POSSIBILIDADES DE DESIGNAÇÃO DE RELAÇÕES ALGÉBRICAS

Carine Scheifer
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG
carine.scheifer@gmail.com

Fátima Aparecida Queiroz Dionizio
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG
faqdionizio@hotmail.com

Célia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG
brandt@bighost.com.br

Tânia Stella Bassoi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
taniastella@ibest.com.br

Resumo:
O objetivo da pesquisa apresentada neste artigo é explicitar as diferentes maneiras de designar relações algébricas pelos alunos, por meio de registros de representação discursivos. Uma questão de designação de equação foi selecionada do instrumento de coleta de dados, aplicado para 115 alunos de oitavo ano de quatro escolas estaduais diferentes, para ser analisada. A capacidade dos alunos de colocar em equação é, segundo Duval, uma etapa fundamental a ser contemplada no ensino da álgebra. As representações discursivas dos alunos foram organizadas em três categorias: linguagem natural, relações aritméticas e relações algébricas. As análises foram feitas de forma descritiva e analítica, apontando no decorrer do texto os resultados e as proposições para o ensino da álgebra. Os dados nos remetem à importância de se trabalhar com diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático, visto que estes não são diretamente acessíveis à percepção.

Palavras-chave: Equação; Registros de representações semióticas; Operação de designação.

1. Introdução

Os integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPAM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Ponta Grossa, têm se proposto, entre outros, ao estudo da Teoria das Representações Semióticas segundo Raymond Duval e se dedicado a pesquisar as contribuições da teoria segundo Duval (2009) para o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Este texto apresenta uma parte da pesquisa que vem sendo realizada pelo GEPAM. Durante as reuniões de estudo do grupo, tendo como suporte a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, foi desenvolvido um instrumento de coleta de dados, visando à identificação da utilização de conceitos algébricos na resolução das questões propostas aos alunos. Esse instrumento continha quatorze questões e, uma delas, será submetida á análise nesse artigo. Os dados empíricos coletados, por meio deste instrumento, são compostos por respostas de 115 alunos de oitavo ano de quatro escolas estaduais diferentes. Três destas turmas são do ensino regular do município de Ponta Grossa/PR, uma no município de Cascavel/PR e uma turma de Educação de Jovens e Adultos (EJA) - Ensino Médio do município de Ponta Grossa. Visando preservar a identidade dos respondentes, cada turma foi marcada por uma letra (A, B, C, D e E) e cada aluno da turma foi designado por um número (A1, A2, ..., B1, B2, ..., C1, C2, ..., D1, D2, ..., etc).

Estes dados foram categorizados de acordo com as formas de registro de representação utilizada pelos alunos nas suas resoluções. As análises das respostas dadas serão realizadas com os subsídios teóricos dos estudos de Duval (2004) a respeito das funções discursivas e das operações cognitivas a elas associadas. O item que será analisado neste artigo tem como objetivo refletir sobre a seguinte questão: Quais as diferentes maneiras de designar relações algébricas (que envolvem números, letras e operações matemáticas) pelos alunos do oitavo ano do ensino fundamental, por meio de registros de representação discursivos (língua natural, linguagem numérica ou linguagem algébrica)?

Para isso o texto foi organizado de modo a intercalar aspectos da teoria de Raymond Duval relacionados às funções discursivas, e as análises das respostas dos alunos à questão proposta, que pertencem a sistemas semióticos discursivos (língua natural, linguagem numérica e linguagem algébrica). Essas análises serão ao mesmo tempo descritivas e analíticas e, por essa razão, já apontarão resultados encontrados e proposições para o ensino da álgebra.

2. Contribuições da teoria dos Registros de Representação Semiótica: as funções discursivas para a designação de relações algébricas

De acordo com Duval (2004, p.89), a organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que cumpre e das operações discursivas realizadas. Isso porque “esse discurso sofre a influência dessas funções e da predominância dada a uma ou outra e da seleção de algumas operações específicas a elas”. A análise de um discurso não pode ser realizada apenas sobre suas formas linguísticas de expressão.

