

EXPLORANDO OS PRÍNCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO POR MEIO DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Francisca Brum Tolio
Centro Universitário Franciscano
francisca.tolio@iffarroupilha.edu.br

Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano
eleni@unifra.br

Resumo:

Este relato de experiência faz parte dos resultados parciais de uma pesquisa realizada num curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática tendo como propósito investigar as contribuições que a Metodologia da Resolução de Problemas e a utilização de jogos e materiais manipuláveis podem propiciar para o ensino e aprendizagem do Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo para alunos de uma turma da 3ª série do Ensino Médio. Nesta pesquisa aplicou-se cinco sequências de atividades tendo como propósito explorar os Princípios Aditivo e Multiplicativo. Para tanto, neste trabalho será apresentada uma das atividades desenvolvida com os alunos, em forma de relato de experiência. E a partir desta, pode-se inferir, os resultados obtidos, que os alunos foram capazes de construir os conceitos relacionados aos conteúdos abordados de tal forma a diferenciar os princípios estudados e, em algumas situações, conseguiram aplicá-los corretamente.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Princípio Aditivo e Multiplicativo; Materiais Manipuláveis.

1. Introdução

A Matemática muitas vezes, vista pelos alunos, como uma disciplina difícil, pois em alguns momentos se faz necessário a compreensão de conceitos matemáticos mais abstratos, ou seja, não oferecendo aplicações no cotidiano. Dessa forma trabalhar essa disciplina, torna-se um desafio para nós professores, que devemos planejar aulas interessantes, motivadoras e mostrar a utilidade dos conteúdos matemáticos aos nossos alunos.

Muitas vezes, no Ensino Médio, é comum observarmos um ensino meramente técnico, estanque, sem interação com a realidade do aluno, ou ainda, sem a interação com as demais disciplinas. Esse modo de ensinar torna as aulas desagradáveis, pois os discentes não veem a empregabilidade dos conceitos matemáticos, apreendendo somente fórmulas e processos mecânicos de resolução de exercícios, dificultando a interpretação e a interação.

A Análise Combinatória é um conteúdo presente em nosso cotidiano, pois a cada escolha que devemos realizar, empregamos o Princípio Aditivo ou o Princípio Multiplicativo. Hoje em

dia, esse conteúdo tem sido ministrado com base no livro didático, como material de apoio, ou seja, na maioria das vezes, os professores acabam utilizando somente esse recurso didático, o que nem sempre desperta o interesse do aluno. Outros recursos podem motivá-los, por exemplo, o uso de materiais manipuláveis e jogos que envolvam o raciocínio lógico. Essas estratégias podem tornar o conteúdo mais compreensível e agradável aos olhos dos estudantes.

Neste relato, destacamos o desenvolvimento de uma atividade que aborda os Princípios Aditivo e Multiplicativo. Para seu desenvolvimento em sala de aula, utilizou-se um jogo de dados, fornecendo dois dados aos alunos e uma sequência de jogadas. Dessa forma utilizou-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Destacando que esta metodologia entende o jogo como um problema, onde jogar é resolver problemas e as regras do jogo são as condições do problema.

2. Aportes Teóricos

Os primeiros estudos que referenciaram a Análise Combinatória foram encontrados nos livros de História da Matemática de forma esparsa. Percebemos que, ao longo da história, a Análise Combinatória se estruturou através do estudo das probabilidades. De acordo com Morgado et al. (1991, p.6), “*Em verdade, o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades*”.

Na Educação Básica, os problemas de contagem são apresentados como Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações. Porém neste trabalho, apresentamos dois desses elementos, O Princípio Aditivo, conhecido como técnicas de somar, ou contar, e o Princípio Fundamental da Contagem, também denominado Princípio Multiplicativo.

Os materiais utilizados neste trabalho, como aliados à metodologia de ensino, na visão de facilitadores para compreensão dos conceitos, foram os materiais manipuláveis e o jogo de dados. No ensino de Matemática que vivenciamos hoje, esses materiais são bastante utilizados, com o objetivo de auxiliar o aluno na compreensão dos conteúdos, tornando as aulas mais atrativas e diversificadas.

