EXPERIMENTO DIDÁTICO PARA O ENSINO DOS CONCEITOS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Cristiane Machado Pereira Felício
Instituto Federal Catarinense - Campus Camboriú
cristianemachadop@hotmail.com

Resumo:
Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados de um experimento didático desenvolvido no estágio curricular supervisionado obrigatório VI, do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal Catarinense - campus Camboriú. O foco central foi desenvolver uma sequência de atividades para a compreensão da análise combinatória no segundo ano do ensino médio, por meio da resolução de problemas e do jogo Kojo.

Palavras-chave: Problemas; Jogo Kojo.

1. Introdução

Este artigo apresenta uma proposta para o ensino da análise combinatória utilizando a resolução de problemas. Este tem o objetivo a interação dos aprendizes e a discussão das suas resoluções, assim aprendendo o conteúdo de maneira dinâmica não precisando decorar as fórmulas de modo automático, como acontece usualmente.

Segundo Batanero (1997), ao trabalhar com tal assunto é importante analisar as etapas seguidas pelos alunos para solucionar as situações-problema e valorizar todos os modos de pensamento.

Os PCN (1998, p. 266) orientam que,

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações problema, novos, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Problemas de análise combinatória são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Hariki (1996, p.29) explica que, “talvez a principal dificuldade seja, a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo”.

Faz-se necessário então um estudo que explore os conceitos primitivos da Análise Combinatória, trabalhando de modo intuitivo com o aluno, descrevendo os casos possíveis, formando agrupamentos e contando-os, utilizando técnicas de contagem com o auxílio da árvore de possibilidade.

Pressupõe-se que uma análise adequada dos processos de formação de agrupamentos, pelos alunos, evitará defeitos frequentes entre os iniciantes, decorrente da tendência de adivinhar a resposta ou o processo de contagem.

A proposta destas atividades é que os alunos construam o seu pensamento combinatório a partir da resolução de problemas sendo estes cotidianos, criando situações de raciocínio lógico, onde eles não precisem utilizar as fórmulas de arranjos e permutações. As resoluções inicialmente serão realizadas em grupos, tendo o auxílio direto do professor, e, posteriormente na forma individual.

Esteves (2001) destaca que o relacionamento dos alunos com o professor, tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho são alguns, dentre os diversos fatores que podem influenciar no aprendizado, visto que as atividades devem ter significado e fazer sentido para os alunos, proporcionando o sentimento de confiança e desprendimento perante o professor para que o aprendizado flua de forma favorável.

O experimento didático foi desenvolvido no Instituto Federal Catarinense – Campus Camboriú, com trinta e um alunos de uma turma do segundo ano do ensino médio integrado ao técnico de agropecuária. Tais atividades foram distribuídas em oitos encontros (uma hora cada) com conceitos da análise combinatória.

2 Apresentação do tema

A utilidade da Análise Combinatória vai além dos trabalhos em sala de aula. Segundo Guirado e Cardoso (2007), apesar de ter sua origem nos jogos de azar – tais como lançamentos de dados e jogos de carta – ao longo do tempo sofreu intenso desenvolvimento e hoje seus métodos são aplicados em diversas áreas como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, etc.

Geralmente numa aula tradicional, os alunos procuram identificar a fórmula correta para arranjo, permutação ou combinação ao resolver um problema. Isso ocorre por eles não terem participado da construção desses conceitos, apenas o resolveram de modo mecânico.

A proposta deste estágio teve por finalidade, que os alunos construam o seu conhecimento de modo que não precisem decorá-los.

Para o aluno, o significado do saber matemático está ligado à maneira como o conteúdo lhe é apresentado. Assim sendo, segundo Freitas (2002), o envolvimento do aluno dependerá de como as diversas atividades de aprendizagem são estruturadas por meio de uma situação didática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, entre outros conteúdos, o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio[...] (BRASIL, 1998, p.257).

