

## O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

*Sandra Albano da Silva.  
Professora da  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina.  
sandra@uems.br*

*Alessandra Lima de Moraes Mantovani  
Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura - da Universidade Estadual  
de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina.  
[alelimamantovani@hotmail.com](mailto:alelimamantovani@hotmail.com)  
Adriana Cozim de Oliveira Lima  
Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura - da Universidade Estadual  
de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina.  
[drikacozim@gmail.com](mailto:drikacozim@gmail.com)*

**Resumo:** Este artigo reinvoca um tema frequente, mas ainda pouco explorado no ensino regular nas aulas de matemática que é a resolução de problemas e busca refletir sobre essa metodologia didática na perspectiva de que a mesma traduz uma vertente pedagógica inovadora e coerente para o ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos ao propor que o aluno é sujeito da sua aprendizagem. Este texto infere que é possível formar professores reflexivos que busquem nas teorias fundamentação para inovar a maneira de conceberem o ensino de matemática para que, conscientes de seu papel, exerçam a docência para formar sujeitos cognitivamente ativos, propositores que sabem que o erro traz em si a busca do acerto, a tentativa da descoberta. O trabalho docente com a resolução de problemas, nesse caso, demonstrou ser fértil para a formação de pessoas que criam muito mais do que copiam ou reproduzem processos prontos.

**Palavras-chave:** matemática; ensino e aprendizagem; resolução de problemas.

### 1. Introdução

A Matemática vem se construindo ao longo do processo civilizatório como meio de se obter respostas aos mais diferentes problemas. Autores como Polya (1995); Dante (1998); Ponte e Serrazina (2000) entre tantos outros, admitem que a resolução de problemas seja a prática mais comum quando se busca fazer matemática.

O ensino e aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas foi apresentado como proposta teórico-metodológica por George Polya (1887-1985), nascido na Hungria e autor da famosa obra *A Arte de Resolver Problemas* (1945). Esse autor destaca que a tarefa primordial do ensino da matemática é a de ensinar os alunos a pensar e que os

problemas devem ser o centro desse processo nos seguintes passos:

- 1- Compreender o problema;
- 2- Elaborar um plano;
- 3- Executar o plano e;
- 4- Fazer um retrospecto do que foi executado.

Charnay (*apud* PARRA e SAIZ, 2009, p. 42) ressalta que o ensino e aprendizagem de matemática são mais fecundos quando oportunizam aos alunos desenvolver ativamente a capacidade de pensar, traçar estratégias e executá-las: “Seria desnecessário dizer que a atividade de resolução de problemas tem estado no próprio coração da elaboração da ciência matemática. ‘Fazer matemática é resolver problemas’”.

Para Dante (1998), um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar conhecimentos matemáticos para solucioná-lo. Podemos sintetizar que é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas pela pessoa que tenta resolvê-lo. Com isso, as aulas se tornam mais ativas e interessantes além de atingir diversos objetivos inerentes ao próprio ato de buscar a solução para o mesmo. O aluno, ao tentar superar e elucidar o problema pensa produtivamente, ou seja, desenvolve o raciocínio e acostuma a defrontar-se com situações novas e encará-las visando a sua superação.

Em geral, quando o sujeito resolve problemas matemáticos, ele se propõe a encontrar uma (s) solução, tenta retomar o que sabe, confronta ideias e percursos cognitivos, inventa novos caminhos e cria estratégias específicas para que possa encontrar um resultado desejado, conhecido ou não e que há de ser demonstrado utilizando linguagem e normas matemáticas ou apresentando uma solução instigante, intrigante e criativa.

Uma dúvida frequente é: O que diferencia exercício de problema? Ponte e Serrazina (2000) nos auxiliam quando dizem:

Em Matemática, uma distinção importante é entre problema e exercício. Uma questão é um problema para um dado aluno, se ele não tiver meio de encontrar uma solução num único passo. Se o aluno tiver uma forma de obter rapidamente a solução, não estará perante um problema, mas sim, um exercício. O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula conhecida. Ou seja, o exercício envolve mera aplicação de resultados teóricos enquanto um problema necessariamente envolve invenção e ou criação significativa (p. 16).

