

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS E A REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

*Helena Tavares de Souza*

*Paulo Ferreira do Carmo*

*Maria Rosana Soares*

### Resumo:

O presente artigo tem por objetivo refletir sobre a utilização da resolução de problemas matemáticos como metodologia de ensino da matemática com auxílio da teoria de representação semiótica. A perspectiva dessa reflexão consiste em abordar a resolução de problemas, segundo George Polya, levando-se em consideração as contribuições da teoria dos registros de representação semiótica na formação do pensamento matemático de Raymond Duval. A resolução de problemas é uma metodologia importante para o ensino da Matemática, e as atividades cognitivas do pensamento relacionadas à diversidade dos registros de representação semiótica na Matemática são igualmente essenciais para aprendizagem. Para Duval fazer a diferenciação entre o representante e o representado é ação precípua para o sujeito que aprende. A investigação aqui apresentada é de cunho qualitativo e de delineamento teórico. Essa aproximação de teorias pode contribuir para o processo de ensino e da aprendizagem da Matemática.

**Palavras-chave:** Problemas matemáticos, Resolução de Problemas, Representação semiótica.

### 1. Introdução

O presente estudo faz parte de uma pesquisa de doutorado em andamento, de abordagem qualitativa e de delineamento teórico, sobre a resolução de problemas matemáticos com tratamento de representação semiótica e está inserido no Grupo de pesquisa O Elementar e o Superior em Matemática da IES- SP e é financiado integralmente pela CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A resolução de problemas matemáticos pode ser realizada por vários métodos. Esta investigação tem a pretensão de abordar uma referência que pode trazer contribuição para o ensino da Matemática, qual seja levar em consideração as teorias dos dois autores distintos: utilizando a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e a teoria de resolução de problemas de George Polya.

Dando início ao estudo apresentamos, de forma breve, dados biográficos dos dois pesquisadores:

Raymond Duval pesquisador francês, licenciado em Filosofia e Psicologia, professor emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque*, França. É autor da teoria dos registros de representação semiótica e realizou importantes estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França entre os anos de 1970 a 1995. A primeira apresentação sistematizada de sua teoria aconteceu em sua obra *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* com tradução em língua portuguesa (MACHADO, 2003).

Durante uma década (1970 a 1980), desenvolveu importante pesquisa, em parceria com François Pluvinage, sobre aquisições de conhecimento matemático pelos estudantes, de modo que as principais investigações foram sobre compreensão de textos, a diversidade das formas e das práticas do raciocínio, as dificuldades de compreensão das demonstrações, a interpretação dos gráficos, os problemas que relacionam visualização na Geometria e todas as representações não discursivas de que os gráficos foram usados amplamente para ensinar.

A teoria dos registros de representação semiótica de Duval tem bastante repercussão nas investigações da Educação Matemática no Brasil. No entanto, tais pesquisas na perspectiva de Duval, são poucas que tratam dos aspectos de nosso interesse que é a resolução de problemas e a compreensão de textos por meio da semiótica.

George Polya nasceu em Budapeste, Áustria–Hungria em 13 de dezembro de 1887 e faleceu em Palo Alto, Califórnia - EUA em 7 de setembro de 1985. Foi professor de Matemática de 1914 a 1940 na Suíça e de 1940 a 1953 na Stanford University. Posteriormente, permaneceu como Professor Emérito de Stanford até praticamente a sua morte. Estudou e pesquisou em uma variedade de conteúdos matemáticos, como Teoria dos Números, Análise Matemática, Geometria, Álgebra, Combinatória e Probabilidade (HAROLD; TAYLOR, 1993).

No início de sua carreira, Polya escreveu, juntamente com Gábor Szegő, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas: *Problemas e Teoremas de Análise*. Escreveu outros livros e inúmeros artigos originais, que lhe deram sólida reputação em Análise Clássica, Combinatória e Probabilidades. Nos últimos quarenta anos de sua carreira se interessou pelo ensino da Matemática, dedicando-se ao estudo das questões referentes ao desenvolvimento do

ensino e aprendizagem do conhecimento matemático. A esse respeito escreveu muitos artigos e alguns livros como a notável obra “*How to Solve It*” (traduzido em português como “A arte de Resolver Problemas” – 1944 - 1ª edição em 1945), a qual descreve uma ideia geral da heurística de resolução de problemas matemáticos e não matemáticos (HAROLD; TAYLOR, 1993).