Deixar que o aluno elabore suas próprias resoluções por meio da análise e discussão de problemas deve ser a alternativa escolhida para o ensino da Análise Combinatória.

Este tema no Ensino Médio envolve problemas, com casos nos quais elementos podem se repetir ou não. Nesta proposta didática, foram trabalhados apenas dois conceitos pertinentes ao estudo da Análise Combinatória:

a) Arranjos: 'a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas'. Exemplo: Otávio, João, Mário, Luís, Pedro, Roberto e Fábio estão apostando corrida. Quantos são os agrupamentos possíveis para os três primeiros colocados? Obviamente, como em qualquer corrida, a ordem de chegada é um fator diferenciador dos agrupamentos. Como temos sete corredores e queremos saber o número de possibilidades de chegada até a terceira posição devemos calcular por arranjo simples, neste problema os alunos devem analisar que temos sete possibilidades para a primeira colocação, porém para a segunda colocação temos apenas seis possibilidades, pois um dos sete corredores será o primeiro colocado, e para a terceira colocação temos apenas cinco corredores, multiplicando os fatores, 7.6.5 obtemos os números de agrupamentos.

b) Permutações: 'todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia'. Exemplo: de quantas maneiras sete pessoas podem formar uma fila indiana? Para ser o primeiro desta fila temos sete pessoas, para ser o segundo temos seis pessoas, pois uma já é a primeira, os alunos devem compreender que os números vão decrescendo até a última pessoa, e que todos os elementos são utilizados.

Os alunos devem compreender esses conceitos durante o experimento didático e como resolvê-los.

3 Experimento didático

O experimento didático foi composto por oito aulas, trabalhando a resolução de problemas e o jogo Kojo.

Na primeira aula, envolvemos problemas cotidianos sobre ‘produto cartesiano’ trabalhando a construção da árvore de possibilidades e o ‘princípio fundamental da contagem’. Na segunda aula, introdução ao fatorial de um número e os alunos conheceram e jogaram o Kojo.

Na terceira e quarta aula, permutação simples com exemplos sobre o jogo Kojo e exemplos rotineiros. Na quinta aula arranjos simples e combinações simples também com exemplos do jogo e cotidianos.

Na sexta e sétima aula, uma análise do jogo e estratégias para vencê-lo utilizando combinações.

Na oitava aula, um campeonato do jogo para verificação se eles haviam compreendido os conteúdos abordados, e na oitava aula uma avaliação.

Os alunos receberam em cada aula uma folha com um resumo da explicação, com exemplos e posteriormente resolver os exercícios propostos nela, sobre o conteúdo abordado. Essas folhas foram entregues pelos alunos no final da aula, para podermos fazer uma análise da aprendizagem.

O conteúdo de análise combinatória foi introduzido com o produto cartesiano, montando a árvore de possibilidades e durante os exemplos enfatizando o princípio fundamental da contagem.

Iniciamos com o clássico problema de princípio fundamental da contagem: quantos são os resultados possíveis que se obtêm ao jogarmos uma moeda não viciada duas vezes consecutivas para cima?

Neste momento os alunos estavam silenciosos e, para facilitar o raciocínio, a árvore de possibilidades foi montada no quadro. Começamos a analisar o problema e verificamos que na primeira jogada tínhamos duas possibilidades ‘cara’ ou ‘coroa’. E na segunda jogada tínhamos outras duas possibilidades ‘cara’ ou ‘coroa’. Logo 2.2 = 4.

Um dos estudantes perguntou se fossem três moedas como ficaria a árvore. Neste momento eles começaram a participar efetivamente dos problemas, novamente montamos a árvore e os alunos desenvolveram suas respectivas resoluções.

Para que eles compreendessem a montagem da árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem outro exemplo foi proposto: Bruna tem duas saias e três camisetas. De quantas formas distintas Bruna pode se vestir?

