão áurea.

Na história da razão áurea, aparece outro nome de destaque: Leonardo de Pisa ou Fibonacci. Este dizia que qualquer número poderia ser escrito om os nove números indianos (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) mais o signo 0. Foi assim que Fibonacci começou seu primeiro livro *Liber Abaci* (Livro do ábaco), publicado em 1202. Fibonacci teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas.

Leonardo Fibonacci nasceu na década de 1170, filho de um homem de negócios e funcionário do governo chamado Guglielmo. O apelido Fibonacci (do latim *filius* Bonacci, filho da família Bonacci, ou filho da boa natureza), foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaurne Libri numa nota de rodapé em seu livro *Histoire des Sciencis Matematique em Italie*, de 1838. Entretanto, há alguns pesquisadores que atribuem o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do fim do século XVII.

O papel de Fibonacci na história da razão áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a razão áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a razão áurea, ele expandiu de forma significativa o campo da razão áurea e de suas aplicações.

Segundo Lívio (2007) as contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da razão áurea aparecem em um pequeno livro sobre geometria, *Practica Geometriae*, que foi publicado em 1223. Ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do dodecágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro; todos os quais intimamente ligados à razão áurea. Na solução desses problemas, Fibonacci demonstra um profundo conhecimento de geometria euclidiana. Embora suas técnicas matemáticas empreguem até certo ponto trabalhos anteriores, em particular sobre o pentágono e o decágono, de Abu Kamil, há poucas dúvidas de que Fibonacci aprimorou o uso das propriedades da razão áurea em várias aplicações geométricas. Contudo, sua contribuição mais importante para a razão áurea, e a que mais lhe trouxe fama, deriva de um problema aparentemente inocente do *Liber Abaci*.

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (FIBONACCI, 1202 apud LÍVIO, 2007, p.116).

Em qualquer mês, começando com o terceiro, o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de adultos nos dois meses anteriores. O número de pares adultos, portanto, segue a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., e o número de pares de filhotes segue exatamente a mesma sequência, apenas com a diferença de um mês, a saber, 0, 1, 2, 3, 5, 8, ... É fácil observar que o número de pares é simplesmente a soma desses números, que dá a mesma sequência dos pares de adultos, com o primeiro termo omitido (1, 2, 3, 5, 8,...). A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... , na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, foi chamada de sequência de Fibonacci, no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 - 1891).

Sequências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A sequência de Fibonacci foi a primeira dessas sequências recursivas na Europa. A propriedade geral de que cada termo na

ISSN 2178-034X

sequência é igual à soma dos dois anteriores é expressa matematicamente como: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, onde F_n representa o n-ésimo termo na sequência.

O nome de Fibonacci é tão famoso hoje porque a sequência que leva seu nome está longe de ficar limitada à reprodução de coelhos. Ela é usada em algumas construções como a da espiral áurea e pode ser encontrada na natureza (caramujo Nautillus, pétalas de flores, formação dos galhos das árvores, nas veias e artérias, etc).

Considerando a sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... e a razão de cada número pelo seu antecessor, obtêm-se outra sequência:

$$\frac{1}{1} = 1\,, \quad \frac{2}{1} = 2\,, \quad \frac{3}{2} = 1{,}5\,, \quad \frac{5}{3}\ 1{,}666\ldots\ , \quad \frac{8}{5} = 1{,}6\ ,\ldots$$

Isso é percebido quando se coloca em um gráfico a sequência de Fibonacci no eixo horizontal e as razões sucessivas no eixo vertical.