O autor afirma que um sistema semiótico é considerado como uma língua, quando permite cumprir todas as funções discursivas, as quais são compreendidas por: designar

ISSN 2178-034X

objetos; dizer alguma coisa sobre os objetos que designa, sobre a forma de uma proposição enunciada; vincular a proposição enunciada com outras em um todo coerente (descrição, inferência,...) e; assinalar o valor, o modo ou o status combinado para uma expressão por parte de quem a anuncia. A estas funções Duval (2004) denomina de *referencial* ou de *designação*, quando designa objetos; *apofântica*, quando são expressos enunciados completos; de *expansão discursiva*, quando há a articulação de enunciados completos em uma unidade coerente; de *reflexividade discursiva*, quando há transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo.

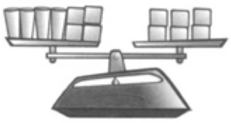
Em cada uma dessas funções discursivas, diferentes operações discursivas podem ocorrer. No caso da função referencial, estão presentes quatro operações possíveis: a) designação pura que consiste na identificação de um objeto; b) categorização simples que identifica um objeto por uma de suas características; c) determinação que torna preciso o campo de aplicação da operação de categorização e; d) descrição que consiste em identificar um objeto pelo cruzamento de diversas operações de categorização. No caso da função apofântica estão presentes as operações de predicação e ato ilocutório, e na função de expansão discursiva as operações de descrição, narração, explicação e raciocinamento.

As considerações de Duval (2011) em relação à álgebra possibilitam compreender que existem sistemas, estruturas ou capacidades necessárias para serem mobilizadas de modo a permitir ter acesso aos objetos, diretamente ou por uma sequência de processos conscientes ou não conscientes. E também refletir a respeito de outro caminho, inverso ao tradicional (do ponto de vista matemático) que significa entender a capacidade dos alunos conhecerem letras (seja elas em fórmulas, ou para designação de objetos) presentes em estruturas necessárias para compreender, posteriormente, igualdades e desigualdades. Para Duval (2011) a primeira etapa a ser contemplado no ensino da álgebra é verificar a capacidade de colocar em equação. Se essa capacidade não for desenvolvida, o processo de ensino não estará assentado em bases sólidas capazes de garantir o aprendizado da álgebra. No entanto, quando elas são utilizadas para designação de padrões de regularidades observáveis, sua utilização é natural e espontânea.

Considerando estas especificidades do ensino de álgebra, a questão elaborada teve por objetivo contemplar a ideia de Duval (2011), segundo a qual: “não são as letras que são importantes, mas as operações discursivas de designação dos objetos feita por meio da língua natural ou formal”. Na referida questão também é contemplada outra ideia, proposta por Duval (2011), em que ele considera que “para a resolução de equações não são as letras que contam, mas a *ocorrência das letras*”. Essa questão pode ser observada no Quadro 1.

Quadro 1 – Atividade relacionada a algumas ideias de Duval (2011) importantes para a aprendizagem da álgebra

Questão 2 – Na balança a seguir há copos e pesos. Esta balança só ficou equilibrada quando foi colocado o sexto peso no prato direito. Sabendo que cada peso tem massa igual a 40 gramas, responda:
Qual é a sentença matemática mais adequada para representar o equilíbrio da balança?



Fonte: as autoras

Durante o desenvolvimento dessa atividade os alunos foram instruídos a resolver de forma autônoma, individual e com seus registros próprios. A quantidade de respostas diferentes para este item permite refletir quão variada é a capacidade de compreensão dos alunos sobre determinado conteúdo, e muito mais variada é a forma como expressam esse entendimento por meio de suas representações.

A representação de um mesmo objeto algébrico pode se dar por meio de diferentes registros de representação, sem perder a referência (DUVAL, 2004). Um aluno pode expressar-se por meio de palavras, esquemas, relações aritméticas, algébricas, gráficos, etc. Esta característica do objeto algébrico é extremamente relevante em nossa análise, pois permite definir três categorias conforme o sistema semiótico utilizado pelo aluno: linguagem natural, linguagem numérica e linguagem algébrica.

