O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Christiano Otávio de Rezende Sena
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais /CEFET-MG
christianosena@gmail.com

Yara Patrícia Barral Guimarães Queiroz
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais /CEFET-MG
yaralarrab@hotmail.com

Resumo:
Esse artigo apresenta resultados de uma pesquisa realizada com a elaboração, aplicação e análise de Atividades Investigativas relativas ao Triângulo de Pascal, suas propriedades e seus padrões. O objeto de estudo e investigação consistiram na análise da contribuição deste conteúdo para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. As propriedades do Triângulo de Pascal podem ser interpretadas em situações-problema e serem justificadas tanto algebricamente como por argumentos combinatórios. Foram trabalhadas sete atividades na Pesquisa, mas neste artigo foi tratada apenas referente à Relação de Stifel. Os referenciais teóricos metodológicos que alicerçam essa Pesquisa são a Resolução de Problemas, a Investigação Matemática e Análises de Erros.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Triângulo de Pascal; Resolução de Problemas; Atividades Investigativas; Análise de Erros.

Introdução

A educação passa por um processo de profunda transformação, onde se pode constatar no número cada vez maior de pesquisas sobre ensino em todas as áreas do conhecimento e, particularmente, na Educação Matemática. A escola reflete de modo imediato essas transformações, na qual se percebe o crescente volume dos conteúdos nos currículos das disciplinas, o que de certa forma distancia cada vez mais o pensamento crítico e as experiências das práticas escolares, pois não há tempo e espaço suficientes para refletir ou vivenciar uma aquisição de conhecimento, pois este é rapidamente substituído por outro, as transformações são contínuas e há uma constante desatualização das informações.

Assim, uma proposta a combater essas dificuldades é a de ensinar Matemática por meio de processos de Investigação Matemática, Resolução de Problemas e Análise de Erros, sendo que isso passa pela mudança de foco na prática escolar, fazendo com que a aula deixe de ser simplesmente uma transmissão de conteúdo. Assim, nessa proposta didática o professor participa e incentiva discussões, propõe novos questionamentos conduzindo o processo de ensino com maior dinamismo.

Um exemplo dessa situação pode ser visto nos *softwares* voltados à educação. Há vários programas gráficos, como Winplot, Geogebra, Mathlab, dentre outros, de Geometria dinâmica que possuem a grande facilidade de permitir a criação e movimentos de objetos na tela. Uma de suas várias ferramentas é o de apresentar o gráfico quando o aluno insere uma função. Segundo Borba e Villareal (2005), ressalta-se o apelo visual desses *softwares* de Geometria dinâmica proporcionando diferentes estratégias em complemento ao lápis e papel. É possível, por exemplo, analisar o comportamento de uma função variando seus parâmetros e, fazer uma comparação mais clara da relação entre o algébrico e o gráfico.

Assim, ampliam-se significativamente as possibilidades de investigação e de experimentação matemática oferecida por essas mídias, uma vez que tais possibilidades permitem aos alunos fazerem construções que se fossem feitas com régua e compasso, não haveria a possibilidade de interação com o desenho, por ele ser estático. Os recursos apresentados pelos *softwares* dá aos alunos a possibilidade de fazer simulações para confirmar ou refutar conjecturas, fazendo, assim, descobertas através do processo investigativo.

1. Fundamentação teórica

A aprendizagem do indivíduo em formular e resolver problemas começa na sua experiência escolar, no universo da sala de aula. Entretanto, resolver problemas tem sido um grande desafio na escola. Na maior parte das situações se dá mais valor à forma que ao conteúdo. Toma-se um problema como referência, o professor apresenta uma solução para esse problema e em seguida o aluno repete o procedimento de maneira mecânica em outros problemas do mesmo tipo. Dessa forma, o aluno não desenvolve a estratégia de raciocínio para a resolução de um problema, ou seja, o aluno não aprende com significado de aprendizagem. E a consequência disso é que pouco tempo depois esse conhecimento se perde.

ISSN 2178-034X

Considerar a prática educativa com a metodologia de Resolução de Problemas vai muito além de seguir uma receita mencionada no parágrafo anterior. Segundo D'Ambrosio (1997), o professor não pode circunscrever a sua prática a resolver ele mesmo os problemas, mas antes desenvolver um processo no qual haverá o questionamento e o consequente debate que será desenvolvido com a construção de um plano de ação. E o processo de construção de conhecimento dos alunos ocorre a partir das experiências pessoais por parte de cada indivíduo. Assim, sustentada por uma metodologia de aprendizagem por descoberta e não por repetição, o conteúdo não é apresentado aos alunos de forma pronta, acabada, mas passa por um estágio de plena discussão, estabelecendo entre as partes (professor e alunos) uma relação dialógica.