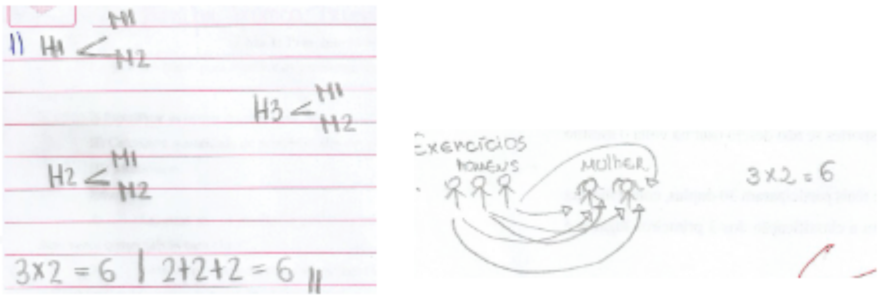
Alguns estudantes desenharam as blusas e as saias montando as combinações, e a maioria elaborou pela árvore de possibilidades. A árvore foi desenvolvida no quadro com a cooperação dos mesmos.

Outros dois problemas foram resolvidos juntamente com os alunos, e em seguida eles passaram a resolver cinco problemas sobre este conteúdo.

Segue alguns exemplos:

1. Em um grupo de teatro há três homens e duas mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal (homem com mulher) para encenar o papel de Romeu e Julieta?

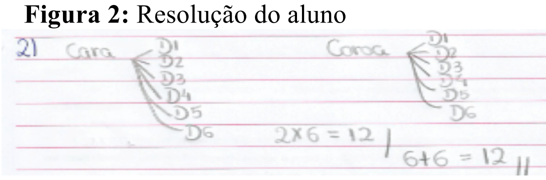
Figura 1: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

2. Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos quantas possibilidades para o resultado?

Figura 2: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

Na segunda aula os estudantes conheceram o jogo Kojo, sendo composto por vinte e duas peças numeradas do um ao onze, com uma peça clara e outra escura de cada número. Incialmente deve-se colocar as vinte e duas fichas (peças) numeradas de cabeça para baixo no centro da mesa e embaralhá-las completamente. Cada jogador na sua vez escolhe quatro fichas e as organiza em uma linha na sua frente com os números voltados para si sem que os outros jogadores as vejam, montando assim um código que deverá ser decifrado por seus adversários.

Os jogadores devem ordenar as fichas na sua frente de maneira ascendente, da esquerda para a direita (o número mais baixo a sua esquerda e o número mais alto a sua direita). Se o jogador pegar o mesmo número em duas fichas, ele deve colocar a ficha escura na esquerda da clara.

Observando a sua vez o jogador começa retirando uma das peças do centro da mesa. Deve verificar o seu número e colocá-la a sua frente de cabeça para baixo no seu código. Em seguida o jogador deverá fazer uma suposição a respeito de um número do código de seu oponente, sendo que qualquer oponente poderá ser escolhido. Para fazer a suposição deverá apontar a peça claramente e dizer qual o número correspondente aquela peça.

Se o jogador acerta, o oponente deverá deitar a peça de forma que todos possam ver qual o número que está inscrito nela. O jogador poderá escolher dar outro palpite sem retirar peças do centro.

Se o jogador errar o palpite, deve-se posicionar a peça que retirou do centro junto ao seu código, de forma que os outros integrantes possam ver. A peça deverá ser colocada na posição da sequência no código do jogador que deu o palpite errado e deverá ficar assim até o final do jogo. Desta forma, o jogador estará entregando pistas aos demais a respeito de suas fichas ocultas.

O jogo passa ao jogador da esquerda e continuará até que apenas um deles permaneça com uma ou mais peças secretas. Este jogador será considerado vencedor.

Os alunos receberam uma folha para fazer anotações sobre os seus palpites e organizar suas jogadas, porém como eles ainda estavam se adaptando as regras não conseguiram anotar e jogar simultaneamente. Os alunos gostaram do jogo, contudo tiveram dificuldades em fazer suas anotações e seus palpites. Eles conseguiram jogar apenas duas vezes durante esta aula.