Para Reys (1971, apud MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 193), materiais manipuláveis ou materiais concretos, são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia a dia, ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”.

Também os jogos são estratégias eficazes para o ensino de Matemática. Segundo De Marco (2004), não é o jogo que ensina Matemática, mas esse, quando intencionalmente definido, pode promover um contexto estimulador e desafiante para o pensamento, sendo um auxiliador didático na construção dos conceitos matemáticos.

Acredita-se que a utilização dos jogos favorece um ambiente adequado para a resolução de problemas, uma vez que eles podem proporcionar momentos de interação e investigação matemática.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.47),

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam simulações vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações, possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Desse modo, o uso de jogos, como auxiliares na construção do conhecimento, pode ser visto como um processo cultural, inserido na realidade do aluno. Independente de idade, exercer as atividades lúdicas representa uma necessidade para as pessoas e propicia o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A metodologia de “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”, consiste no caminho de ensinar Matemática por intermédio da Resolução de Problemas e não apenas para ensinar a resolver problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Como pioneiro em descrever um método de resolução de problemas, George Polya coloca que resolver problemas é uma habilidade prática. Polya (2006), aponta que “... o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve colocar em suas mentes algum interesse por problemas, e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar” (POLYA, 2006 p.1).

De acordo ainda com o mesmo autor, a ideia de resolver problemas, consiste em: “... encontrar um caminho previamente não conhecido, encontrar uma saída para uma situação difícil, para vencer um obstáculo, para alcançar um objetivo desejado que não pode ser imediatamente alcançado por meios adequados” (POLYA 2006 p.5).

Polya sugere quatro etapas a serem desenvolvidas para a resolução de problemas, são elas: compreender o problema; estabelecer um plano para a resolução do problema; executar o plano e o retrospecto para examinar a solução encontrada.

As autoras Allevato e Onuchic não deixam dúvida de que ensinar através da resolução de problemas não é uma tarefa fácil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia,

considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. Para tanto, ainda há razões de se fazer esforços ao utilizar essa metodologia de ensino-aprendizagem.

- A Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre “dar sentido”. Ao resolver problemas, os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ ou ligadas ao problema.
- A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos, através de seu próprio raciocínio, vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012 p.243-244)

De modo ao auxiliar o professor a desenvolver a Metodologia de Resolução de Problemas, Allevato e Onuchic (2009) apresentam nove etapas para organizar as atividades da metodologia de Resolução de Problemas:

- Preparação do problema;
- Leitura individual;
- Leitura em conjunto;
- Resolução do problema;
- Observação e incentivo;
- Registro das resoluções na lousa;
- Plenária;
- Busca do consenso;
- Formalização do conteúdo. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2009 p.7-8)

A opção pelo uso dessa metodologia desafia os professores e de maneira a transformá-los em mediadores do conhecimento, e não mais somente transmissores do mesmo.

Ao assumir a postura de professor mediador e não mais somente transmissor desse do conhecimento, acredita-se estar oportunizando ao aluno o papel de construtor do seu conhecimento.

3. Implementando a Metodologia de Resolução de Problemas

Para a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas sugerida pelas autoras Allevato e Onuchic (2012), utilizou-se uma adaptação aos passos sugeridos por elas, conforme:

- Leitura Individual e em conjunto: nessa etapa os alunos, já em seus grupos, receberam uma folha com a atividade prevista, bem como os dados para realização do jogo previsto na atividade. Inicialmente, cada grupo realizou sua leitura, e posteriormente, foi realizada uma leitura em conjunto.
- Resolução do Problema: os grupos de alunos realizam um trabalho cooperativo e colaborativo, tentando resolver os problemas. As ideias foram discutidas entre seus pares e a

professora, que por sua vez realizou perguntas até que os alunos pudessem estabelecer conexões utilizando o resultado do jogo.

- Estratégias de resolução: perante o problema, os alunos construíram estratégias de resolução, anotando todas as possíveis informações já adquiridas durante as leituras e no decorrer da resolução da atividade, utilizando os dados para encontrar soluções.