As concepções pedagógicas tradicionalistas, em geral, se reproduzem em aulas rígidas, conteudistas e calcadas em livros didáticos e exercícios e são muito utilizadas por professores que as veem como a mais correta, por que foi assim que aprenderam matemática. Numa outra perspectiva, existem concepções que enfatizam a ação ativa do aluno como sujeito no processo do seu conhecimento, como um ser em permanente construção mental onde, a cada conhecimento, novas e mais complexas teias de conhecimento são formadas a nível intelectual.

Autores como Parra e Saiz (2009), Ponte e Serrazina (2000) e documentos oficiais como PCN (BRASIL, 1997), Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) e outros tantos, referenciam que o ensino deve sair do modelo tradicional e propiciar ao aluno a pesquisa, a criação e a reflexão.

Kampff (2004, p. 2) enfatiza que: “O professor de matemática deve organizar um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento da exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle da situação”.

Desse modo, vemos que é imprescindível que o processo de ensino e aprendizagem seja pautado por significados para o aluno, que tudo que seja ensinado possa ser aprendido com sentido, com construções internas muitas vezes não lineares.

Brusseu (2008) explica como o sentido de um conhecimento matemático se define e nos chama a atenção para o fato de que não é só pela coleção de situações em que este conhecimento é realizado com teoria matemática, não só pela coleção de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução, mas também, pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma e tantas outras ações e estratégias cognitivas.

A figura do professor é essencial nesse processo de significações de conteúdos matemáticos pelos alunos, uma vez que deve conduzir as situações didáticas, os métodos e as estratégias de modo que estes proporcionem ao sujeito relacionar os conhecimentos em assimilação a diferentes situações e repertórios, isto sempre que se encontra em processo de construção do saber matemático, ou, como afirma Brusseu (2008), em “*regulações cognitivas*”.

Os conhecimentos que são objetos de aprendizagem dos alunos na escola devem levá-lo a não só repetir o que já sabem, mas, “*ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas*”. (Charnay in PARRA e SAIZ, 2009, p. 44).

Ademais, nas aulas de matemática os alunos devem ser encorajados a:

- 1- Fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos quando estão em grupos.
- 2- Confiar nos seus esforços na busca dos acertos, porém, sem medo de errar.
- 3- Não se prender a modelos pré-estabelecidos, mas, acima de tudo, buscar referências cognitivas a fim de que estas lhes assegurem um percurso embasado por uma série de representações e conteúdos que já possui etc.

Há um consenso entre pesquisadores e estudiosos de que a resolução de problemas é um processo fecundo e complexo. Importante é que os alunos estejam motivados para resolver o problema e que possuam capacidade de ler os enunciados dos problemas propostos pelo professor e ou suscitados nas aulas em decorrência do desenvolvimento dos conteúdos e das demandas decorrentes.

## **2- A Resolução de Problemas na Sala de Aula do Ensino Fundamental. Uma Experiência Notável.**

Nas disciplinas trabalhadas no curso de Matemática, Licenciatura: Psicologia da Educação, Didática Geral e Políticas e Legislações Nacionais na Educação, procura-se fomentar nos futuros professores uma necessidade de transformar e qualificar a prática docente a partir da apresentação, estudo, pesquisa e aplicação de teorias e metodologias de cunho cognitivista, vendo o aluno como ser ativo em processo de construção de seu conhecimento que se dá por meio de aproximações sucessivas e interações com o mundo e com outros sujeitos.

A experiência com resolução de problemas que aqui será apresentada foi desenvolvida em parceria com as coautoras desse artigo que são acadêmicas do 4º ano. Preocupadas em saber como fazer para que os alunos se interessassem mais pelas suas aulas, tendo em vista que não são professoras titulares das turmas e que só vão dar aulas esporadicamente, estabelecem periodicamente discussões com a professora orientadora deste artigo, sendo

as mesmas orientadas dentro das possibilidades. Foram feitas leituras e a retomada a algumas concepções teórico-metodológicas. A resolução de problemas foi a que resolveu-se aplicar, de modo que, nas salas que lecionavam procuram sempre incentivar a busca de soluções, a pesquisa e aproximar o conteúdo dado pela professora regente, sob a perspectiva do problema matemático.

