UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS UTILIZANDO UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS.

Leticia Pereira de Matos
Instituto Federal do Rio de Janeiro
leticiadematos@yahoo.com.br

Renata Arruda Barros
Instituto Federal do Rio de Janeiro
renata.barros@ifrj.edu.br

Resumo:
Esse trabalho relata a aplicação de uma sequencia de atividades investigativas que utilizou uma abordagem histórica sobre o processo de construção dos números irracionais, de forma a mostrar, demonstrar, discutir e trabalhar intuitivamente esses números. Os referenciais teóricos adotados foram atividade investigativa, o uso da história da matemática como abordagem didática e os obstáculos epistemológicos identificados no processo histórico de construção dos números irracionais A construção da sequência didática foi pensada de forma a minimizar os obstáculos identificados e possibilitar a compreensão intuitiva da completude da reta. A aplicação foi realizada com alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola federal. Através da realização de avaliações antes e depois da atividade constatou-se que a sequência cumpriu seu papel de minimizar as dificuldades identificadas. Sendo assim, acredita-se que essa sequencia pode ser uma alternativa para o ensino de números irracionais.
Palavras-chave: Números Irracionais; Atividades Investigativas; Obstáculos Epistemológicos; História da Matemática.

1. Introdução

Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais surgiram a partir de necessidades naturais, advindas da própria sociedade da época, durante a evolução das civilizações. Os números irracionais, ao contrário, não foram criados a partir dessa necessidade natural e sim descobertos a partir da solução de problemas geométricos, como a quadratura do circulo e a diagonal do quadrado de lado 1(um).

Foram os pitagóricos que descobriram que a diagonal do quadrado de lado um e o problema da quadratura do círculo não possuíam soluções racionais. Os próprios pitagóricos, ao se depararem com segmentos incomensuráveis, entraram em um conflito profundo com as ideias matemáticas que eles tinham até então. Durante muito tempo, evitou-se essa discussão, o que reforça a natureza não intuitiva do conceito de número irracional. Nesse sentido, acreditamos que podemos analisar as dificuldades no processo de ensino aprendizagem dos números irracionais a luz do referencial teórico de obstáculos epistemológicos.

Nessa sequência didática, houve a preocupação de como os números irracionais são ensinados nas escolas. Acreditamos que a abordagem apresentada pelos livros didáticos não esteja sendo suficiente para construir o conhecimento a respeito do tema. O que acreditamos ser agravado pela dificuldade encontrada pelos professores em relacionar os conceitos adquiridos durante sua formação e os conteúdos da Educação Básica, o que faz com que eles restrinjam a abordagem do conteúdo ao livro didático, refletindo negativamente no aprendizado dos alunos.

Dessa forma, propomos uma sequencia de atividades investigativas que buscasse auxiliar os alunos a superar os obstáculos epistemológicos presentes na construção desse conceito, além de possibilitar a compreensão intuitiva da completude da reta. Para tanto, usamos a história da matemática na elaboração dessas atividades investigativas.

Os objetivos desse trabalho são: apresentar uma sequência de atividades investigativas envolvendo os números irracionais e relatar a aplicação e os resultados da aplicação dessa atividade.

2. Fundamentação teórica

2.1. O uso da história da matemática como abordagem didática

Todos os conteúdos matemáticos passam por um processo de evolução e consolidação dentro de uma sociedade e sofrem o reflexo de suas qualidades e problemas. Porém, todo esse desenrolar costuma ser omitido durante o processo didático, devido ao nosso interesse somente nos conceitos e propriedades já definidas. Na matemática, é bastante evidente o interesse nos resultados finais, sua apresentação formal, sem levar em consideração todos os caminhos e contextos em que foram produzidos.

Concordamos com Medeiros (2005) quando ele salienta a falta de preocupação com as questões históricas no ensino de matemática. Medeiros (2005) afirma que “A apresentação da Matemática foi tradicionalmente realizada sem nenhuma referência à

ISSN 2178-034X

história de sua construção, e numa total ausência de discurso sobre aquilo que ela é ou sobre o seu fazer.”.

Essas informações que são omitidas mostram uma matemática obscura, onde os conceitos, definições e propriedades foram descobertos e rapidamente lapidados, sem que matemáticos tivessem feito escolhas erradas, assumido valores lógicos verdadeiros para proposições falsas ou até mesmo dedicando anos e anos de estudo para conseguir obter o resultado em questão. A imagem que a matemática passa contribui para que muitos alunos a considerem como uma ciência difícil, ocasionando a desistência e criando barreiras e obstáculos para o aprendizado. Concordamos com o PCN que:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento [...]. (BRASIL, 1998, p.37)

Nesse sentido, acreditamos ser necessário mostrar uma matemática humanizada, e que por estar inserida em uma sociedade, vise auxiliar a compressão e interação com fenômenos da natureza e sua manifestação em diversos países, culturas e épocas e acreditamos que a utilização de dados históricos possibilita a alunos e professores a visualização do contexto, envolvendo-se e ampliando suas possibilidades de compreensão, argumentação e construção de novos conhecimentos.