Pesquisas como a de Gazire (1998) apontam o problema como o ponto de partida do processo de construção do conhecimento. Em seu trabalho, a autora destaca a principal característica dessa perspectiva: "Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido" (GAZIRE, 1988, p.124). Para Echeverría e Pozo (1998), quando o aprendizado é baseado na Resolução de Problemas, no momento em que é bem aplicado o método, o aluno desenvolve sua capacidade de aprender a aprender tomando para si o domínio de procedimentos para dar resposta às mais diversas situações, sejam elas escolares ou cotidianas.

Apesar de muito difundida entre os pesquisadores, a Resolução de Problemas como metodologia ainda traz algumas discordâncias e confusões a respeito de seu significado e dos conceitos que estão associados a ela. Desse modo, termos como "estratégia", "heurística", "problema", entre outros, ainda são tratados de diversas formas entre os pesquisadores. Pode-se ressaltar esse fato, de acordo com Fernandes (1992):

> A Resolução de Problemas é a componente da investigação em educação Matemática mais estudada nos últimos anos. Paradoxalmente, é uma área sobre a qual se sabe relativamente pouco e que, inclusivamente, se pode considerar algo caótica. De fato e, por exemplo, há dificuldades em distinguir os processos utilizados na Resolução de Problemas; desenvolver instrumentos que avaliem esses mesmos processos; e identificar métodos mais adequados para o desenvolvimento da chamada capacidade de Resolução de Problemas. Isto sem referir a outros conceitos

> mais utilizados em Resolução de Problemas tais como "estratégia", "heurística"... (p.45).

As pesquisas em Educação Matemática que enfatizam a Resolução de Problemas como metodologia de ensino defendem que esta seja, na prática escolar do ensino de Matemática, uma atividade desenvolvida pelos alunos não apenas de modo pontual, paralelamente ou à margem do conteúdo, mas como parte integrante do ensino.

Já em relação a Investigação Matemática como metodologia de ensino, de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2003), há nessa situação uma necessidade por parte dos alunos da criação de hipóteses, a elaboração de conjecturas, a verificação dos resultados, para que busquem falhas no processo ou apoio de fundamentos que os confirmem.

Para Ponte et al (1998) uma Investigação Matemática se inicia com uma situação que possa ser compreendida e posteriormente descrita com termos matemáticos. Os autores salientam a importância de observar as informações disponíveis, fazer suposições, testá-las, argumentar em termos plausíveis sua veracidade. Para os autores, todas essas ações tornam-se indispensáveis em uma atividade investigativa constituindo mesmo a própria essência desta. E, nessa tarefa, assume o professor papel decisivo de sustentar o equilíbrio entre manter a autonomia do aluno como investigador e orientar em medida, para que o trabalho flua naturalmente de maneira satisfatória. O trabalho de Ponte (2003) mostra que é possível encontrar, de acordo com o autor, quatro aspectos principais em uma Investigação Matemática. O primeiro refere-se à identificação da situação, sua exploração preliminar e formulação das questões. O segundo aspecto remete a Investigação à formulação de conjecturas. O terceiro inclui a um refinamento das conjecturas obtidas anteriormente após a realização de testes. E o quarto e último aspecto numa Investigação Matemática é o da argumentação e avaliação do trabalho. Segundo Ponte (2003), pode-se sempre programar o modo de começar uma investigação, mas não se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos podem seguir é enorme, podendo ocorrer avanços, recuos e divergências. Erros conceituais são esperados, numa rica multiplicidade de situações, criando naturalmente uma conexão com a metodologia de ensino baseada na análise de erros.

A análise de erros, após a correção de avaliações e atividades propostas, não é algo exatamente novo entre os professores, e isso é facilmente observado nos diálogos de

ISSN 2178-034X

professores com seus pares ou mesmo com seus alunos, quando há um questionamento sobre os critérios para as correções. O que se pode perceber atualmente é a capacidade, como pesquisa e estratégia de ensino, de se examinar com mais profundidade essas investigações, para que essas possam trazer análises mais precisas e intervenções pedagógicas mais adequadas.

