DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Gilson Bispo de Jesus
UFRB/EMFOCO
gilson@ufrb.edu.br

Resumo
Este minicurso tem o objetivo de apresentar algumas atividades de Geometria, com ênfase nas demonstrações, que serão exploradas por meio das construções geométricas com régua e compasso, no ambiente lápis e papel. Tomamos como referência o tema polígonos regulares, e as atividades têm como foco a construção de conhecimentos geométricos acerca desse tema, sobretudo as justificativas matemáticas que fundamentam o processo de construção de polígonos regulares de forma exata ou aproximada. A escolha por esse tema se deve a possibilidade de desenvolver atividades de natureza investigativa. Outras funções da demonstração, que vão além da verificação de uma evidência matemática, serão vivenciadas nas atividades propostas.
Palavras-chave: Construção Geométrica; Demonstração; Funções da Demonstração.

1 Proposta

Com o objetivo de discutir uma alternativa de abordagem do tema demonstrações em Geometria no Ensino Fundamental II e/ou Ensino Médio, propomos um conjunto de atividades que propiciarão aos participantes vivenciarem a construção de alguns conceitos geométricos que circundam o tema *polígonos regulares*, por meio das construções geométricas com lápis e papel.

As atividades são de natureza exploratória e investigativa, assim visam à construção do conhecimento pelo sujeito. Isto é, o saber não é “transmitido” ao aprendiz, mas ele, interagindo com as ferramentas régua e compasso, pode construir e/ou ampliar conceitos geométricos que circundam o tema *polígonos regulares*. Jesus (2008) aponta que as construções com régua e compasso podem alavancar discussões acerca do processo de construção e em seguida sobre as justificativas matemáticas que fundamentam esse processo, favorecendo desta forma o aprendizado das demonstrações no campo de Geometria.

Nosso objetivo é que os participantes possam modificar a forma como, em geral, agem com os problemas de construção geométrica (receitas prontas) e dessa forma, que construam conhecimentos acerca da demonstração em Geometria e possam vislumbrar futuramente um trabalho com os seus alunos que favoreça um aprendizado com mais significado no que diz respeito aos conteúdos geométricos e suas justificativas matemáticas.

Assim, os participantes trabalharão, inicialmente, em trios de forma a trocarem informações e em seguida poderão socializar a solução encontrada. Eles serão convidados a resolverem as situações geométricas apresentadas por meio de materiais de desenho geométrico (régua, compasso, lápis, borracha, papel ofício, ...) que serão disponibilizados durante o minicurso. Ainda nesse primeiro momento circularemos entre os grupos dando todo o auxílio necessário para que os participantes sintam-se encorajados a concluir a atividade, ao final o formador (ministrante do minicurso) ficará responsável por gerenciar a sistematização, destacamos que todas as justificativas matemáticas do processo de construção de polígonos regulares serão contempladas, quer seja de forma exata ou aproximada.

Desenvolveremos as atividades de construções geométricas com foco em algumas funções da demonstração propostas por De Villiers (2001, 2002), com os participantes, objetivando que eles percebam como que essas funções podem contribuir para à (re)construção de significados acerca da demonstração, e nesse sentido que a temática demonstração possa ser retomada na sala de aula de matemática.

Este autor, convencido de que grande parte dos pesquisadores usa como principal função da demonstração a verificação, sugere outras funções da demonstração: explicação, descoberta e sistematização, que abordaremos nesse minicurso. Fizemos esta opção, por acreditarmos que dentre as seis funções apontadas pelo pesquisador – verificação, comunicação, sistematização, explicação, descoberta e desafio intelectual –, essas são as que deverão ser trabalhadas com os alunos do Ensino Fundamental II e/ou Ensino Médio, e o nosso público alvo são professores que ensinam matemática e alunos do curso de licenciatura em matemática.

Para o desenvolvimento do minicurso, encontramos respaldo nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) do Ensino Fundamental que sugerem no bloco Espaço e Forma que o professor de Matemática explore situações em que

ISSN 2178-034X

sejam necessárias algumas *construções geométricas* com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.

Esse documento afirma que uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal, que por sua vez, sustentam a demonstração, sugerindo, que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las.

Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo e no Ensino Médio para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática. Além disso, as orientações curriculares de matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2008) destacam que se necessita agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático, ou seja, deve-se colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático, destacando-se: *os aspectos relativos à formulação de questões; as perguntas sobre a existência de solução; o estabelecimento de hipóteses e conclusões; a apresentação de exemplos e contraexemplos; a generalização de situações, abstração de regularidades, criação de modelos; a argumentação lógico-dedutiva; a resolução de problemas.* Aspectos que, acreditamos, podem ser contemplados com as atividades do minicurso em alguma medida.

Na sequência, segue o conjunto de atividades que será desenvolvido durante o minicurso.

2 Atividades

2.1 Iniciando a conversa

O problema da divisão de uma circunferência em partes iguais se confunde com o da construção de polígonos regulares. Isso porque os pontos que dividem uma circunferência em um número n ($n > 2$) qualquer de partes iguais são sempre vértices de um polígono regular inscrito nela. Convém observar, de início, que se uma circunferência for dividida em n partes iguais, facilmente também será dividida em $2n$ partes, traçando-se sucessivas bissetrizes.

médio pequeno

$\overline{AB}$ um segmento qualquer e C um ponto do seu interior, tal que $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$. Então, o

nto $\overline{AC}$, ou qualquer outro segmento congruente a ele, é chamado **segmento áureo** de $\overline{AB}$.