2.2.Obstáculos epistemológicos

A definição da palavra obstáculo aparece no dicionário Houaiss como “algo que impede ou atrapalha o movimento, a progressão de alguém ou alguma coisa”. Já a palavra epistemologia é encontrada nesse mesmo dicionário como “reflexão geral em torno da natureza, etapas limite do conhecimento humano, (...) teoria do conhecimento, (...).”. Assim, o termo obstáculo epistemológico nos traz a ideia de algo que atrapalha, e em alguns casos impede, o conhecimento.

O termo “obstáculos epistemológicos” foi criado pelo epistemólogo francês Gaston Bachelard como constituinte do pensamento científico, referendando o impedimento ou a impossibilidade do progresso da ciência. A noção de obstáculo epistemológico foi inserida na Educação Matemática por Gui Brousseau em 1976 que afirma que.

> O sentido de um conhecimento matemático se define não apenas pelo conjunto de situações onde este conhecimento é realizado como teoria matemática, não somente pelo conjunto de situações onde o sujeito encontrou como meio de solução, mas também pelo conjunto das concepções, das escolhas anteriores que ele rejeita, dos erros que ele rejeita, pelas economias que ele proporciona as formulações que ele retoma etc. (BROUSSEAU,1983,p.170,apud IGLIORI,2010)

Dessa forma, percebemos a importância da reflexão sobre todos os conjuntos envolvidos na ruptura de um conhecimento anterior. Os estudos de Bachelard impulsionaram também a análise do conhecimento matemático com a utilização da história da matemática no contexto ensino, obtendo assim algumas luzes na forma que se dá o processo de construção do conhecimento. Segundo Bachelard (2002), obstáculos epistemológicos são aqueles que aparecem na essência do próprio ato de conhecer, no qual podem ser detectadas causas de estagnação, regressão ou de inércia.

Uma vez que os obstáculos epistemológicos estão presentes na própria essência do aprender, concordamos com Igliori, quando ela afirma que.

> Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode, em principio, encontrar na história do conceito. (IGLIORI, 2010, p.123).

Assim, percebemos que um dos caminhos para a identificação desses obstáculos é a análise da história do conceito. A partir dos obstáculos identificados ao longo do processo histórico de construção do conceito, podemos prever as dificuldades que serão encontradas pelo aluno em seu processo de aprendizagem.

Dessa forma, acreditamos ser possível trabalhar o ensino de números irracionais à luz da noção de obstáculo epistemológico, visto que o processo histórico de construção do conceito de número irracional nos permite perceber a existência de obstáculos de ordem epistemológica. Acreditamos que essa análise pode nos ajudar a construir uma sequência de atividades mais eficiente no sentido de prever as dificuldades conceituais encontradas pelos alunos durante o processo de ensino aprendizagem.

2.3. Atividades Investigativas

ISSN 2178-034X

Ações como procurar, buscar, indagar, esclarecer aliados com os substantivos tema, estudo, problema, solução, do que não se conhece é caracterizado como investigação. Tal significado se assemelha a pesquisar. Para tanto, a escolha de uma ou mais situações problema é a base do processo de investigação matemática.

É fundamental que o professor tenha conhecimento sobre o que é uma situação problema e pra que ela serve no ensino de matemática, para com isso proporcionar aos alunos um entendimento dos conceitos matemáticos nela envolvidos. Segundo Ponte (2009), a questão não deve estar bem definida no inicio, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. Ao trabalhar com esses problemas, podem acontecer pontos de partida diferentes, podendo chegar a lugares distintos. Em uma atividade investigativa, esses caminhos distintos devem ser explorados pelo professor e podem acarretar em outras descobertas, tão ou mais importantes que a solução.

O objetivo do processo de investigação matemática não é apenas a resolução do problema, mas também a reflexão proporcionada por todas as etapas da busca de caminhos para a resolução. Durante essa busca, podem ser feitas outras descobertas, que em algumas situações se mostram tão ou mais importantes do que o resultado.