Entre os 115 alunos que participaram desta pesquisa, 39 responderam esta questão utilizando a linguagem natural. Dentre estes, somente 4 respondem de forma coerente com o que é solicitado no enunciado, ou seja, expressaram através de suas palavras a sentença matemática que indica o equilíbrio da balança considerando os itens contidos nos pratos. Os demais alunos incluídos nesta categoria deixam a desejar em suas respostas. Alguns confundem sentença matemática com a operação matemática que foi utilizada. Outros ainda respondem de forma incompreensível, como se pode observar no Quadro 2.

Quadro 2 – Respostas apresentadas em Língua Natural

LINGUAGEM NATURAL		
ALUNO	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIOS**
B6	Se a balança está equilibrada, de um lado 6 pesos e do outro 4 pesos e 2 copos, então cada copo tem a metade da massa de um peso.	Os sujeitos expressam corretamente todas as relações existentes por meio da língua natural. Partem de uma premissa, fazem uma inferência e chegam a uma conclusão.
C20	A balança está no meio com o prato esquerdo com 4 copos de 20 gramas e 4 cubos de 40 gramas. E no prato direito há 6 cubos de 40 gramas cada um.	

ISSN 2178-034X

	Os copos equilibram porque dois copos são o mesmo do cubo de 40 gramas.	
D2, D3	4 copos de 20 g 4 barras de 40g e 6 barras de 40 g formam o mesmo peso.	
C2	Os copos seriam de 50 gramas e os cubos do mesmo prato seria 1kg que daria o mesmo peso.	O sujeito atribui massa diferente aos objetos, ignorando os dados apresentados no enunciado.
B15, B10, C12, C13, C27, D13, S12	Divisão	Os alunos utilizam a língua natural para se referir às operações matemáticas que foram utilizadas para encontrar o valor da massa dos corpos. Neste caso a sentença matemática solicitada foi associada à operação matemática utilizada.
B16	Dividir os pesos	
S11, S22	Fração	
B3	Equação, Adição e Subtração	
B1	Somando	
B7	Subtrair	
C25, C26	Equação	
Os demais alunos deram respostas incompreensíveis.		

Fonte: As autoras

A língua natural é utilizada para designação das relações existentes entre a massa dos corpos dos dois lados da balança. Nessa ação entra em cena a função apofântica e o ato ilocutório (o aluno falando ao seu professor que interpreta) e de predicação (frase com sentido, utilizando sujeito, predicado e verbo). A função de expansão discursiva também entra em cena visto que os alunos descrevem o que vêem e, ao mesmo tempo, explicam o raciocínio utilizado para estabelecer a relação entre as massas dos copos e dos pesos. A linguagem natural é o registro de partida de boa parte das repostas dos alunos. Porém, mesmo em linguagem natural, muitos não tiveram êxito para explicar o equilíbrio da balança, o que evidencia a dificuldade desses alunos em relação ao que foi solicitado na atividade. Por essa razão alguns associam a sentença matemática com as operações matemáticas que foram utilizadas. Revelando com isso que no ato ilocutório que se estabelece há necessidade de evidenciar as possíveis interpretações do enunciado pelos alunos. Essas respostas permitem inferir que os alunos utilizaram essas operações para encontrar o valor da massa dos copos de um dos pratos da balança. De fato precisamos somar, subtrair, dividir (fração) e resolver uma equação na qual a massa do copo que é desconhecida precisa ser encontrada.

Os próximos dois quadros apresentam as respostas da categoria das *Relações Aritméticas*. Estas respostas estão divididas em subcategorias: as incoerentes (Quadro 3) e as coerentes (Quadro 4) com o que foi solicitado aos alunos pelo enunciado da questão.