Na terceira e quarta aula, os alunos aprenderam permutações e arranjos simples a partir de problemas envolvendo o jogo Kojo, e posteriormente resolveram alguns problemas em grupos.

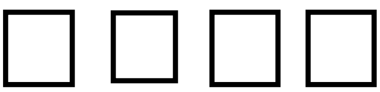
Problema: Permutação

1. João estava jogando Kojo com seus amigos, porém ele não considerou a regra de que devemos posicionar as peças em ordem crescente; deste modo de quantas maneiras distintas João poderia posicionar suas quatro peças iniciais?

Solução: João retirou quatro peças: na primeira posição teremos quatro possibilidades, para a segunda peça teremos três possibilidades, na segunda peça teremos duas possibilidades e para a última peça teremos uma possibilidade. Logo teremos 4.3.2.1 = 24 maneiras de João posicionar suas peças.

Problema: Arranjos simples

1. Ana e Pedro estão jogando Kojo. Observe as peças de Ana



ISSN 2178-034X

De quantas maneiras distintas Pedro pode retirar suas peças?

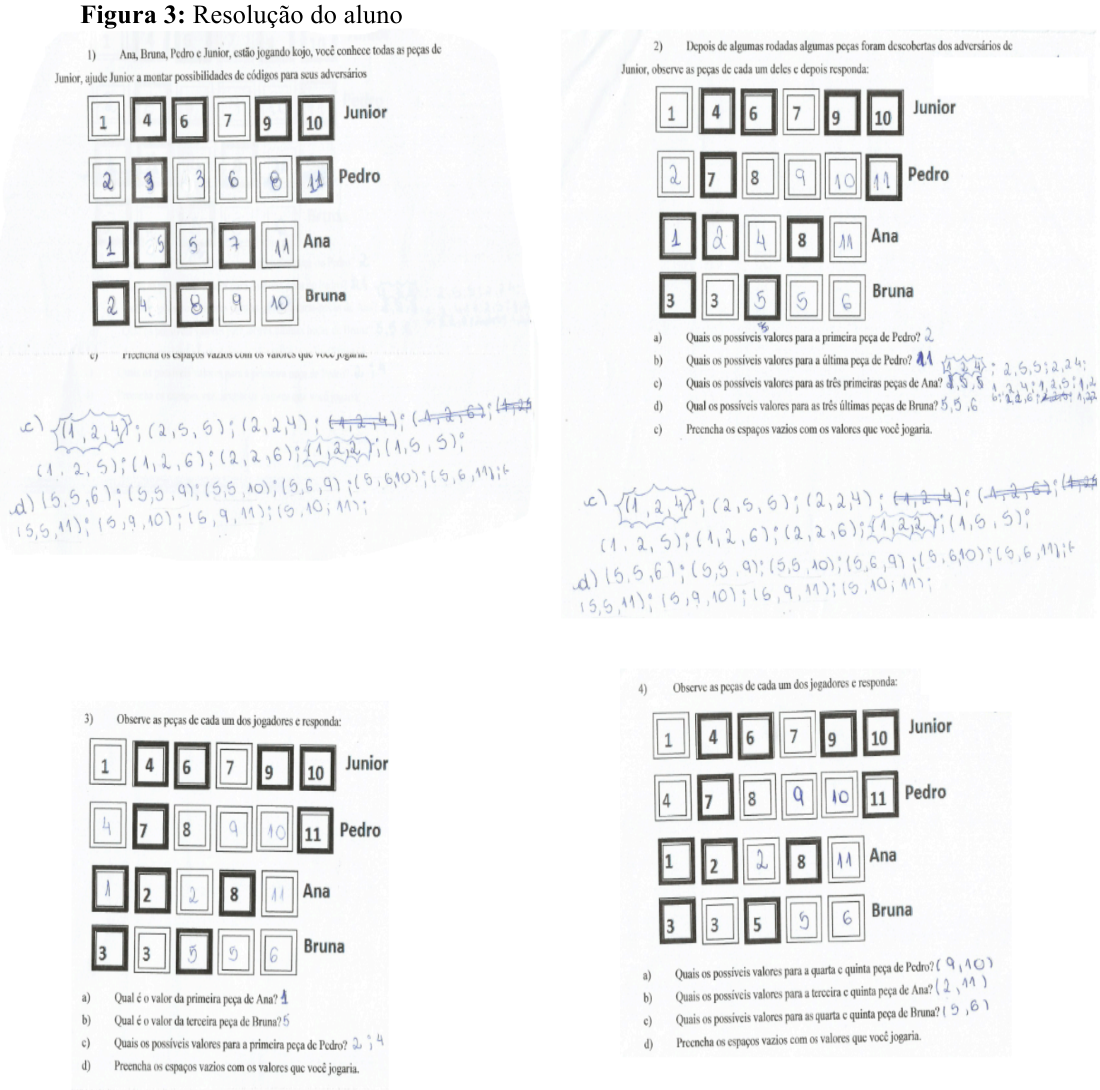
Sabendo que o jogo tem vinte e duas peças e quatro já foram escolhidas por Ana, então temos dezoito peças disponíveis para Pedro. Escolhendo a Primeira peça sobram dezessete para escolher a segunda e assim sucessivamente. Temos 18.17.16.15 = 73440 combinações diferentes.