A estrutura de uma investigação matemática, segundo Ponte (2009), envolve quatro momentos principais, o primeiro momento abrange o reconhecer e explorar uma situação problema e criar questões a serem investigadas. No segundo momento, deve ocorrer a organização dos dados e a formulação de conjecturas ou hipóteses sobre como solucionar a situação problema anteriormente explorada. O terceiro momento consiste na validação das conjecturas através da realização de testes. Caso as conjecturas ou hipóteses formuladas não se mostrem suficientes para resolver o problema, haverá necessidade de reformular as mesmas ou criar novas. E, no último momento, é feita a construção da conclusão da solução da situação problema e a avalição de todo o raciocínio utilizado. Esses momentos podem ocorrer de forma simultânea e incluir diferentes atividades.

Nesse sentido, acreditamos que o uso da história da matemática pode servir como inspiração para a situação problema que dará origem a uma atividade investigativa que trabalhe os conceitos de número irracional, de forma a auxiliar os alunos no enfrentamento dos obstáculos epistemológicos presentes na construção desses números.

3. Pesquisa de campo

A pesquisa foi desenvolvida no Instituto Federal do Rio de janeiro, campus Volta Redonda, localizado na Rua Antônio Barreiros, n° 212, no bairro Aterrado na cidade de Volta Redonda, com alunos do 1º período do curso de automação, modalidade ensino médio técnico integrado.

4. Metodologia da sequência didática

Na sequência didática, trabalhamos o conceito, a exemplificação e a importância do número irracional através de uma sequência de atividades investigativas e da utilização da história da matemática como abordagem didática. Através das atividades, abordamos o conceito de números pares e impares, foi feito uma breve explanação sobre a história dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, trabalhamos também a não racionalidade da diagonal do quadrado de lado um, demonstramos o teorema da densidade e discutimos a completude da reta.

Na primeira atividade, foram trabalhados alguns pré-requisitos necessários, ligados aos conceitos de números pares e números ímpares, necessários ao entendimento das atividades seguintes. Começamos com uma atividade investigativa que discute os conceitos de números pares e impares e suas caracterizações. Foi realizada também uma atividade de demonstração que auxiliou os alunos a provar a irracionalidade da $\sqrt{2}$. Nesse momento, discutiremos também a diferença entre exemplificar e demonstrar.

Na segunda atividade, iniciamos com a explanação da história do surgimento dos números naturais, perpassa pelo surgimento dos inteiros e racionais até a chegar aos dilemas encontrados pela escola pitagórica ao se deparar com os problemas da diagonal do quadrado de lado um. A partir dai, foi apresentada aos alunos uma atividade investigativa que os levou a reproduzir os passos de Pitágoras no caminho da descoberta da existência de números não racionais. Fizemos uma rápida explanação sobre a crise que ocorreu na escola pitagórica.

ISSN 2178-034X

Após mostrarmos a existência de pelo menos um número não racional, iniciamos uma discussão mais profunda sobre esse novo conjunto numérico. Com o objetivo de mostrar a existência de infinitos números irracionais e propiciar a compreensão intuitiva da completude da reta numérica, iniciamos a última atividade.

Esta última atividade é referente ao teorema da densidade, que garante a completude da reta numérica. Nessa atividade, os alunos mostraram que entre dois números racionais sempre existe um número irracional, partindo do intervalo 0 e 1 e utilizando as propriedades dos números irracionais. Após isso, foi discutido com os alunos sobre a completude da reta numérica.

Durante a aplicação das atividades, os resultados foram obtidos a partir da observação do desempenho dos alunos, registrado em diário de aplicação.

5. Atividade 1 – Par e ímpar

Inicialmente, conversamos com os alunos sobre a caracterização dos números pares e impares, além de suas representações. O objetivo é que os alunos conseguissem caracterizar o número par como sendo 2n e o número impar como sendo 2n + 1, o que auxiliou nas demonstrações futuras da atividade. Entregamos uma folha contendo as seguintes perguntas aos alunos: como você descreveria os números pares, como você poderia expressar o dividendo em função do divisor e do resto, como você descreveria os números impares e como você poderia expressar o dividendo em função do divisor e do resto.

Foi dado um tempo para os alunos refletirem sobre a atividade, em relação a descrição dos números pares, um aluno respondeu que são os números divisíveis por 2 e os demais alunos concordaram. Em seguida, foi pedido para que respondessem à como expressar o dividendo em função do divisor e do resto. Alguns alunos apresentaram dificuldade em elaborar conjecturas, então foi apresentado um exemplo numérico simples, a divisão de 6 por 2, questionado como o seis seria expresso em função do divisor e do resto, assim entenderam e responderam a pergunta corretamente.

As mesmas perguntas feitas sobre os números pares foram feitas sobre os números ímpares aos alunos, procedendo da mesma forma e os resultados foram semelhantes.