Estabelecida essa forma didática de trabalhar nas substituições, as coautoras em questão foram desenvolvendo desde o ano passado, nas turmas que atuam, o gosto pelo pensar, a coragem de buscar o acerto por meio de caminhos diversos e criativos; isso sempre antes ou em paralelo ao ensinarem o processo formal para cada situação. Com isso, o retorno e aceitação dos alunos já estão sendo notáveis, uma vez que nas turmas que trabalham a mais tempo, os alunos têm mostrado motivação de serem sujeitos de todo o processo de construção do saber matemático.

Inegável que o conhecimento não é depositado e acumulado em sobreposição no intelecto, mas sim, construído em processos contínuos de equilíbrio e desequilíbrio num percurso onde os conhecimentos anteriores são retomados e usados para ampliar novos saberes que estão sendo assimilados pelo sujeito que aprende. Sob essa premissa é que a atividade em sala de aula foi proposta aos alunos que deveriam resolver o que foi problematizado.

Ainda, e para auxiliar as nossas inferências sobre como o aluno aprende, Coll (2004) afirma:

Na aprendizagem, todos os conhecimentos que o aluno possui podem ser importantes, mas nem todos participarão do mesmo modo na atribuição de significado [...] Não esqueçamos um elemento muito importante: O conhecimento é fruto de uma atividade pessoal, e quando o professor não vê nenhuma relação entre duas informações, os alunos podem vê-la e, além disso, considera-la muito relevante (p. 98).

A experiência que será apresentada no próximo subtítulo possibilita-nos visualizar o processo cognitivo complexo e intenso que o sujeito estabelece para resolver um problema que está posto e que o incita a buscar a solução e é um pequeno recorte do que os alunos podem fazer quando motivados a atuar e pensar matematicamente.

Passemos então, a descrição da atividade na busca de evidenciar o pensar criativo e fundamentado dos alunos quando lhes é permitido “fazer matemática” e não somente

reproduzir conhecimentos prontos.

#### 4- Atividade Matemática e a Resolução de Problemas.

Muitos dos problemas propostos em sala de aula podem causar resistência por parte dos alunos devido a sua aparente complexidade, mas como professores motivadores e mediadores não podemos permitir o desânimo dos mesmos. Diante desses fatores buscamos trabalhar de forma a levá-los a pesquisar e a empreender no desafio buscando em seu repertório cognitivo saberes que possam auxiliá-los na resolução de problemas.

Durante uma substituição em uma escola pública de tempo integral em Nova Andradina-MS, viu-se que os objetivos propostos estavam sendo alcançados, e o exemplo que destacamos e que apresentamos neste texto, mostra a criatividade de um aluno de 12 anos do ensino fundamental na busca de resolver um problema sugerido em sala de aula, como demonstraremos na sequência.

No decorrer da aula, foi proposto um desafio a ser resolvido pela turma: *Escrevendo números em círculos*, onde era esperado que eles empreendessem com vigor na resolução.

Foi demonstrada na lousa a figura 1 onde temos uma circunferência cortada por 4 segmentos. Retomou-se o que eram seguimentos; porque pareciam 8, mas que eram 4, sempre utilizando a linguagem matemática. Foram discutidos outros conteúdos inerentes ao problema gerando na turma de alunos a motivação, a participação. A proposta de atividade foi a seguinte: Pensar e registrar números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento seja sempre a mesma.

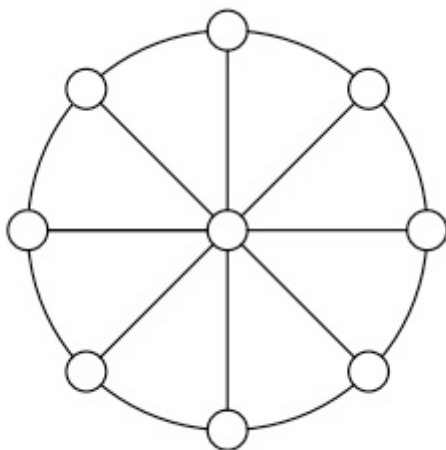
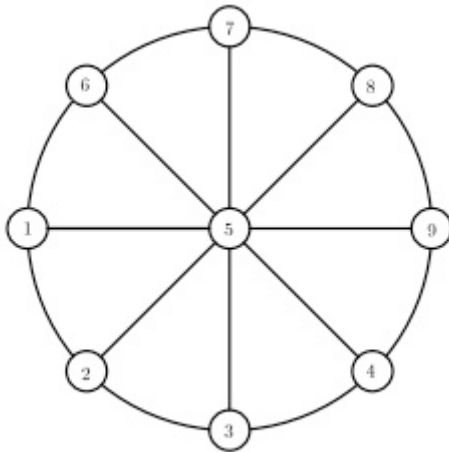