Quadro 3 – Respostas apresentadas com Relações Aritméticas incorretas

RELAÇÕES ARITMÉTICAS – RESPOSTAS INCOERENTES		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
D5	280k+30	Respostas incompreensíveis (5 sujeitos)
D18	24=24	
D23	8, 40 g do lado esquerdo 6, 40 g do lado direito	
S8	4 + 4 = 8	

	4 + 4 = 8	
S21	4 cop. + 4 peso + 6 cop = 40 gramas	
B13	40, 40, 40, 40, 40, 40 40, 40, 40, 40	Só expressa os valores dos 10 pesos conhecidos, sem estabelecer uma relação entre esses pesos e os copos.
C24	Numa balança com 4 copos e 4 cubos deu 120g e na outra com 6 cubos deu 120g. Os copos têm 20 g.	Calculou a massa dos copos e atribuiu esse valor aos pesos e aos copos nos dois pratos da balança.
D1	C+Q=240 lado esquerdo Q=40 Q+Q=240 C= Copo Q=Quadrado	Designa 4 copos por C e 4 quadrados por Q, o que é incoerente com as igualdades Q=40 e Q+Q=240
S9	8 x 6 = 48 gramas	O sujeito multiplica a quantidade de objetos de um da balança pela quantidade de objetos do outro lado da balança. Ao resultado obtido o sujeito atribui uma unidade medida, no caso gramas.

Fonte: As autoras

Consideramos incompreensíveis aquelas respostas que não permitiram fazer uma inferência sobre o pensamento do aluno. Foram respostas vagas, que não possibilitaram uma interpretação coesa. Duval (2011) deixa claro que é difícil colocar em equação. Em sala de aula alunos e professores percebem nitidamente esta dificuldade. O processo de ensino atual costuma começar com a ideia de incógnita, designada por letra, para poder operar sobre ela assim como se faz com número. O aluno faz os tratamentos no interior do sistema semiótico, ou seja, a equação proposta, sem compreender, no entanto, o conceito global da equação e o objeto ao qual ela se refere. Duval (2011) propõe o inverso, ao invés de impor a letra ao aluno, deve deixar com que o aluno recorra a ela quando achar necessário. Assim o processo cognitivo da aprendizagem da álgebra se constrói em um terreno sólido.

Por essa razão a proposta presente na atividade deixa livre as formas de designação das relações entre as massas dos copos e dos pesos. Essas designações podem ocorrer em língua natural ou em linguagem aritmética. O que é importante é interpretar essas respostas, levando em conta o seu valor lógico. Considera-se também a relação da função apofântica que se faz necessária, pois além de designar os objetos, uma língua precisa ser capaz de dizer algo sobre o objeto que designam. Esta função além de compreender as duas operações que podem ser efetuadas de forma isolada ou em conjunto (a predicação e a elocução), pode também ser compreendida a partir de seu conteúdo ou estatuto. O conteúdo compreende os diferentes aspectos pelos quais ela pode ser considerada, enquanto que o estatuto está relacionado ao papel que preenche na organização global do discurso (DUVAL, 1995).

Uma unidade apofântica também pode ter um valor social, epistêmico ou lógico, que em geral não estão explícitos. Duval (2004, p.105) destaca que um enunciado completo pode ter: apenas um valor social; um valor epistêmico e um valor social; ou um valor epistêmico e um valor lógico. O que irá determinar este valor é o contexto do ato do discurso e do universo cognitivo, representacional e relacional dos interlocutores. No caso em questão as formas de designação das relações entre as massas dos pesos e dos copos não apresentaram valor lógico de verdade. Quando se passa de uma expressão referencial para um enunciado completo, muda-se de nível e de critério de constituição do “sentido” de uma expressão. Este “sentido” encontra-se no valor que toma e não no caráter completo ou suficiente das informações que daria sobre um objeto ou situação do mundo. A mesma análise foi realizada nas respostas corretas apresentadas.