A C B

grande

2.2 Processos exatos

2.2.1 Polígonos de 4, 8, 16, 32, ... lados

Traçando-se uma reta qualquer pelo centro de uma circunferência, ela fica dividida em duas partes congruentes. Em seguida, por sucessivos traçados de bissetrizes, podemos dividi-la em 4, 8, 16, etc. partes congruentes.

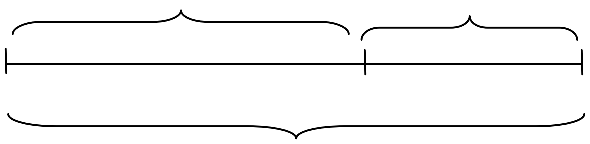
Vamos praticar?

2.2.2 Polígonos de 3, 6, 12, 24, ... lados

Essa família de polígonos é obtida a partir da divisão da circunferência em seis partes congruentes. Traçando bissetrizes ou unindo os pontos de forma conveniente, podemos encontrar os polígonos regulares com 3, 6, 12, 24, etc. lados. Assim, vamos utilizar a propriedade que diz: *o lado do hexágono regular inscrito é congruente ao raio da sua circunferência circunscrita.*

Vamos praticar?

2.2.3 Segmento Áureo



Se $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ então $\overline{AC}$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$.

Para facilitar, podemos escrever:

$$\frac{\text{MÉDIO}}{\text{GRANDE}} = \frac{\text{PEQENO}}{\text{MÉDIO}}$$

2.2.4 Polígonos de 5, 10, 20, 40, ... lados

Vamos construir essa família de polígonos regulares a partir da divisão circunferência em dez partes congruentes. Para isso, precisa que você conheça a propriedade seguinte.

Propriedade: O lado do decágono regular é o segmento áureo do raio da sua circunferência circunscrita.

ISSN 2178-034X

Propriedade: Para uma mesma circunferência, o lado do pentágono regular é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o lado do hexágono regular e o lado do decágono regular.

Vamos praticar?

2.3 Processos aproximados

2.3.1 Polígonos de 15, 30, 60, 120, ... lados

Teoricamente o problema é muito simples, ou seja, pode-se construir o lado pentadecágono regular a partir do lado do decágono regular e do hexágono regular. Contudo, graficamente, devido ao grande número de operações que ele exige, costuma-se chegar a resultados imprecisos. Por essa razão, vamos utilizar um processo aproximado de construção e em seguida, demonstraremos que o erro cometido nessa construção é menor que dois milésimos.

Vamos praticar?

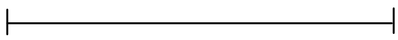
2.3.2 Polígonos de 7, 14, 28, 56, ... lados

Utilizaremos um processo aproximado para a construção do heptágono regular e em seguida, demonstraremos que o erro cometido nessa construção é menor que dois milésimos.

Vamos praticar?

2.4 Construção de polígonos regulares dado o lado

Construa um pentágono regular de lado ℓ dado.



3 Uma breve discussão das atividades

Durante o minicurso discutiremos, por exemplo, o porquê que a medida do lado do hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R tem a mesma medida do raio, ou seja, $l_6 = R$. Outros aspectos como a construção com régua e compasso com números irracionais serão retomados, é o caso do $l_4 = R\sqrt{2}$ e $l_3 = R\sqrt{3}$. Faremos, também, uma discussão matemática da construção geométrica do segmento áureo (a construção geométrica do número de ouro que é o irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), que servirá de apoio para as construções do l_{10} e do l_5, o que encerra a discussão a respeito dos processos exatos.

Além disso, discutiremos alguns processos aproximados para a construção de polígonos regulares, l_7, l_{15} e suas respectivas famílias. Calcularemos o erro cometido, que será da casa dos milésimos, o que poderá garantir uma construção com régua e compasso no lápis papel próxima da exata.

Também, faremos uma discussão da construção de um polígono regular dado o valor do seu lado, uma vez que as construções realizadas até o momento dependiam do raio da circunferência circunscrita. Na verdade, dado o lado construiremos a circunferência e procederemos de forma análoga às construções já realizadas.

Finalmente, faremos uma breve discussão a respeito das funções da demonstração e tentaremos indicar as que foram contempladas durante a realização do minicurso. Acreditamos que um trabalho acerca das construções geométricas, que leve em consideração a discussão matemática do processo de construção pode alavancar um futuro trabalho a respeito das demonstrações em matemática, sobretudo um trabalho que valorize outras funções da demonstração que vai além da verificação de uma evidência.

4 Referências

BRASIL. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática** – 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998, v. 3.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2008.

DE VILLIERS, M. D.. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática,** n. 63, p. 31-36, jun. 2001. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofc.pdf>. Acesso em: 15 set. 2006.

DE VILLIERS, M. D.. Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em Geometria Dinâmica. Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas... (CDROM) Visue: **Associação de Professores de Matemática**, 2002. Disponível em:<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html>. Acesso em: 17 set. 2006.

JESUS, G. B.. **Construções Geométricas:** uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada. 2008. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.