Na quinta aula os alunos resolveram alguns problemas relacionados com os conceitos acima e na sexta aula estes fizeram uma análise de jogo Kojo.

Supondo que quatro pessoas estariam jogando Kojo e que eles estivessem ajudando o Junior. Os alunos receberam um exercício por vez e o respondeu a caneta, deste modo evitando que eles copiassem dados do exercício posterior.

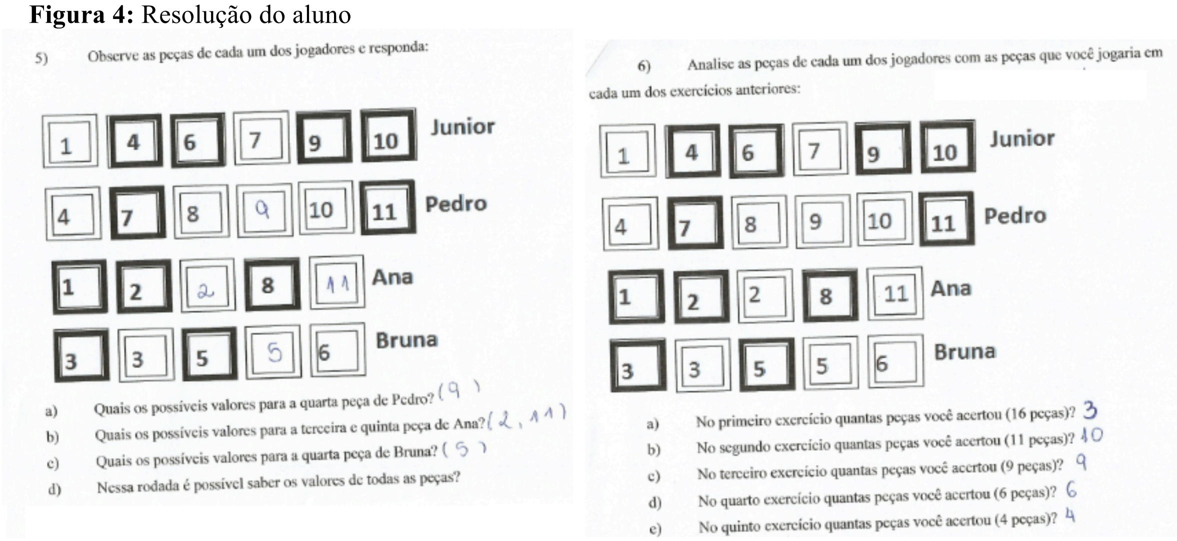
Ana, Bruna, Pedro e Junior, estão jogando Kojo, você conhece todas as peças de Junior, ajude Junior a montar possibilidades de códigos para seus adversários.