No Quadro 4 estão as repostas consideradas coerentes dentro ainda da categoria das Relações Aritméticas:

Quadro 4 – Respostas apresentadas com Relações Aritméticas corretas

RELAÇÕES ARITMÉTICAS – RESPOSTAS COERENTES		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
Sujeito	**Questão 2B**	**Comentário**
B12	20 . 4 + 40 . 4 e 40 . 6 20.4 + 40.4 = 240 40 . 6 = 240	Já identificou a massa dos copos (20 g) e designa essas relações numericamente. Designa cada lado da balança separadamente.
B19	Esquerdo Direito 4 . 4 = 24 - 16 4 . 6 = 24 copo = 8/4 = 2 1 peso = 40 g	Não utiliza o zero na forma escrita (valor equivale a 4). Faz as operações corretamente. De um lado 4.6, isto é, 40 gramas vezes 6 pesos. Do outro lado faz 40 gramas vezes 4 pesos obtendo 16 (ou seja 160) subtraindo de 240, resultado em 80 representado por 8. Divide por 4 copos dá 2, interpretado como 20.
C14, C19, C21	4+4 do lado esquerdo 3+3 do lado direito	Representam o número de objetos de cada lado da balança, isto é, tem 4 copos e 4 pesos no lado esquerdo e 3 + 3 pesos no lado direito.
C3	40+40+40+40+40+40=240 (flechas mostrando um lado e o outro da balança). 40+40+40+40+40+40=240	Do lado direito se refere aos 6 pesos valendo 40 gramas cada um e do lado esquerdo atribuindo a dois copos o valor de 40 gramas também
C7, C10	40+40+40+40+40+40 direito 20+20+20+20+40+40+40+40 esquerdo	Designa a relação de cada lado da balança aritmeticamente, já estabelecendo a relação de igualdade, mas não faz isso numa única sentença.
D8, D9	80g+160g=240g 40x6=240g	Expressaram corretamente o peso de cada prato separadamente, por meio de uma relação aritmética.
C15	240=240 240≠240 (+40) Anotações na balança	Designa o total de pesos da balança e designa a relação da desigualdade se fosse acrescentado mais um peso se fosse acrescentado mais um peso.

Fonte: As autoras

Essas relações apresentadas dizem algo sobre as massas dos copos e dos pesos nos dois pratos da balança. A função de expansão discursiva permite a interpretação das respostas e a compreensão das respostas apresentadas pelos alunos. Duval (2004) expressa particularidades da função discursiva referencial e aponta ainda algumas considerações sobre os léxicos para as operações de designação, visto que nem todos os léxicos permitem cumprir as quatro operações de designação e para compreendê-los melhor, ele os distingue dois grandes tipos de léxicos: os sistemáticos e os associativos. O léxico sistemático permite somente a operação de designação pura e não as de categorização ou de determinação. Esses léxicos apresentam a restrição de não permitirem designar mais que os objetos que pertencem a um domínio particular. Um léxico é associativo quando remete a diversidade de objetos e de fenômenos do meio físico e do entorno sociocultural e não apenas um conjunto de objetos teoricamente elementares. Os léxicos associativos são próprios das línguas naturais e não são restritos a nenhum domínio particular de objetos. Nas respostas apresentadas foram utilizados léxicos sistemáticos uma vez que as sentenças apresentadas utilizaram valores numéricos.

A função de expansão discursiva permite "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocinamento" (DUVAL, 2004, p. 94). O autor afirma que uma língua não deve apenas expressar enunciados completos, mas também deve vinculá-los em uma unidade discursiva tematicamente contínua e semanticamente não tautológica, que compreende o relato, a descrição, a explicação, o comentário, a argumentação, a dedução, o cálculo, entre outros (DUVAL, 2004). As unidades discursivas identificadas caracterizaram descrições, explicações e cálculos que permitiram fazer inferências a respeito do raciocínio dos alunos. Os professores esperam de imediato que as letras entrem em cena, porem não ocorre. No entanto, não significa que as respostas estejam erradas, ao contrário, é importante estar atento à interpretação dos alunos em relação à sentença matemática solicitada.