Figura 1: Circunferência Dividida em Segmentos  
Fonte: Banco de questões OBMEP/2015

Avisamos que podiam usar o jeito que lhes conviessem, que poderiam trocar experiências, mas que cada um deveria fazer o seu, buscando pensar um caminho que os levassem ao resultado esperado segundo as diretrizes estabelecidas no problema, pois como vimos em Parra e Saiz (2009.) “as relações pedagógicas devem levar os alunos a perceber que é mais conveniente estabelecer eles mesmos a validade do que lhes afirmam, do que solicitar provas de terceiros”. (p. 51).

Diante do problema proposto esperava-se que os alunos resolvessem o desafio de acordo com uma das seguintes formas:

*1ª Solução possível:* Observe que as somas dos números em círculos diametralmente opostos devem ser iguais, pois todos os segmentos compartilham o círculo central. Desconsiderando-se o centro, a soma dos oito números escritos na circunferência deve ser divisível por 4, pois eles podem ser distribuídos em 4 pares de mesma soma. A soma total é  $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ . Escolhendo-se o 5 como número central, os outros números podem ser distribuídos nos seguintes pares de soma 10: (1, 9), (2, 8), (3, 7) e (4,6).



**Figura 2: Circunferência Dividida em Segmentos com Números**  
**Fonte: Banco de questões OBMEP/2015**

*2ª Solução possível:* Além do 5, os números 9 e 1 também poderiam ocupar o centro, pois  $45-9 = 36$  e  $45-1 = 44$  também são múltiplos de 4. Para colocarmos o 9 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma  $36/4 = 9$ : (1, 8), (2, 7), (3, 6) e (4, 5).

*3ª Solução possível:* Para colocarmos o 1 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma  $44/4 = 11$ : (2, 9), (3, 8), (4, 7) e (5, 6).

Os alunos que resolveram o problema utilizaram uma das referidas soluções, pesquisaram em livros, cadernos etc. Contudo, algo nos chamou a atenção durante a

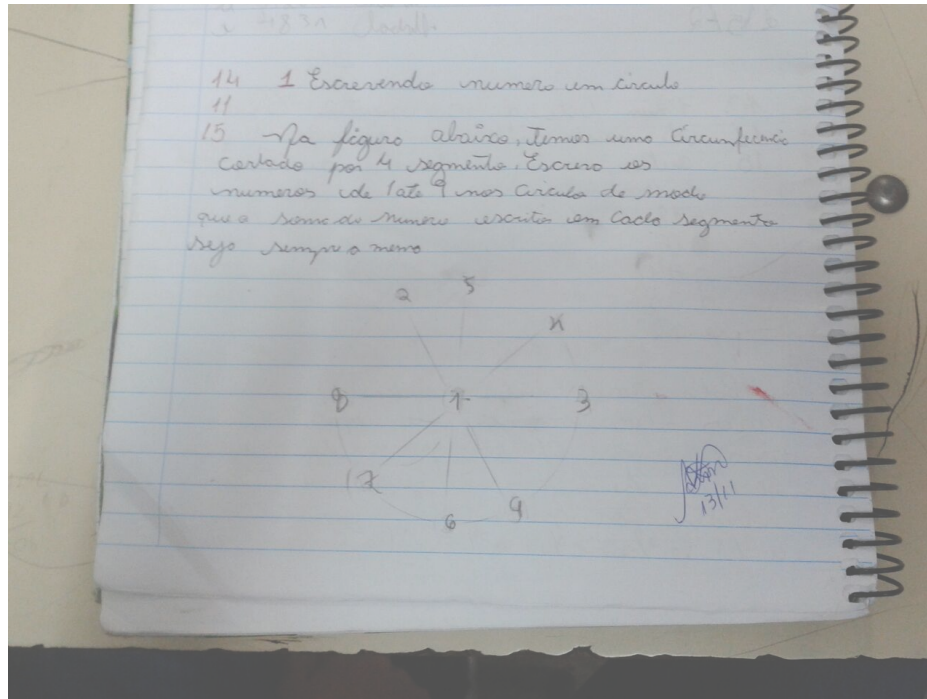
realização desse desafio. Um aluno, após sentir-se desafiado e até incomodado pelo fato de não estar conseguindo chegar à resolução (ele é muito curioso e participativo) buscou em seu repertório cognitivo os conhecimentos que dispunha e propôs um novo caminho para solucionar o desafio, como demonstrado na figura que vem na sequência.