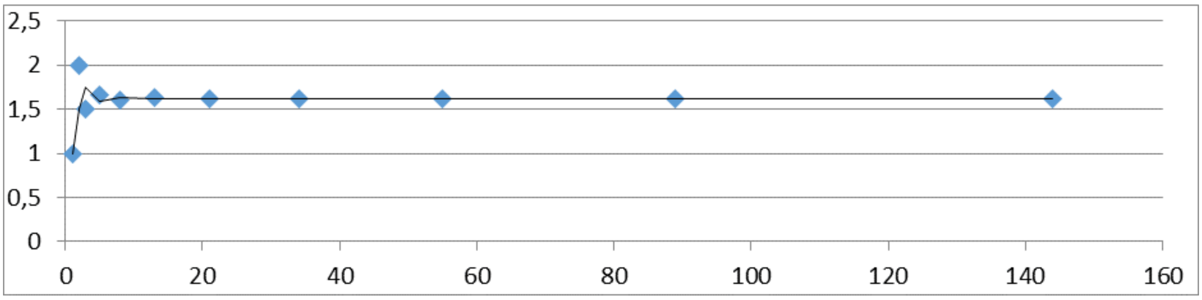


Figura 4 - Sequência de Fibonacci e razões sucessivas

As razões vão se aproximando da razão áurea. Quando n tende para o infinito, o limite é exatamente a razão áurea ϕ.

A razão áurea também pode ser importante no aprendizado da Matemática considerando ser ela encontrada em situações tão diversas como na vida cotidiana, natureza, arquitetura, odontologia, música, pintura, e suas aplicações se estendem por diversas áreas do conhecimento humano.

Na vida cotidiana, ela pode ser observada, por exemplo, em cartões de crédito, em uma folha de papel ou uma tela de televisão plana. Os alunos poderão, também, encontrar a razão áurea na natureza como, por exemplo, na concha do caracol *nautilus*, na distribuição das sementes das plantas, nas escamas de peixes, na margarida, no girassol, nos chifres dos cordeiros selvagens, nas presas dos elefantes, na concha de moluscos, entre outros.

Trata-se de observar espirais logarítmicas e a sequência de Fibonacci, onde se encontra a razão áurea. No corpo humano, a presença da razão áurea pode ser detectada entre medidas de comprimentos de várias de suas partes.

4.2 Ensino e aprendizagem de proporcionalidade.

No Brasil, de acordo com os PCN, os objetivos do Ensino Fundamental consistem em conduzir o aluno a compreender e transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações de qualidade e quantidade, resolver situações problemas, comunicar-se matematicamente, estabelecer ligações dentro e fora da Matemática com os outros conteúdos, promover-lhe autoconfiança e interação com seus colegas.

Ao constatar que seus alunos do 9º ano do Ensino Fundamental não possuem os conhecimentos básicos de proporcionalidade para iniciar o estudo sobre semelhanças, teorema de Tales e aplicações desse teorema, professor se pergunta nesse momento: O que devo fazer? Ensinar novamente esse conteúdo? Solicitar aos alunos que façam uma revisão do conteúdo? Considerar que este não é um problema seu, pois os alunos deveriam ter aprendido esse conteúdo em séries anteriores, e, assim, continuar a desenvolver normalmente seu plano da disciplina?

Em grande parte das escolas brasileiras, a proporcionalidade é abordada a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, deixando um hiato nas séries anteriores. Pesquisas têm mostrado que os conceitos relevantes para a formação matemática atual devem ser trabalhados com os alunos desde a fase inicial da formação escolar.

Portanto, não se espera que a construção de um conceito matemático ocorra de forma completa e num curto período de tempo. Pelo contrário, ela se processa no decorrer de um longo período, desde estágios mais intuitivos aos mais sistematizados, conforme mencionado no PNLD (2008).

Nesse sentido, na presente pesquisa foi retomado o conteúdo de razão e de proporção no 9º ano a partir da sequência de Fibonacci e da espiral áurea.

5. Metodologia da Pesquisa

5.1 Participantes

Os participantes da pesquisa foram quarenta alunos do 9º ano de uma escola pública de Ensino Fundamental e Médio da região metropolitana de Belo Horizonte, Minas Gerais.

ISSN 2178-034X

Trata-se de uma escola urbana que funciona em três turnos, contando com aproximadamente 1 200 alunos. As turmas do 9º ano são compostas por alunos de níveis socioeconômicos variados, fator importante para a pesquisa.

O pesquisador leciona nesta escola há alguns anos e, no período de aplicação da pesquisa, foi professor regular dos alunos do 9º ano. Assim sendo, a investigação foi desenvolvida em horário normal de aula de Matemática.

5.2 Instrumentos de coleta de dados

Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: observação participante, relatório dos alunos, manuscritos dos alunos e teste.