- Observação e Incentivo: durante essa etapa, a professora não teve mais o papel de transmissora do conhecimento, mas sim de incentivadora. Foram feitas as anotações no Diário de Campo, registrando a maneira como os alunos tentavam resolver os problemas, suas dúvidas e seus comentários. A professora os ajudou, incentivando os alunos a resolverem as situações-problema e desafiando-os quanto as resoluções.

- Registro das atividades no quadro: nessa etapa, os alunos foram convidados a registrar, no quadro, suas resoluções, independentemente de estarem certas ou erradas. Dessa forma os diferentes processos de resolução foram apresentados para que todos os alunos os analisassem e discutissem com o intuito de chegar a um consenso.

- Plenária: com as resoluções no quadro, abriu-se uma plenária, ou seja, uma discussão sobre os métodos de resolução feitos pelos colegas, sanando dúvidas que ficaram durante o processo de resolução. A professora, nessa etapa, se comportou como mediadora das discussões, e em alguns momentos, realizando perguntas que levassem os alunos a chegar à resolução correta.

- Busca do consenso: após sanar as dúvidas e analisar as resoluções e soluções obtidas para a atividade a professora e os estudantes chegaram a um consenso sobre o resultado correto e mais adequado para a situação-problema em questão.

- Formalização do conteúdo: nessa etapa, a professora, formalizou os conceitos de Princípio Aditivo e Multiplicativo, organizando a estrutura em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução dos problemas.

4. Metodologia

O presente relato desenvolveu-se no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia Farroupilha – Câmpus Alegrete, em uma turma de 3º ano do Ensino Médio Técnico em Agropecuária, e contou com a presença efetiva de 28 alunos. Que primeiramente foram divididos em grupos de três alunos, sendo que um desses grupos permaneceu com quatro integrantes.

Para a realização da atividade contou-se com três horas aulas, sendo duas juntas e a terceira posteriormente, porém todas em um mesmo dia.

Após os alunos se disponibilizarem em seus grupos, forneceu-se a eles, uma folha contendo a atividade, seguidamente, realizou-se a leitura em conjunto e pediu-se que os alunos realizassem a leitura individual. A atividade referiu-se a um jogo de dados, portanto os alunos também receberam dois dados, para que pudessem utilizá-los como auxiliares durante a resolução dos problemas que envolviam as possíveis jogadas.

Durante a resolução da atividade, os alunos puderam conversar, discutir e em conjunto, estabelecendo estratégias de resolução. Muitas vezes solicitavam a ajuda da professora, que por sua vez os incentivava e os respondia com outras perguntas, que fossem pertinentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

No terceiro período de aula, os alunos expuseram suas respostas no quadro, todos os grupos, e então propôs-se a eles uma observação de qual seria a melhor maneira de encontrar a solução para o problema em questão. De forma geral, realizando uma discussão entre discentes e docente, chegou-se a uma conclusão a respeito de cada problema. Assim realizou-se a plenária, uma de cada vez, ou seja, uma para cada problema.

Ao finalizar as plenárias para todas as situações-problema, na busca de um consenso sobre a melhor maneira de resolução. Assim, formulou-se o conceito sobre Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo.

5. Análise e discussões da atividade

A atividade desenvolvida pelos alunos foi a seguinte:

No jogo de dados, são observadas as faces viradas para cima, resultantes do movimento de jogar os dados. Durante um jogo de dados, eles são jogados individualmente, ou seja, um de cada vez.



Utilizando essas informações, responda aos questionamentos abaixo:

- Quantos pares de números podem ser formados ao jogar esses dados?*
- Quantos pares de números serão possíveis de formar de modo que, no primeiro lançamento, o número obtido seja primo?*

- c) Quantos pares de números serão formados de maneira que, no primeiro dado, o resultado seja um número par e, no segundo, um número múltiplo de três?
- d) Quantos pares de números podem-se formar de modo que, no primeiro dado lançado, o número seja menor do que aquele obtido no segundo dado lançado?

Para a **questão a** esperava-se que os estudantes formassem todos os possíveis pares de números utilizando os dois dados, para encontrar o total de pares, ou ainda que pudessem usufruir do raciocínio combinatório desenvolvendo o Princípio Multiplicativo que solucionaria a questão.