**Figura 3: As Mãos do Aluno com os Números**  
**Fonte: A autora**

Como o problema trazia a informação de que os números a serem utilizados eram de 1 a 9, o aluno sentiu a necessidade da utilização de algo concreto e acessível para a resolução do mesmo; assim, fez uso de seus dedos enumerando-os conforme o sistema decimal. Ele escreveu os números de 1 a 9 nos dedos, excluindo o polegar de uma das mãos. Após enumerá-los, fez a junção de acordo com a similaridade de seus dedos numa relação termo a termo (mindinho com mindinho, indicador com indicador e assim por diante), para formar os pares ordenados, e o que não possuía o seu par (o polegar), elegeu como o número central. Explicou que como ficou um dedo de fora, este teria o valor numérico de 1. Formou assim, os respectivos pares ordenados, (2,9), (3,8), (4,7), (5,6), que ao serem somados entre si e acrescidos do número central – 1 resultavam sem exceção no valor 12 para cada segmento, ou seja, o mesmo total para cada par de dedos. A figura 4 mostra o resultado obtido anotado no caderno do mesmo.





**Figura 4: Caderno Do Aluno**  
**Fonte: A autora**

Podemos perceber no registro do caderno do aluno o ciclo final composto pelo número central e seus respectivos pares ordenados que, somados, davam a igualdade 12.

Arelada a essa atividade e seus resultados foi explorado junto aos alunos como pensaram para resolver o problema, qual a ideia subjacente, e com essa reflexão visou-se que compreendessem que existem meios e formas mais científicas para se resolver esse e outros vários tipos de problemas, ampliando a todos novos saberes.

Sobre esse processo de ampliar o saber dos alunos, Cool (2004) diz:

Trata-se de fazer com que os alunos consigam explicitar e formular ideias pessoais em termos de fácil compreensão para eles mesmos. Também é necessário oferecer-lhes a oportunidade de vê-las a fundo, ampliando suas experiências sobre o tema, para que consigam perceber suas limitações e ensaiar algumas alternativas. Após efetuar essa revisão das próprias concepções é muito importante conseguir que os alunos se expressem em termos ‘científicos’ a sintaxe característica, a economia e o rigor que caracterizam as expressões dessa natureza. (p. 99)

Depois de realizadas as reflexões, os encaminhamentos e as explicações, foram trabalhados pelas acadêmicas na lousa os modos formais para resolver esse problema retomando conceitos e levando a turma de alunos a comentarem, questionarem, criticarem e esclarecerem dúvidas. Foi solicitado ao aluno que criou o percurso de resolução diferente que fosse a frente da sala e explicasse o pensamento que utilizou para resolver o problema e todos os demais o aplaudiram e ficaram bem animados com a criatividade dele que, nesse caso, foi

valorizada por nós como muito importante para a aprendizagem.

Os conceitos matemáticos não estão isolados e as produções dos alunos informam o seu nível de conhecimento. O que pode parecer exótico ou até mesmo errôneo, não consiste em uma ausência de saber, ao contrário, demonstra o quanto o aluno tem de recursos e saberes que sustentam as suas resoluções.

Desse ponto de vista a memória construtiva ou compreensiva é ligada ao processo de construção do conhecimento e a reestruturação permanente à manutenção do conhecido. Envolve uma série de conceitos e habilidades como retomar, reter o que foi aprendido, reelaborar, aplicar, generalizar etc. É um processo dinâmico e que sempre comporta em si uma série de outros processos igualmente muito importantes para a aprendizagem.