Após esses questionamentos iniciamos a atividade par e impar entregando uma folha contendo o exercício onde os alunos demostrariam que um número é par se, e somente se, o quadrado desse número é par. Os objetivos de realização dessa demonstração é a utilização da caracterização do número par e impar, diferenciar exemplificação de demonstração e auxiliar na atividade 2.

Separamos o exercício em duas perguntas, a primeira foi se um número x é par, então x^2 é par. Ao analisarem a afirmação, os alunos disseram que sim. Quando foi pedido para que eles mostrassem, a maioria dos alunos respondeu apresentando exemplos numéricos. Após alguns questionamentos sobre a validade para todos os números pares, os alunos perceberam que a conjectura anterior era insuficiente e a reformulação foi feita para demonstrar o resultado para um número par qualquer, atingindo assim um dos objetivos propostos.

Para auxiliar os alunos nesta demonstração, foi perguntado quais informações eles já possuíam e o que eles queriam demonstrar. Construindo assim, junto aos alunos, o conceito intuitivo de hipótese e tese, presentes no processo de demonstração de qualquer teorema. Os alunos foram questionados também sobre como poderíamos escrever o número x com os dados que tínhamos e responderam sem dificuldades. A partir daí, a maioria dos alunos conseguiu concluir a demonstração corretamente sem auxílio.

Passamos então para a segunda pergunta, se x^2 é par, então x é par. Alguns alunos disseram inicialmente que não, mas após alguns exemplos numéricos, dados pelos próprios alunos, todos concordaram que parecia que sim. Foi deixado um tempo para os alunos tentarem mostrar tal fato. Apesar de nenhum aluno ter concluído a demonstração, a reflexão proporcionada por todas as etapas da busca de caminhos para a resolução foi proveitosa, eles conseguiram estabelecer a hipótese de que x^2 é par e caracterizaram x^2 como 2q, mas afirmaram não saber como usar este fato para mostrar que x é par. Note que, por ser uma demonstração que exige um raciocínio matemático mais elaborado, não era de fato esperado que os alunos conseguissem realiza-la sem nenhum auxílio. Entretanto, a forma como os alunos procederam à tentativa nos leva a crer que a

ISSN 2178-034X

atividade anterior conseguiu efetivamente construir o conceito intuitivo de hipótese e tese. Além disso, eles demonstraram compreender a caracterização do número par.

Sugerimos que a turma modificasse a forma de enxergar o problema. Que eles refletissem por que x não poderia ser impar. Os alunos tiveram dificuldade de perceber que isso seria suficiente para concluir que x tem que ser par. Foi necessário então explicar detalhadamente como funcionava uma demonstração por absurdo: perguntamos aos alunos: se dizemos que algo é verdadeiro e concluímos um resultado falso o que isso significa? Os alunos responderam: o que dissemos que era o verdadeiro, não é verdadeiro. Perguntamos então: dissemos que x era ímpar e encontramos um resultado falso, o que isso significa então? Os alunos então responderam: ah que x é par. A partir daí, eles conseguiram usar validar as conjecturas e concluir a solução do problema.

6. Atividade 2 - Não racionalidade da $\sqrt{2}$

Iniciamos abordando a história dos números naturais, inteiros e racionais explicando aos alunos as necessidades humanas que motivaram seu surgimento. A partir daí, questionamos os alunos sobre os números irracionais, perguntando como será que eles surgiram, será que havia a necessidade da sociedade de representar um número com infinitas casas decimais não periódicas.

Perguntamos a turma se eles já ouviram falar do matemático Pitágoras e falamos um pouco da escola pitagórica Nessa escola, os pensadores acreditavam que os números inteiros (positivos) e as razões entre eles, hoje chamadas de números racionais, fossem suficientes para resolver qualquer problema que envolvesse medições. No entanto, alguns problemas propostos pelo pitagóricos puseram por terra essa ideia. Propusemos aos alunos que tentassem ajudar Pitágoras a encontrar uma solução racional para o problema da diagonal do quadrado de lado 1.

Após um tempo, foi perguntado como eles calcularam a diagonal e eles disseram que utilizaram o teorema de Pitágoras e encontram como resposta $\sqrt{2}$. Os alunos conseguiram apresentar a conjectura que se $\sqrt{2}$. é racional seria possível então encontrar dois números naturais a e b tais que $(a/b)^2 = 2$.