Isto quer dizer que uma língua precisa vincular diferentes enunciados relativos ao mesmo tema, de forma a explicar melhor o assunto, mas sem cair na redundância. Esta função é importante por permitir que o interlocutor faça inferências e torne explícito o que, no discurso, está implícito. Ou seja, o discurso diz mais do que parece dizer, isso ocorre por meio das operações discursivas, e estas, por sua vez, pelos modos de progressão do discurso.

No Quadro 5 estão presentes as respostas que já apresentam letras e, por essa razão, foram, por nós, caracterizadas como algébricas. Destacamos as que se aproximam do valor lógico de verdade das que não caracterizam um valor lógico de verdade. Importante será o professor perceber as primeiras tentativas de expressar as relações entre as massas dos copos e dos pesos não tendo o valor das massas dos copos conhecidas. As inferências possibilitadas anunciam a trajetória da evolução do pensamento algébrico dos alunos que precisa ser levada em conta no momento do ensino.

Quadro 5 – Respostas apresentadas com Relações Algébricas incoerentes

RELAÇÕES ALGÉBRICAS – RESPOSTAS INCOERENTES		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
D11	E=40	Incompreensível
D20	x=40	
E7	X	
E5	4 x 4 . 40 x = 6 . 4	Quase consegue estabelecer a sentença, no entanto para o lado esquerdo designa os 4 copos por x e substitui os 4 pesos por 40 e ainda chama de x e

		iguala ao outro lado já substituindo os pesos dos copos por 40 (registrando, no entanto 4). Aqui o aluno tenta associar o valor desconhecido a uma letra e o faz de forma equivocada sem deixar de evocar os valores apontados no enunciado e os objetos visualizados na figura.
E6	4x + 4.40 = 6.4	Esse aluno aproxima-se um pouco mais, no entanto substitui a massa dos pesos do lado direito da balança por 4 e não 40.
B18	8x = 6y	Designação errada dos objetos, onde a massa total dos 4 copos e dos 4 pesos foram designados por 8x e os outros seis pesos do lado direito por 6y. Nesse sentido infere-se que o aluno considera que a massa dos copos e pesos será a mesma. Por essa razão tem que denominar a massa dos pesos do lado direito da balança por y como sendo de valor diferente dos pesos do lado esquerdo da balança. O valor verdade da sentença fica comprometido.
C1, C18	6+y=14 8+x=14	Designam a relação de igualdade de cada prato da balança em relação ao número de objetos. Nesse caso 6 pesos mais um número de objetos representado por y dará os 14 objetos existentes e do outro os 8 objetos mais um número de objetos representado por x também deverá ser igual aos 14 objetos
C30	4C+40+40=640	Designa por C a massa dos copos, mas não estabelece corretamente a relação, considera a massa de dois pesos somente e indica uma equivalência equivocada.
C6	x+200=240	O sujeito designa os quatros copos por x e adiciona 200 gramas já considerando mais 40 gramas de um peso que também deveria ser acrescentado do lado esquerdo, para não desequilibrar a balança, no entanto esquece de adicionar esse mesmo peso ao prato do lado direito.
S1	240 = 240 4y + 4x = 6	Estabelece a relação correta, porem esquece de representar o lado direito como 6x ou 6y como fez do lado esquerdo.
S16	40 ≠ x	É possível inferir que o sujeito designou por x os copos e expressou que cada copo não pesará 40 g.
S2	x = 240 + 240	Talvez ele queira expressar o total dos dois pratos da balança por meio dessa sentença.
S4, S18	40 + 4x = 240	Designam os copos por x, mas erra ao atribuir 40 g para os dois pesos do lado esquerdo.
S5	4x + 2y = 6y	Designa os copos por x e os pesos por y, mas erra representando somente dois pesos do lado esquerdo. Pode ser que ele procurou igualar os coeficientes numéricos.
C23	4x+6=14	Incompreensível. Se o sujeito indicasse 4+x no lugar de 4x, poderíamos inferir que ele estaria fazendo uma relação da quantidade total de objetos da balança.