No trabalho de Cury (2007), há um retrospecto das pesquisas sobre análises de erros em que a autora defende ser a Investigação Matemática e Análise de Erros não somente uma linha de pesquisa, como também uma metodologia de ensino, desde que seja trabalhada no sentido de promover o debate entre os alunos pelo questionamento e reflexão de seus erros. Segundo a autora, essas discussões devem fazer parte de disciplinas de cursos de formação de professores, dadas a sua importância e dificuldade. Para Souza (2002), devem ser refutadas todas as ideias de fracasso que se assumem diante de algum erro cometido por um aluno, segundo o modelo pedagógico tradicional. De acordo com a autora, é fundamental a análise do erro, no sentido de se planejar intervenções de forma que essa análise leve a uma compreensão ampla sobre onde e porque foi cometido o erro, dando continuidade ao processo de construção do conhecimento. Há também um componente de subjetividade na avaliação do erro que o professor não pode desconsiderar. As diversas realidades dos alunos, culturais, acadêmicas e sociais devem ser também objetos de análise. Segundo Pinto (2000, p. 164 e 165), "O mais importante é o professor adotar uma atitude reflexiva diante do erro do aluno, procurando, não apenas, compreender o erro no interior de um contexto de ensino, mas também compreender o aluno que erra".

2. A elaboração das atividades

A partir da perspectiva do ensino pautado nas metodologias de Resolução de Problemas, Investigação Matemática e Análise de Erros, foram elaboradas sete atividades baseadas em algumas propriedades do Triângulo de Pascal, que auxiliaram no desenvolvimento do aprendizado de Análise Combinatória por meio de descobertas guiadas das propriedades, ou seja, por um método baseado na investigação no qual o aluno aprende descobrindo e não apenas recebendo de modo passivo as informações. E as observações das propriedades relacionadas a situações-problemas permitem a compreensão de sua demonstração com a utilização de argumentos combinatórios.

Nesse artigo é apresentada apenas uma das atividades, especificamente a que se refere à Relação de Stifel. As atividades foram elaboradas e posteriormente aplicadas para um grupo de vinte e cinco alunos do 2º ano do ensino médio sendo que, além de seguir a abordagem teórico-metodológica das Investigações Matemáticas, Resolução de Problemas e Análise de erros, também se pautaram nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, no sentido de promover o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo, a fim de motivar o aluno a compreender situações diversas, resolver problemas e aplicar o conhecimento matemático às variadas situações do cotidiano.

Há, assim, o objetivo de oferecer ao aluno uma sequência didático-metodológica, com o intuito de facilitar o processo de aprendizagem do conteúdo e conduzi-lo a refletir, compreender e analisar as mais diversas situações-problemas presentes, principalmente, na Análise Combinatória. Isso contribui para uma ampliação dos métodos de Resolução de Problemas como linha metodológica de aprendizagem, valorizando não somente os conteúdos dentro dessa área de conhecimento, mas também a capacidade de mobilizá-los nas diferentes situações, as quais se fazem necessárias, desenvolvendo, dessa forma, habilidades e competências necessárias e indispensáveis na formação dos estudantes.

3. Exemplo de atividade: A Relação de Stifel

Uma das propriedades mais conhecidas e de fácil percepção no Triângulo de Pascal é a Relação de Stifel, que diz: “a soma de dois elementos consecutivos de cada linha é igual ao elemento localizado na próxima linha situado entre esses dois que foram somados.”

Na atividade proposta, não há uma apresentação formal dessa propriedade, mas uma descoberta guiada. Inicialmente, tem-se a ilustração do Triângulo (na forma binomial) destacando alguns grupos de binômios que satisfazem a relação, como $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}$ e $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1}$ ou $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3}$ e $\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}$. Sem uso de palavras, faz-se a observação de que $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{0} + \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1} = \genfrac{}{}{0pt}{}{3}{1}$ e $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{2} + \genfrac{}{}{0pt}{}{4}{3} = \genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}$.

ISSN 2178-034X

Assim, a primeira questão da atividade pede que seja indicado qual binômio está localizado à direita de $\binom{4}{3}$, na quinta linha. A segunda questão pede que seja identificado qual o binômio da sexta linha se localiza entre eles. O objetivo das duas primeiras questões é o de mostrar como escolher os binômios encadeados na Relação de Stifel.