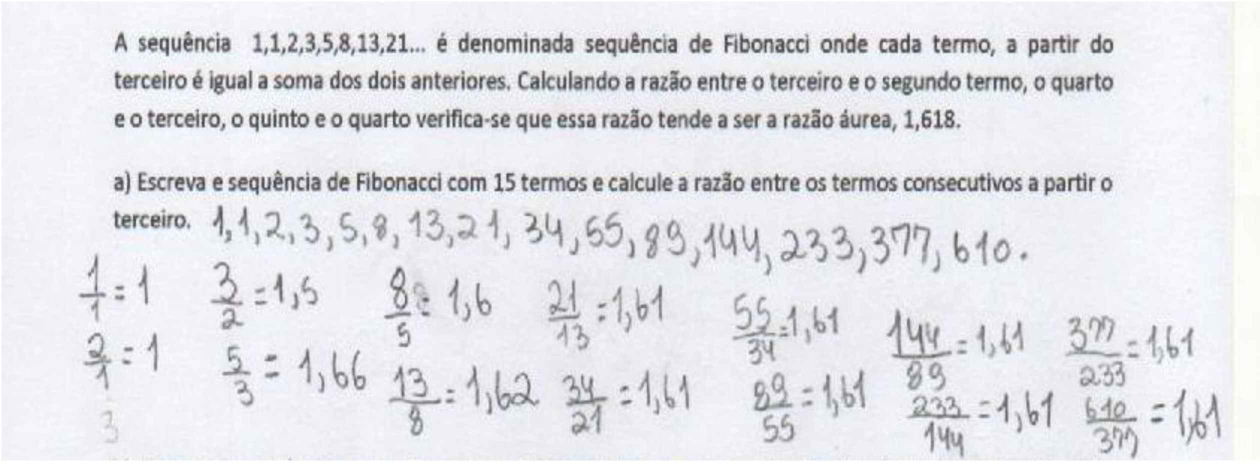
Considerando que o pesquisador foi o próprio professor da turma do 9º ano, uma das técnicas utilizadas na presente investigação foi a da observação participante. Trata-se de uma técnica de levantamento de informações que pressupõe convívio, compartilhamento de uma base comum de comunicação e intercâmbio de experiências com o(s) outro(s) primordialmente através dos sentidos humanos: olhar, falar, sentir, vivenciar, raciocinar e outros, entre o pesquisador, os sujeitos observados e o contexto dinâmico de relações no qual os sujeitos vivem e que é por todos construído e reconstruído a cada momento (Fernandes, 2011).

Os manuscritos e os relatórios dos alunos também foram usados como instrumentos de coleta de dado da investigação. Durante a aplicação das atividades de pesquisa em sala de aula, os alunos trabalharam em grupo. Ao final de cada atividade, foi solicitado aos grupos que discutissem e expressassem por escrito suas opiniões sobre as situações vivenciadas. Cada grupo usou um caderno, onde foram anotadas as suas observações.

Durante a realização de atividades sobre razão áurea, os alunos também fizeram anotações em suas folhas de atividades. Elas, também, se constituíram em objeto de análise para a pesquisa.

5.3 Procedimentos

Para realizar as atividades programadas, os alunos foram divididos em grupos de 4 ou 5 pessoas, os quais foram nomeados G1, G2, G3, G4, G, G6, G7 e G8. Cada atividade foi apresentada em uma folha impressa, na qual os alunos do grupo registraram o caminho usado para resolvê-la. Essas produções escritas foram recolhidas para análise ao final da aula e devolvidas aos alunos na aula seguinte. Foram recolhidos, também, os relatórios produzidos pelos grupos sobre cada atividade por eles realizada. Como exemplo, apresentamos duas das atividades desenvolvidas por eles desenvolvidas.


A sequência 1,1,2,3,5,8,13,21... é denominada sequência de Fibonacci onde cada termo, a partir do terceiro é igual a soma dos dois anteriores. Calculando a razão entre o terceiro e o segundo termo, o quarto e o terceiro, o quinto e o quarto verifica-se que essa razão tende a ser a razão áurea, 1,618.