Em continuidade as reflexões sobre os autores, apresentamos as teorias, abordagens e contribuições dos autores quanto à resolução de problemas matemáticos.

## 2. Resolução de Problemas – George Polya

A construção do caminho para se ensinar Matemática por meio da resolução de problemas divide-se em quatro fases:

Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver os diversos itens inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (PÓLYA, 2006, pp.4-5).

A primeira etapa é compreender o problema, ou seja, as primeiras descobertas utilizando os seguintes passos:

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições dadas no problema?
- É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a incógnita? Ou são insuficientes? Ou são redundantes? Ou são contraditórias?
- Adote uma notação adequada para cada figura.
- Separe as condições em partes.

A segunda etapa é construir uma estratégia de resolução, seguindo os passos:

- Encontre conexões entre os dados e a incógnita. Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares, se uma conexão não for achada em tempo razoável.
- Faça um plano ou estratégia de resolução do problema:
- Já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma diferente?
- Conhece um problema semelhante?
- Conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?
- Observe a incógnita. Procure um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante.
- Trabalhe com todos os dados e todas as condições que encontrou no problema.

A terceira etapa é a execução da estratégia de acordo com os seguintes passos:

Frequentemente, essa é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a não passar por essa etapa e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se prejudicando terrivelmente na execução.

- Execute a estratégia.
- Verifique cada passo. Consegue mostrar claramente que cada um deles está correto?

A quarta e última etapa é a revisão, ou seja, examine a solução obtida seguindo os passos:

- Examine a solução obtida.
- Verifique o resultado e o argumento.
- É possível chegar ao resultado por um caminho diferente.

Para Polya, cada uma das etapas descritas acima tem a sua importância. Deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção, acarretará em resoluções sem

compreensões do problema, não existirá uma percepção quanto à conexão principal da incógnita. Muitos enganos acontecerão na execução do plano, caso não seja verificado cada passo e muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se não for reexaminado e reconsiderado a solução completa.

O autor argumenta que é preciso não esquecer a meta que se deseja chegar quanto à solução de tal problema, pensar sempre quais os meios utilizados para esse fim desejado.

### 3. Significado de Semiótica

Santaella (2002) expressa a Semiótica como “a ciência dos signos” e destaca que essa definição pode causar alguns equívocos ao interpretar os signos como signos do zodíaco, quando na verdade representa signo como linguagem, que também não deve ser confundida com a língua. Também é importante destacar o surgimento da Linguística, considerada como ciência da linguagem verbal, diferentemente da Semiótica que é a ciência de toda e qualquer linguagem, em que ambas se desenvolveram no século XX.

A autora afirma que estamos cercados por “uma rede intrincada e plural de linguagem” (p.10) e nos comunicamos por meio de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes, objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, por meio do olhar, do sentir e do apalpar. Desta forma, ao definir a Semiótica como Ciência Geral de todas as linguagens, o que se pretende é definir a semiótica como a “ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido” (Ibid., p.13).

Para Duval (2011) foi somente a partir do final do século XIX que surgiram de forma independente, os modelos de análise dos signos por meio de sua diversidade e da sua função na atividade científica e na comunicação.

### 4. Representação Semiótica - Raymond Duval

Raymond Duval (2009, p.29) afirma que a noção de representação é apresentada desde Descartes e Kant, no que se refere à constituição de um conhecimento, pois “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação”.

O autor ainda descreve que a noção de representação pode ser compreendida em três momentos: a primeira como representação mental, fundamentada nos estudos de Piaget. A segunda como representação interna ou computacional, a qual está relacionada a uma codificação da informação. E a terceira como representação semiótica que se desenvolve no quadro dos trabalhos sobre aquisição de conhecimentos matemáticos e sobre os problemas consideráveis que sua aprendizagem origina” (DUVAL, 2009, p. 3).

De acordo com o autor as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais apresentam algumas dificuldades próprias de significado e de funcionamento dependendo do sistema semiótico a ser usado. Essas representações semióticas não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. Ou seja, sem as representações semióticas não pode ocorrer à construção do conhecimento pelo sujeito que aprende (Ibid., 1995).

Em outras citações Duval (2003, 2004) descreve que as representações semióticas presentes na Matemática não permitem apenas um determinado tipo de tratamento, pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente observáveis (visto que eles não têm existência física e sua apreensão só é possível por meio de registros de representação) e, também por existir uma grande variedade de representações semióticas possíveis para serem utilizadas: linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráfico cartesiano, figuras de um objeto matemático - a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas - *forma* (o representante) e *conteúdo* (o representado).