Fonte: As autoras

O sujeito E7 ao responder somente “x”, não se expressa por meio de uma representação, e tampouco como signo. Pois conforme esclarece Duval (2011, p.38) “as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras”. Diz ainda que “é apenas no interior de um sistema semiótico que alguma coisa pode funcionar como signo” (DUVAL, 2011, p.30).

As inferências possibilitadas e apresentadas no quadro apontam para a forma de trabalho do professor com seus alunos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ao identificar as inconsistências e fragilidades, abre-se o caminho para a reorganização da prática educativa, tendo por foco a superação das dificuldades dos alunos e as orientações necessárias para que eles reflitam sobre suas respostas junto ao professor ou colegas. O primeiro passo será a tomada de consciência dessas inconsistências ou fragilidades por meio de dissonâncias cognitivas provocadas pelo professor para, na sequência, apresentar novas respostas que também serão foco de análises.

Vamos prosseguir apresentando respostas corretas de natureza algébrica e com as respectivas análises realizadas.

Quadro 6 – Respostas apresentadas com Relações Algébricas coerentes

RELAÇÕES ALGÉBRICAS – RESPOSTAS COERENTES		
SUJEITO(S)	**RESPOSTA**	**COMENTÁRIO**
C29	4y+4x=6x	Designa a massa dos copos por y e a massa dos pesos por x. Essa relação está correta, pois a substituição do valor de x por 40 permite a obtenção da massa dos copos.
S3	y.4 + x.4 = x.6 y.4 + 40.4 = 40.6	
C8, C28	4x+4=6	Designam os copos por x e não designa os pesos por y colocando somente o número de objetos. Nesse caso a etra x designa o número de copos e não a massa dos copos. Podemos inferir que o aluno quis dizer: 4 copos mais 6 pesos é igual a 6 pesos, o que equivale: a massa de 4 copos com a massa de 4 pesos é igual a massa de seis pesos.
E1, E3	4x + 4 . 40 = 240 4x + 160 = 240 x = 20	Designam a massa dos copos por x e substituem as massas dos pesos por 40 e dessa forma representa por meio da sentença matemática e resolve a equação.
E2, E9, E12, E13, E14, E16	4x + 4.40 = 6.40	
E4, E15	x + 160 = 240	Designam por x os quatro copos e cria a sentença já substituindo o valor de cada peso por 40. Essa designação é diferente, pois a letra x se refere aos 4 copos. O valor da massa encontrado no final é dividido por 4 para se referir à massa de cada copo individual.
S10	x + 10 = 14	O sujeito designa os 4 copos por x e soma os pesos dos dois lados da balança. A sentença matemática revela a quantidade de objetos existentes na situação, no caso os 14 objetos ao todo. Na realidade o sujeito não conseguiu representar a relação existente entre os pratos da balança por meio de uma sentença e sim os objetos existentes. Essa relação assim designada não deixa de estar correta, pois o aluno me diz que um número de copos mais 10 pesos representam no total 14 objetos (entre copos e pesos)
S7	x são os pesos, y os copos. Sendo assim y é metade de x. 4y + 10x =	Por meio da expansão discursiva na forma semântica, é possível inferir que as relações estabelecidas entre os dois lados da balança são feitas por meio da língua natural e são de natureza cognitiva, pois o sujeito equipara os pesos dos dois lados da balança e verifica que dois desses pesos equivalem aos 4 copos, portanto cada copo tem a metade de cada peso. Ao passar para a linguagem algébrica o sujeito não consegue estabelecer as relações entre os dois lados da balança e expressa matematicamente a quantidade de copos e de pesos sem saber indicar o resultado.

Fonte: As autoras.

Antes de proceder com as análises será necessário apresentar aspectos relacionados à função de expansão discursiva que é operada de dois modos, por substituição ou acumulação, e por quatro formas de expansões distintas (expansão lexical, expansão formal, expansão natural, expansão cognitiva). Os diferentes textos podem combinar várias formas de expansão, mas Duval (2004) afirma que todos utilizam pelo menos uma dessas quatro formas. Essas quatro formas podem mais bem observadas na Figura 1.