Ao analisarmos as resoluções verificamos que, nas respostas a essa pergunta, os alunos tentaram descrever o raciocínio usado para resolução, conforme mostrado na Figura 1, a seguir.

a) Temos dois dados de seis lados, sendo isso podemos fazer seis pares de um dado (1º dado) com os outros seis lados do outro dado (2º dado). Repetindo isso com os outros lados do 1º dado poderemos fazer mais 36 pares ao total com os dois dados.

Figura 1: Resposta apresentada por um dos grupos.

Somente um dos grupos duplicou a resposta, pois durante as explicações os alunos desse grupo, consideraram que havia os pares que se repetiam. Como não descreveram todos os pares, não observaram que esses pares já estavam inclusos no Princípio da Multiplicação.

Para a **questão b** a pergunta já estabelecia um conhecimento quanto aos números primos. Os alunos deveriam identificar quais eram os números primos presentes no primeiro dado a ser lançado.

Durante a resolução desta atividade, verificou-se que alguns grupos tiveram dúvidas para identificar quais seriam os números primos e, de modo geral, os grupos descreveram as combinações possíveis. Na Figura 2, a seguir, é mostrada a resposta de um dos grupos que considerou o número 1 como sendo um número primo.

b) Os números primos presentes no dado são 1, 2, 3 e 5, fizemos o número de lados do dado (6 lados) \times (vezes) 4 (números primos)

$6 \times 4 = 24 \rightarrow$ Pares
 ↓
 Lados \rightarrow n.º Primos

1-1	2-1	3-1	5-1
1-2	2-2	3-2	5-2
1-3	2-3	3-3	5-3
1-4	2-4	3-4	5-4
1-5	2-5	3-5	5-5
1-6	2-6	3-6	5-6

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \\ 1-4 \\ 1-5 \\ 1-6 \end{matrix}} \right\} 24 \text{ Pares}$

Figura 2: Resolução apresentada pelo grupo que considerou o número 1 primo.

Um dos grupos conseguiu identificar quais os possíveis pares, porém, não conseguiu estabelecer a relação com o princípio Multiplicativo, como mostrado na Figura 3, a seguir:

b) Há 3 possibilidades para cair número primo sendo (2,3,5), e o outro dado tem 6 possibilidades

Figura 3: Resolução apresentada pelo grupo que identificou os números primos.

Dois grupos conseguiram identificar corretamente os números primos e estabelecer o pensamento combinatório, elaborando suas respostas utilizando o Princípio Multiplicativo. Na Figura 4 é mostrada essa resposta.

Os únicos números primos contidos nos dados são: 2, 3 e 5. Cada número primo que sair no primeiro lançamento terá a possibilidade de 6 combinações. Logo $3 \times 6 = 18$ combinações.

Figura 4: Resolução apresentada por um dos grupos.

Para a resolução da **questão c** os alunos deveriam utilizar somente os números pares contidos no primeiro dado, bem como somente os números múltiplos de 3 contidos no segundo dado.

Para esta alternativa um dos grupos descreveu que “são três chances de cair o primeiro número par e o segundo número múltiplo de três, porque só tem três números pares e três números múltiplo de três”. De acordo com esta resposta outro grupo formulou sua solução utilizando o mesmo princípio. Ressaltando que os dois grupo diagnosticaram quais seriam os números pares e os números múltiplos de três.

Ao analisar as respostas apresentadas por esses dois grupos, observamos que eles consideraram os múltiplos de três “3 e 6”, e os números pares, 2, 4 e 6 e descreveram as possíveis combinações como mostrado na Figura 5.

c) Múltiplos de 3 presentes no dado: 3 e 6
Números Pares presentes no dado: 2, 4 e 6

1º dado nº par	2º dado múltiplo de 3
2	3
2	6
4	3
4	6
6	3
6	6
TOTAL = 6 pares	

Figura 5: Resultado apresentado por dois grupos.

Quatro dos nove grupos conseguiram identificar os números pares e os múltiplos de três e utilizaram do Princípio Multiplicativo chegando ao resultado correto do número de pares formados com essas características.

Para a resolução da **questão d** os alunos deveriam encontrar os possíveis pares de modo que no primeiro dado o número fosse menor do que no segundo dado.