A terceira questão pede que seja explicitada a relação entre os binômios, após serem encontrados os valores dos binômios. Após uma intervenção prevista a fim de estabelecer a relação pretendida é dito aos alunos que tal relação é conhecida como Relação de Stifel. A seguir, ao explorar a capacidade de verbalização dos alunos, na quarta questão é pedido que a Relação de Stifel seja enunciada com palavras, sem cálculos ou exemplos. Isto é, usando a representação na língua natural.

Nas questões 5, 6 e 7, é pedido que o aluno apresente a Relação de Stifel para os binômios $\binom{5}{2}$, $\binom{8}{4}$ e $\binom{35}{12}$ com seus binômios consecutivos, respectivamente. Ressaltando que os dois primeiros podem ser facilmente comprovados por meio dos cálculos dos valores dos binômios. Já em relação a $\binom{35}{12}$, certamente na dificuldade da verificação por cálculos, há uma crença na veracidade da relação por meio de uma indução vulgar, ou seja, a partir de alguns poucos casos observados, considera-se que a ideia seja verdadeira de modo geral. Na oitava questão, pede-se que seja escrita a Relação de Stifel para $\binom{n}{k}$ e seu consecutivo, criando assim, a regra geral, mas ainda sem uma demonstração.

Após as oito questões, é então estabelecida uma situação-problema associada à Relação de Stifel. O problema compara todas as comissões que podem ser formadas a partir de um grupo de pessoas com comissões formadas com ou sem determinada pessoa. Assim, a partir de um grupo de oito pessoas, pergunta-se:

1) Quantas comissões podem ser formadas escolhendo quatro dentre essas pessoas?

2) Suponha que uma das oito pessoas da turma seja Leonardo e que por alguma razão ele não possa entrar no grupo das quatro pessoas. Portanto, quantos grupos podem ser formados sem Leonardo?

3) Suponha agora o contrário, que Leonardo tenha que ser um dos quatro escolhidos. Dessa forma, quantos são os grupos em que Leonardo é sempre uma das pessoas escolhidas?

4) Mostre que os valores obtidos satisfazem a Relação de Stifel.

Para se estabelecer uma regra geral, explorar a capacidade de argumentação do aluno e contribuir para fazê-lo compreender e utilizar um argumento combinatório, a seguir é associado ao mesmo princípio das questões apresentadas anteriormente, porém numa situação geral. Dessa forma, foram elaboradas mais quatro questões a partir do seguinte problema: considere um grupo de k + 1 pessoas que devem ser escolhidas dentre n + 1 pessoas. E assim, é pedido que:

1) Escreva na forma binomial quantos são os grupos possíveis de serem formados.

2) Escreva na forma binomial quantos são os grupos que não incluem certa pessoa.

3) Escreva na forma binomial quantos são os grupos que incluem certa pessoa.

4) Por meio de um argumento combinatório utilize os itens (1), (2) e (3) para justificar a Relação de Stifel.

4. Resultados

Naturalmente, devido ao pequeno grau de complexidade das quatro primeiras questões, foram encontrados poucos erros, causados principalmente devido à falta de atenção dos alunos e alguns erros conceituais, como o exemplo do Quadro 1 ilustra.

Quadro 1: resposta de aluno.

(3) Calculando os valores desses binômios, que a relação podemos estabelecer entre esses três binômios?

Eles são complementares entre si

ISSN 2178-034X

Alguns alunos destacaram-se pela forma correta e objetiva de expressar a relação, como é possível observar no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2: resposta de aluno.

A soma de dois binômios consecutivos nos formatos $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k+1}$ tem relação de igualdade com o binômio $\binom{n+1}{k+1}$

Também nas questões 5, 6 e 7, os erros encontrados foram poucos, sendo apenas erros de falta de atenção.

Na oitava questão foi explorada a generalização da propriedade a partir de exemplos numéricos trabalhados e mesmo sem a necessidade de demonstrar, alguns alunos apresentaram dificuldade de se expressarem algebricamente. Assim, ocorreram erros como ilustrado no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3: resposta de aluno.

(8) Generalize a Relação de Stifel, ou seja, escreva-a para $\binom{n}{k}$ e seu consecutivo.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k_2}=\binom{n_2}{k_2}$$

Em relação a segunda parte da atividade, no desenvolvimento da situação-problema, as três primeiras questões apresentaram apenas quatro alunos que deixaram a questão sem responder, sendo que os demais acertaram os questionamentos. Já na quarta questão, que verifica a capacidade de argumentação do aluno, foram encontrados erros como ilustrado no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4: resposta de aluno.