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)

Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	Expansão LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) Associações verbais, ocorrências Linguagem do inconsciente	Expansão FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica,...) Raciocinamento dedutivo (proposições de estrutura funcional) Cálculo proposicional, cálculos de predicados
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	Expansão NATURAL (somente o conhecimento da linguagem corrente é suficiente) Descrição, Narração Argumentação retórica Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) Raciocinamento pelo absurdo	Expansão COGNITIVA (exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) Explicação Raciocinamento dedutivo (proposição de estrutura temática condicional) Raciocinamento pelo absurdo

Figura 1 – As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão
Fonte: Duval (2004, p.119)

Segundo Duval (2004) a similaridade semiótica compreende a continuação dos enunciados por meio da repetição dos mesmos signos ou das mesmas palavras e a similaridade semântica acontece quando há uma invariância referencial entre os enunciados, o que faz com que haja uma continuidade temática entre os enunciados, permitindo um progresso contínuo. O autor também destaca que a similaridade semiótica e a similaridade semântica não garantem a continuidade do discurso. Neste caso se faz necessário considerar uma segunda dimensão, que é a necessidade ou não de se recorrer a um terceiro enunciado.

Nas sentenças matemática apresentadas é possível identificar uma similaridade semântica, pois as sentenças matemáticas elaboradas têm por referência o mesmo objeto da figura apresentada. Em ambas as representações (uma em língua materna e outra algébrica) o valor desconhecido é explicitado: "encontre a massa dos copos" equivale a 4x em que x representa a massa da cada copo.

O caso mais comum é quando a passagem de um enunciado para sua expansão acontece de forma direta, sem a necessidade de um terceiro enunciado, que compreende a chamada de similaridade interna de dois enunciados (DUVAL, 2004). Quando a passagem é indireta, com a necessidade de mediação explícita ou implícita de um terceiro enunciado, Duval (2004) denomina esse caso de similaridade externa. Ele também afirma que "não há expansão discursiva de um enunciado que não se baseie na combinação de uma similaridade semiótica ou semântica e de uma similaridade interna ou externa" (DUVAL, 2004, p. 119).

Essas considerações nos permitem inferir que por vezes precisamos recorrer a um terceiro enunciado para fazer as inferências e, em outros essas inferências podem ser realizadas de forma direta. Isso ocorre nos casos de sentenças com valor lógico de verdade ou de falsidade. Nas sentenças corretas as inferências são possibilitadas pelo valor verdade lógico e nos casos das incorretas as inferências precisam identificar as fragilidades e inconsistências e, por essa razão, precisam recorrer a enunciados explicativos dessas fragilidades e inconsistências.

As similaridades permitirão atribuir significação ao uso das letras pelos alunos e, ao mesmo tempo, esclarecer as formas de conduzir a prática educativa voltada para o ensino da álgebra. Essa forma de proceder deverá levar em consideração as formas de designação de relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas passando por formas com utilização da língua natural, caminhando para a utilização da linguagem numérica e culminando na utilização da linguagem algébrica. Essa trajetória aqui identificada e apresentada pode dar indícios de um bom caminho para a sala de aula em se tratando do desenvolvimento do pensamento algébrico.

3. Considerações Finais

A partir dos dados analisados é possível perceber, entre outras, uma das essenciais considerações que Duval (2009) defende sobre o ensino da matemática, que é a importância de se trabalhar com diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Esta diversidade é absolutamente necessária e inevitável à conceitualização, pois os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção. Partirá do aluno a necessidade de trabalhar com as representações destes objetos, cabendo ao professor conduzir as atividades para que o processo de conceitualização se dê de forma espontânea, permitindo ao aluno desenvolver sua capacidade cognitiva, superando com isso, a barreira da linguagem natural e da linguagem aritmética, para que se obtenha a capacidade de pensar algebricamente sabendo articular essas e outras linguagens de sistemas semióticos diferentes.

4. Referências

DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

______. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.