Figura 3: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

Figura 4: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

ISSN 2178-034X

Os estudantes preencheram as cartelas e posteriormente fizeram uma análise oral de como eles haviam jogado na segunda aula sem conhecimentos prévios de combinatória e de como eles conseguiriam vencer o jogo a partir da análise das combinações.

Na penúltima aula os alunos utilizaram os conceitos aprendidos nas aulas para jogar Kojo.

No primeiro contato com o jogo, foi possível realizar apenas duas partidas; porém no campeonato os alunos utilizaram os conceitos aprendidos e algumas equipes conseguiram jogar de cinco a seis vezes, fazendo anotações sobre suas jogadas e analisando as possíveis combinações.

Figura 5: Campeonato Kojo

Fonte: Dados primários (2015).

Nesse dia os alunos conseguiram organizar suas jogadas e montar suas estratégias para vencer o jogo. Em poucas jogadas os estudantes já conseguiam saber todas as peças de seus adversários. E, na última aula, os alunos realizaram uma avaliação sobre os conteúdos abordados.

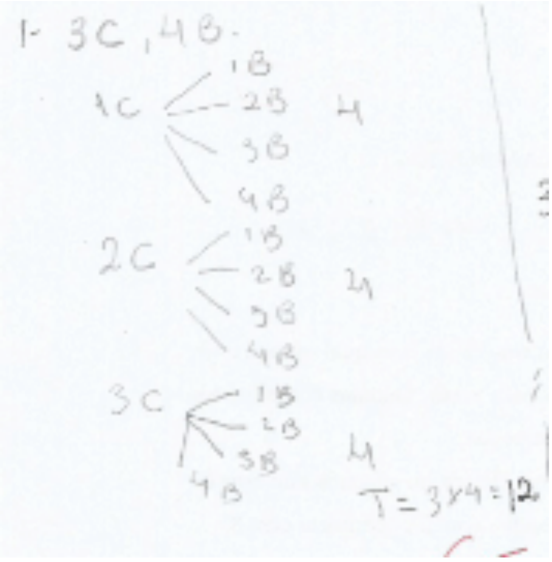
Segundo o relato da professora regente da turma, o resultado da avaliação foi positivo.

3.1 Análise das hipóteses:

Hipótese 1: Que os alunos consigam montar a árvore de possibilidades para entender o processo e verificar que no princípio fundamental da contagem utilizamos apenas a multiplicação dos fatores.

Pode-se observar pelas imagens da aula inicial que os alunos utilizaram a árvore de possibilidades como um recurso para resolver os problemas e alguns continuaram utilizando a árvore de possibilidades sempre que surgia um problema envolvendo o princípio fundamental da contagem. Hipótese validada.

Figura 6: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

Hipótese 2: Que os alunos terão dificuldades em resolver fatorial.

No início do planejamento não foi considerado a possibilidade da utilização da calculadora nas aulas. Posteriormente com a autorização da professora regente, esperava-se que os alunos não tivessem muita dificuldade em resolver fatorial. Alguns alunos por não estarem acostumados a utilizar a calculadora em sala, montavam o fatorial corretamente, porém erravam a resposta. Outros alunos, quando tinham que simplificar fatorial queriam resolver todo o fatorial do numerador e posteriormente do denominador e por último fazer a divisão; esses tiveram muitas dificuldades, porém foi feita uma nova explicação e eles conseguiram apreender a simplificar. Hipótese validada.