a) Escreva e sequência de Fibonacci com 15 termos e calcule a razão entre os termos consecutivos a partir o terceiro. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{2}{1} = 1$ $\frac{3}{2} = 1,5$ $\frac{5}{3} = 1,66$ $\frac{8}{5} = 1,6$ $\frac{13}{8} = 1,62$ $\frac{21}{13} = 1,61$ $\frac{34}{21} = 1,61$ $\frac{55}{34} = 1,61$ $\frac{89}{55} = 1,61$ $\frac{144}{89} = 1,61$ $\frac{233}{144} = 1,61$ $\frac{377}{233} = 1,61$ $\frac{610}{377} = 1,61$

Figura 5 - Atividade realizada pelo grupo G2

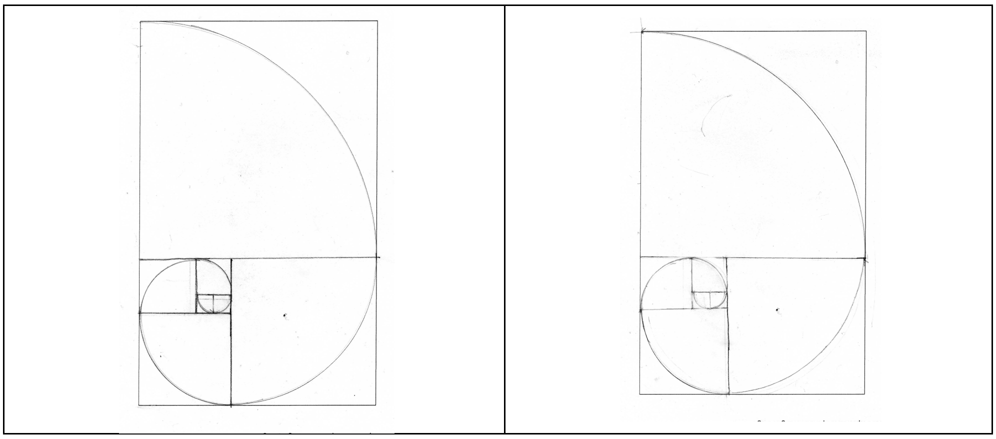


Figura 6 - Atividade realizada pelos grupos G1 e G4

6. Resultados e Conclusões

6.1 Considerações em relação ao objetivo.

O objetivo da pesquisa era verificar se o "O estudo da sequência de Fibonacci e a construção da espiral áurea contribuiriam para a aprendizagem de razão e proporção de alunos do 9º ano de uma escola pública e para a percepção deles sobre a importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

As análises relativas aos dados coletados durante a aplicação do conjunto de atividades didáticas sobre espiral áurea e a sequência de Fibonacci. apresentaram fortes evidências de que os alunos compreenderam os conceitos de razão e proporção.

ISSN 2178-034X

Por outro lado, durante o desenvolvimento das atividades referentes à sequência de Fibonacci e a espiral áurea, os alunos exploraram várias aplicações da razão áurea na natureza, pintura, arquitetura, música, matemática e em situações do cotidiano. Assim, por exemplo, eles analisaram flores nas quais o número de pétalas seguia a sequência de Fibonacci. No caso de algumas das atividades com a espiral áurea, os alunos os alunos deviam usar instrumentos de desenho. Eles reconheceram que haviam aprendido a medir e a usar o compasso e demais instrumentos, ficando mais experientes com seu uso e gostando de usá-los. Um grupo relatou que a matéria da construção da espiral áurea foi muito boa porque os ensinou a fazer medidas áureas com o uso do compasso.

A análise dos dados mostrou que esse trabalho explorando a interdisciplinaridade contribuiu para que os alunos desenvolvessem suas percepções sobre a importância da Matemática e de sua aplicação em outras áreas de conhecimento.

7. Referências:

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática**. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 21 fev. 2008.

VERGNAUD, G. A psicologia da educação. In: PLAISANCE, E.; VERGNAUD, G. **As Ciências Da Educação**. São Paulo: Loyola, 2003.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEF, 1999, 364p.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007. 654p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

ISHIHARA, Cristiane A.; SANTOS, Neide A. Pessoa dos. **Matemática: Ensino Médio, 1ª série. 1**. ed. Brasília: CIB-Cisbrasil, 2004. 480 p.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular (CBC)**: Matemática, Ensinos Fundamental e Médio. Belo Horizonte, SEE/MG, 1995.

POZO, Juan Ignácio. **A solução de Problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998. 173p.
LÍVIO, Mário. **Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente**. 2ª edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2007.