Foi proposto aos alunos que tentassem achar esses dois números e, após um tempo, foi perguntado o que os alunos fizeram, eles responderam que elevaram a e b ao quadrado e passaram o b^2 multiplicando ficando com $a^2 = 2b^2$. Inicialmente, perguntamos se o a era par ou ímpar, os alunos responderam corretamente que a é par. Foi perguntado se o b era par ou impar, os alunos tiveram dificuldade, mas depois de refletir visualizaram que b também teria que ser par.

Em seguida, foi perguntado aos alunos se era possível simplificar a fração a/b, os alunos disseram que sim. Logo após, foi perguntado se era possível simplificar a fração a/b até obter uma fração x/y, com x e y ímpares e os alunos também disseram que sim. Lembramos aos alunos que $x^2 = 2y^2$ e que eles mesmos já observaram que, nessa situação, x e y então devem ser pares. Assim, os alunos entenderam que não seria possível, então, escrever raiz de dois na forma de fração.

7. Atividade 4 – Teorema da Densidade

A última atividade trabalhada nessa aula foi relacionada ao teorema da densidade. O objetivo de trabalhar esse teorema com os alunos foi para auxilia-los no entendimento da completude da reta numérica.

Para trabalharmos de forma intuitiva, pedimos aos alunos que apresentem um exemplo de um número irracional entre zero e um e os alunos responderam utilizando o número 0,101001000... .Em seguida, continuamos perguntando sobre a existência de número irracional entre dois racionais pré-estabelecidos. Como os alunos conseguiram apresentar exemplos em todas as situações, estabeleceram a conjectura de que entre dois números racionais sempre havia um número irracional. Lembramos aos alunos que, se fosse verdade, teríamos que mostrar para quaisquer números e que se não fosse verdade teríamos que encontrar um exemplo onde isso não ocorre.

Apesar de alguns alunos terem dito que não concordavam não encontraram nenhum exemplo para comprovar sua teoria. Para ajudar na reflexão, questionamos se entre 5,5 e 5,6 havia um número irracional e os alunos responderam corretamente. Repetimos a solicitação entre 5,55 e 5,56 e novamente os alunos conseguiram construir um exemplo, isso levou os alunos a perceber que sempre seria possível criar um número irracional em qualquer intervalo. Convencidos que o resultado era verdadeiro, foram convidados a tentar encontrar uma demonstração para o fato.

Mesmo não conseguindo elaborar uma demonstração algébrica, os alunos conseguiram observar, de forma intuitiva, que sempre seria possível criar um número irracional entre quaisquer números reais. Notamos que eles conseguiram utilizar conhecimentos adquiridos ao longo das atividades anteriores para estabelecer novas conjecturas e validá-las, o que nos leva a crer que as atividades alcançaram bons resultados.

Ao final, fizemos a demonstração algébrica junto aos alunos e discutimos a completude da reta.

8. Considerações Finais

A pesquisa bibliográfica realizada propiciou a compreensão do processo histórico de construção do conjunto dos números irracionais e permitiu a reflexão sobre os obstáculos epistemológicos presentes neste processo, o que auxiliou na construção das atividades investigativas direcionadas ao enfrentamento das dificuldades previstas.

Acreditamos que essa sequência de atividades investigativas se mostrou uma alternativa eficiente para a superação desses obstáculos. Através da aplicação das atividades e das observações feitas, foi perceptível que todos os alunos evoluíram em sua compreensão do tema, resultado confirmado na avaliação da disciplina.

Em relação à completude da reta numérica, houve a preocupação de que a demonstração do teorema fosse realizada levando em consideração a bagagem matemática dos alunos, os alunos conseguiram entender a demonstração, se apropriando de forma intuitiva de técnicas matemáticas avançadas, como a demonstração por redução ao absurdo.

Acreditamos que, para uma melhor observação dos obstáculos epistemológicos, uma pesquisa futura pode ser feita através de entrevistas com professores de Matemática dos 8º, 9º e1º anos das escolas. A possibilidade de avaliar como o assunto vem sendo tratado pode ajudar a estabelecer um panorama sobre as abordagens mais utilizadas atualmente. A análise do livro didático também pode vir a auxiliar a compreender em que direção o ensino do assunto tem se dado.

9. Referências

BACHELARD, Gaston. **A água e os sonhos – Ensaio sobre a imaginação da matéria.** Tradução de Antonio de Pádua Danesi. São Paulo, Martins Fontes, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF, 1998b.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Instituto Antônio Houaiss, 2001.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. **A noção de "obstáculo epistemológico" e a Educação Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010, p. 113-142.

MEDEIROS, C. F. Por uma educação matemática como intersubjetividade. In: Educação Matemática. Org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. 2.ed. São Paulo: Centauro, 2005, pp.13-44.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

ISSN 2178-034X