Hipótese 3: Que os alunos inicialmente sem utilizar o raciocínio combinatório tenham dificuldades em jogar o Kojo. Posteriormente tenham facilidade em jogá-lo utilizando conceitos de combinatória.

Na segunda aula, os alunos estavam se adaptando ao jogo e não conseguiam montar uma estratégia, fazendo assim palpites aleatórios. Porém, na sétima aula os alunos já tinham conhecimentos prévios de combinatória e deste modo conseguiram montar suas estratégias para vencer o jogo. Hipótese validada.

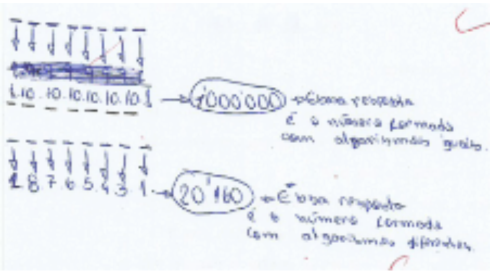
Hipótese 4: Que os alunos associem permutação simples com fatorial.

Na aula de permutação durante a resolução de problemas os alunos conseguiram identificar que o fatorial estava diretamente relacionado com a permutação simples, quando os estudantes verificavam que a multiplicação dos elementos decrescia logo um aluno expos seu comentário que para resolver ele utilizava o fatorial do número apresentado no problema. Hipótese validada.

Hipótese 5: Que os alunos terão dificuldades em identificar nos problemas, casos nos quais elementos são repetidos e os que não o são.

Alguns estudantes apresentaram dificuldades em interpretar os problemas, alguns não estavam conseguindo extrair os dados nos problemas, como podemos observar na figura abaixo; o aluno não conseguiu identificar se os algarismos eram iguais ou distintos, deste modo resolvendo os dois casos. Hipótese validada.

Figura 7: Resolução do aluno



Fonte: Dados primários (2015).

Hipótese 6: Que os alunos consigam compreender os enunciados e planejar uma solução sem a utilização da fórmula.

Durante as resoluções dos problemas no quadro e nas folhas, os alunos discutiam suas resoluções. Alguns tiveram muita facilidade em resolver os problemas propostos sem a utilização das fórmulas, apenas montando sua estratégia de resolução. Hipótese validada.

4 Considerações finais:

Durante a regência de estágio pode-se observar que os alunos têm muitas dificuldades em interpretar problemas, principalmente quando eles tinham que calcular as combinações, ou seja, para vencer o jogo eles tinham mais facilidade do que nas listas de exercícios.

O jogo Kojo auxiliou nas explicações, pois os alunos queriam aprender os conteúdos para poder vencer seus adversários. O assunto de análise combinatória é interessante pelo fato de termos problemas reais do nosso cotidiano, o que facilitou na execução da sequência didática.

Mas, ao trabalhar com resolução de problemas, temos um grande obstáculo: a interpretação e análise das informações.

Criar situações de discussões, onde o aluno tem a oportunidade de expor suas ideias, propor sugestões, questionar e refletir proporciona ao mesmo, uma autoconfiança para resolver as situações propostas. Além disso, faz com que o aluno não dê importância ao fato de errar e sim no que acarretou o erro.

A estratégia de resolução de problemas e a utilização do jogo Kojo foram positivas nestas turmas. As aulas foram dinâmicas, pois a cada exercício que era resolvido os alunos discutiam a suas resoluções e estratégias. A experiência de regência no ensino médio foi prazerosa e proveitosa. Os alunos participantes da experiência foram participativos e auxiliaram a execução de todo experimento didático.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília, 1999. 364 p.

BATANERO; C. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática**,v. 8, n.1, p. 26-39. 1997.

ESTEVES, Inês**. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

GUIRADO, João Cesar; CARDOSO, Evelyn. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Paraná. **Anais...** Paraná, 2007.

HARIKI, S. Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, n. 37, jan./mar. 1996.