Duval (2009) ainda afirma que os registros de representação semiótica constituem uma forma de explorar uma informação ou simplesmente comunicá-la ao interlocutor.

Existem quatro tipos diferentes de registros que podem ser sintetizados de acordo com o quadro I.

Quadro I: Diferentes registros mobilizados no funcionamento do pensamento matemático

	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA</b>
<b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS</b>	Língua natural Associações verbais (conceituais)	Figuras geométricas planas ou em perspectivas
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS</b>	Sistemas de escrita: numéricas (binária, fracional, fracionária...), algébricas, simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos

Fonte: Duval, 2003

A teoria de Duval (2003, 2009) possibilita a reflexão de que uma tarefa matemática proposta pode facilitar a compreensão quando apresentada no registro figural, mais pode oferecer dificuldades se expressa por meio de registro em língua natural ou mesmo simbólico, pois as funções cognitivas a serem mobilizadas são diferentes em cada tipo de registro. O autor considera que a passagem do enunciado de um problema, em língua natural, a uma representação em outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos.

## 5. Considerações Parciais

Grandes matemáticos e filósofos, como Pappus, Descartes, Leibnitz, Bolzano e outros, pesquisaram sobre o racocínio heurístico - a relação de “como pensar” para a resolução de problemas por meio do raciocínio heurístico, com o objetivo de estudar os métodos e regras da descoberta e da invenção.

As etapas da resolução de problemas podem ser aplicadas a qualquer problema de ordem aritmética, algébrica, geométrica ou até mesmo a um simples enigma. Tem um problema qualquer? Procura o valor de uma incógnita e pensa em maneiras conhecidas para encontrá-lo? Então, essa teoria pode ser aplicada.

Da mesma forma a teoria dos registros de representação semiótica também pode ser aplicada nos mesmos problemas de ordem aritmética, algébrica ou geométrica, pois é considerada importante na mobilização de diferentes registros de representação, para compreensão de um objeto de conhecimento matemático. Esse aspecto é relevante na Matemática, por seus objetos não estão diretamente acessíveis à percepção. A particularidade dessa teoria também reside no fato de ser considerada como representações semióticas, uma situação que apresente uma ideia mais abrangente, como as frases em linguagem natural ou as equações e não simplesmente um traço ou um símbolo isolado, como as letras, as palavras ou os algarismos.

A matemática trabalha com o processo implícito e explícito e essas comunicações se estabelecem por meio de representações escritas, simbólicas, notações que representam objetos, conteúdos ou conceitos. Não há conhecimento matemático mobilizado por alguém sem o auxílio de uma representação.

A natureza do trabalho matemático além de ser uma questão cognitiva também é metodológica. Na resolução de um dado problema partimos de sua solução para explicar os diferentes conhecimentos que permitem resolvê-lo. Do ponto de vista cognitivo analisamos os processos que permitem reconhecer os conhecimentos matemáticos a serem empregados no quadro do problema. Para um problema cognitivo e metodológico a maneira matemática de trabalhar, isto é, os gestos intelectuais que a constituem são descritos e analisados em termos de transformações de representações semióticas. As transformações semióticas estão no centro dos processos cognitivos do pensamento matemático.

Esse estudo indica a possibilidade de aliar essas duas teorias para ampliar o conhecimento sobre o pensar e o fazer matemática diante dos desafios no ensino e aprendizagem da Matemática por meio de resolução de problemas matemáticos. Pelas análises iniciais nas duas abordagens teóricas existem indicações de que a articulação dessas teorias poderá trazer contribuições relevantes aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, seja no Ensino Básico ou Superior ou mesmo a qualquer pessoa que esteja estudando Matemática ou outra ciência.



## 6. Referências

DUVAL, R. *Semiosis et pensee humaine – registres semiotiques et apprentissagens intellectuels*. New York, Paris, Wien: Peter Lang S.A., 1995.

\_\_\_\_\_. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2003.

\_\_\_\_\_. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

\_\_\_\_\_. *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)*. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

HAROLD D. TAYLOR, L. T. *George Pólya: master of discovery*. New York: Dale Seymour Publications, 1993.

MACHADO, S. D. A. (Org). *Aprendizagem em Matemática*. Campinas: Papirus, 2003.

PÓLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica*. São Paulo: Brasiliense, 2002.