Uma estratégia para resolução poderia fixar um dos números e ir posicionando os possíveis pares que poderiam ser feitos com este, e assim sucessivamente. Esperava-se que os alunos aplicassem o Princípio Aditivo, somando os pares encontrados para cada possibilidade de números.

Um dos grupos conseguiu encontrar os pares possíveis para que o número obtido no primeiro lançamento fosse menor que o obtido no segundo lançamento, porém utilizaram o seguinte par, (0, 6), não percebendo no momento que o dado não possui face com o número zero. Porém quando foram escrever sua resposta na lousa, puderam perceber o equívoco acontecido durante a resolução. Mesmo encontrando os possíveis pares, os alunos pertencentes a este grupo, não realizaram a soma e, portanto, concluiu-se que não compreenderam o Princípio Aditivo.

Ao analisar as respostas apresentadas por cinco grupos observou-se que os alunos montaram estratégias para encontrar os pares cujo número, obtido no primeiro lançamento fosse menor que o obtido no segundo lançamento. Nas Figuras 6 e 7, a seguir, são mostradas as possibilidades descritas por dois desses trios.

d)

6	→	5, 4, 3, 2, 1
5	→	4, 3, 2, 1
4	→	3, 2, 1
3	→	2, 1
2	→	1

15 pares

Figura 6: Resolução apresentada por um dos grupos.

d) O primeiro dado menor do que o segundo:

1º dado	2º dado
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
2	3
2	4
2	5
2	6
3	4
3	5
3	6
4	5
4	6
5	6

TOTAL 15 pares

Figura 7: Resolução apresentada por um dos grupos.

Durante esta atividade os alunos puderam se familiarizar com uma forma diferente da tradicional de aprender, ou seja, utilizando materiais manipuláveis para compreender e aprender Matemática.

Em nenhum momento durante a exposição na lousa e a plenária os alunos demonstraram vergonha, ou timidez ao comentar a questão, todos participaram.

Nesta etapa de consenso e formalização do conceito, verificou-se que os alunos ainda mantinham dúvidas quanto ao conteúdo estudado. A professora retomou o conteúdo e deu oportunidade para os alunos se manifestarem, dessa forma chegando a um consenso comum por meio de novas perguntas. Portanto chegando a formalização do conteúdo.

6. Considerações Finais

Nesta pesquisa propôs-se a aceitar o desafio de trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas para tornar as aulas de Matemática mais prazerosas e motivadoras ao desenvolver o conteúdo de Análise Combinatória de modo mais significativo e lúdico. Observou-se que a utilização do jogo de dados foi uma estratégia que facilitou a compreensão e interpretação das questões.

No decorrer da realização das atividades observou-se que os grupos apresentaram algumas dificuldades em trabalhar seguindo os passos dessa metodologia, porém quando conseguiram se adequar a ela, desenvolveram as habilidades cognitivas e compreenderam a utilização dos princípios estudados.

Onuchic enfatiza que:

O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação e linguagem formal. O foco está na ação por parte do aluno. (ONUCHIC, 1999, p.207).

A metodologia de ensino utilizada neste trabalho contribuiu para tornar as aulas mais interessantes, dinâmicas e significativas para os alunos, que puderam explorar e desenvolver um raciocínio combinatório.

A partir das declarações apresentadas pelos alunos, concluiu-se que a metodologia de Resolução de Problemas, aliada a utilização do jogo de dados, foi de suma importância para a aprendizagem do conteúdo desenvolvido, pois conseguiram compreender o significado dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.

7. Referências

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. Educação Matemática em Revista - RS, v.10, n.1, p. 95-103, 2009.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, B. C. de (org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2012. p. 232 – 252

BRASIL, Ministério da Educação – Secretária de Educação Fundamental – PCN **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DE MARCO, Fabiana Fiorezi. **Estudos dos Processos de Resolução de Problemas Mediante a Construção de Jogos computacionais de Matemática no Ensino Fundamental**. SP: [s.n], 2004. Dissertação de Mestrado (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. Didática da Matemática. Universidade Aberta: Lisboa, 1996.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ONUCHIC, L. Ensino Aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectiva**. São Paulo: Ed. UNESP, 1999. p. 199-218.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro, Interciência. 2006.