### Considerações Finais

Estamos somente começando neste trabalho de significar o ensino e a aprendizagem de matemática, porém, experiências como a que relatamos neste texto nos fazem ter a certeza de que estamos no caminho certo.

Quando possibilitamos aos alunos da educação básica desenvolver competências, habilidades e a confiança de poderem agir, tentar e demonstrar os resultados obtidos estamos dando-lhes em concomitância empoderamento<sup>1</sup> a capacidade de terem de serem sujeitos ativos no processo de conhecimento e garantindo-lhes outras novas habilidades e competências tão relevantes quanto saber conteúdos de matemática e que influenciarão sua vida escolar e extra escolar. Estamos, acima de tudo, investindo neles à conquista da cidadania, a autoconfiança de que podem ser capazes de fazer pesquisas, tentativas de acertos e até mesmo novas descobertas.

Quanto aos futuros professores (acadêmicos da Licenciatura em Matemática) que estão sendo formados na perspectiva de que a resolução de problemas é inerente à matemática, resulta em levá-los a valorizar a atividade mental criativa e construtiva dos alunos.

---

<sup>1</sup> Para Rodrigo Rossi Horochovski o termo foi utilizado inicialmente em países da língua inglesa, sobretudo os EUA. Os primeiros estudos sobre o tema que apareceram em língua portuguesa – traduções ou originais – traziam a grafia primitiva. Entre esses estudos, talvez o principal seja o seminal *Empowerment: uma política de desenvolvimento alternativo*, de John Friedmann (1996). Após, passou-se a colocar o termo, já em português, entre aspas (como em Lisboa, 2000), que caíram conforme o vocabulário foi-se incorporando a língua, mesmo que ainda não se encontre nos principais dicionários. Para Horochovski empoderamento é quase sinônimo de autonomia, na medida em que se refere à capacidade de os indivíduos e grupos poderem decidir sobre as questões que lhes dizem respeito, escolher, enfim entre cursos de ação alternativos em múltiplas esferas política, econômica, educacional, cultural, psicológica, entre outras.

Esperamos, com essas ações, acessar para os nossos acadêmicos e futuros docentes um novo tipo de concepção de escola, de aluno, de ensino e aprendizagem e do próprio fazer matemático visando, acima de tudo, que sejam profissionais compromissados com a qualidade das ações e aquisições dos aprendizes que por eles passarão ao longo de suas atuações docentes, onde o aprender a aprender, aprender a conviver, aprender a fazer e aprender a ser sejam de fato os pilares para toda e qualquer atividade pedagógica.

## 2. Referências

BANCO DE DADOS OBMEP/2015: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdf>. 12/04/2016

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Senado Federal. Brasília. Distrito Federal. 1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática- Ensino Fundamental. Brasília. Distrito Federal. 1997

BROUSSEAU. Guy. Introdução ao Estudo das Situações Didáticas. Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo. Ática, 2008.

COOL, César; MARTÍN, Elena; MAURI, Teresa, et al. O Construtivismo na Sala de Aula. São Paulo. Ática, 6ª edição, 2004.

DANTE. Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 11ª edição. São Paulo. Ática, 1998.

KRULIK, Stephen & REIS, Robert E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo. Atual, 1997.

KAMPPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. Novas Tecnologias e Educação Matemática. CINTED-UFRGS. V.2 Nº 2, Novembro, 2004.

POLYA. G. A arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático: Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo- 2ª reimpr.- Rio de Janeiro, Intercedência, 1995.

PONTE, J. I. ; SERRAZINA, L. Didática da Matemática para o 1º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PARRA, Cecilia & Saiz, Irma. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Tradução Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996, reimpr-2009

HOROCHOVSK, Rodrigo Rossi. EMPODERAMENTO: DEFINIÇÕES E APLICAÇÕES. Site:[http://www.anpocs.org/portal/index.php?option=com\\_docman&task=doc\\_view&gid=3405&Itemid=232](http://www.anpocs.org/portal/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=3405&Itemid=232), 14/04/2016