(4) Mostre que os valores obtidos satisfazem a Relação de Stifel.

Os valores satisfazem visto que $\binom{n}{k}$, ou seja, onde n é a turma e k os grupos, sua soma de binômios vai resultar em um binômio de n maior que a soma dos anteriores.

As questões 5, 6 e 7, apresentaram poucos erros, todos relativos à dificuldade dos alunos se expressarem algebricamente. Na questão 8, mais uma vez ficou revelada a dificuldade dos alunos em fazer argumentações dedutivas, onde o Quadro 5 a seguir ilustra um desses exemplos.

Quadro 5: resposta de aluno.

(8) Tente através do raciocínio obtido em (5), (6) e (7) dar um argumento combinatório que justifique a Relação de Stifel.

$\binom{n}{k+1}$ representa os grupos sem determinado elemento

$\binom{n}{k}$ representa os grupos com determinado elemento.

Assim, a soma destes termos nos dá todos os grupos possíveis

Para esse grupo de alunos as análises feitas mostram a necessidade de se trabalhar vários aspectos da álgebra e de argumentações que sustentem as afirmativas feitas por meio das observações realizadas.

5. Considerações finais

ISSN 2178-034X

Após a elaboração, aplicação e análise dos resultados das atividades, tal sequência de atividades se mostrou adequada a contribuir para o ensino de Análise Combinatória no sentido de estabelecer uma reflexão a respeito de temas relacionados, como as demonstrações em Matemática, bem como potencializar o aprendizado do conteúdo por meio da relação entre as propriedades combinatórias e as situações-problema, contribuindo para o processo de construção do conhecimento. As observações das propriedades do Triângulo de Pascal por meio das descobertas guiadas se mostrou um método eficaz para o aprendizado, confirmando as pesquisas que defendem a Investigação Matemática como metodologia de ensino. Também a Resolução de Problemas como processo de construção do conhecimento pôde ser verificado no desenvolvimento das atividades aplicadas, sendo a conexão entre o pensar e o fazer, na passagem entre a observação e a generalização das propriedades do Triângulo de Pascal. E ainda a Análise de Erros se mostrou um componente fundamental para a superação das adversidades quando, por exemplo, foi verificada à falta de habilidade de alguns alunos para realizar argumentações, mesmo compreendendo as relações entre os binômios, como também a dificuldade da manipulação algébrica por parte de alguns alunos se mostrou um impeditivo para o avanço das descobertas e generalizações.

Em relação à questão que essa Pesquisa se propunha a responder: “Que contribuições a metodologia baseada na Resolução de Problemas e na Atividade Investigativa em sala de aula pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória?” Pode-se afirmar que o conjunto das atividades elaboradas a partir das metodologias de Resolução de Problemas, Investigação Matemática e Análise de Erros tiveram o mérito de trazer entusiasmo dos alunos pelas descobertas realizadas, na medida em que participaram ativamente da exploração, como também propiciaram a compreensão das ideias, estabelecendo condições favoráveis para que esse aprendizado fosse consistente e com significado.

6. Referências

BORBA, C.; VILLARREAL, E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.** New York:Springer.v. 39. 2005

CURY, Helena. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A era da consciência.** São Paulo: Fundação Petrópolis, 1997.

ECHEVERRÍA, M.P.P.; POZO, J.I. **Aprender a resolver Problemas e resolver Problemas para aprender.** In: POZO, J.I. (org) **A solução de Problemas.** Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42.

FERNANDES, Domingos (1992). **Resolução de Problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de professores.** In: BROWN, M. et alii. Educação Matemática: temas de investigação. Lisboa, Inst. De Inovação Educacional, pp. 45-103.

GAZIRE, E. S. **Perspectivas da resolução de problemas em educação Matemática.** 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) UNESP / Rio Claro.

PINTO, Neuza Bertoni. **Erro como estratégia didática.** Campinas: Ed. Papirus, 2000.

PONTE, J. P., BROCARDO J., OLIVEIRA, H., **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P., FERREIRA, C., BRUNHEIRA, L. OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. **Investigando as aulas de investigação Matemática.** In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), Investigações Matemáticas na aula e no currículo (pp. 133-152). Lisboa: APM e Projecto MPT (1998).

SOUZA, Sueli Spolador Simões. **Erros em Matemática: um estudo diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental**. 2002, 193 f. Dissertação – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Marília. Marília, 2002.