

POSSIBILIDADES DE CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS E ESTUDO DE PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO COM USO DO SOFTWARE: GEOGEBRA

*Autor: Humberto Alves Bento
Instituição: PUC/ Minas
E-mail: humbertobento@gmail.com*

Resumo:

Este trabalho tem como objetivo apresentar resultados de um aprofundamento de uma pesquisa iniciada em um curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, na qual se investigou questões relativas ao ensino de geometria plana, com a utilização da informática para o desenvolvimento da habilidade de visualização pela dinâmica das figuras, e a exploração de conceitos geométricos com o *software GeoGebra*. Para esta investigação, foi utilizado um referencial teórico baseado em duas temáticas: (1) ensino e aprendizagem de geometria plana com atividades investigativas, (2) informática educativa explorando o pensamento geométrico, por meio do levantamento de conjecturas e no estudo de propriedades e proposições geométricas, com atividades estruturadas, em sequências didáticas de conteúdos, tais como: pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro) e suas propriedades.

Palavras-chave: Geometria Dinâmica; Software GeoGebra; Figuras Geométricas Planas.

1. Introdução

Neste trabalho apresentamos um aprofundamento de uma pesquisa iniciada em Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática com a seguinte questão: “Como podem ser estudados conteúdos de Geometria Plana (pontos notáveis do triângulo e suas propriedades) com a utilização da informática, explorando a habilidade de visualização por meio da dinâmica das figuras e a exploração de conceitos e propriedades geométricas pelo *software GeoGebra*?”

Foram desenvolvidas atividades de geometria plana explorando os seguintes conteúdos: Pontos Notáveis de um Triângulo e suas propriedades. Neste trabalho, apresento parte das atividades pesquisadas.

2. Ensino de geometria

Para uma compreensão de conceitos em Matemática trabalhamos com o desenvolvimento da capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. A Geometria é um conteúdo privilegiado para desenvolver estas capacidades.

Segundo Duval (1995, p. 126) a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas:

“Visualização para a exploração heurística de uma situação complexa; construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados; raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.”

Segundo, ainda, o mesmo autor, essas três espécies de processos cognitivos são entrelaçadas em sua sinergia e cognitivamente necessárias para a eficácia do aprendizado em geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar a formas de interpretações autônomas.

Borba e Penteadó (2003, p.190) consideram que o computador propicia o aumento da capacidade de aquisição e compreensão de conceitos, criando espaço para o desenvolvimento de processos reflexivos e experimentação, em geometria, pois “ as novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante”.

A criação de contextos sociais favoráveis à aprendizagem é, ainda, uma das características de um ambiente geométrico dinâmico (*software* que permite construir e manipular figuras geométricas), o que beneficia a aquisição de conhecimentos, dada a influência da interação social no desenvolvimento cognitivo, incluindo a produção de provas.

3. Sequências didáticas no ensino de geometria

Há alguns anos, surgiu uma ferramenta muito importante no ensino de geometria: a Geometria Dinâmica. Implementada por *softwares* como o The Geometer’s Sketchpad, o Tabulae, o Cinderella, Cabri-Géomètre, *GeoGebra*, Winplot entre outros, esta ferramenta permite explorar interativamente os conceitos da geometria por meio do movimento das figuras construídas.

Esta natureza interativa, quando bem utilizada didaticamente, permite levar os estudantes a proporem suas próprias conjecturas e testarem-nas eficientemente, adquirindo uma melhor percepção e compreensão visual daquilo que estão investigando.

Deste modo, têm-se, nas potencialidades propiciadas pelo uso de mídias, possibilidades de atingir o objetivo de se apropriar do conhecimento matemático de forma sólida e significativa.

No entanto, com as *sequências didáticas* podemos determinar características diferenciais da prática educativa. Segundo Zabala (1998, p. 18), quando

realizamos uma análise destas sequências didáticas buscando os elementos que as compõe, nos daremos conta de que são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

Para organizar uma sequência didática o professor leva em conta os conhecimentos prévios do aluno em relação aos novos conteúdos de aprendizagem. Também deve adequar esses conteúdos ao nível de desenvolvimento do mesmo no sentido de provocar um conflito cognitivo e promover a atividade mental, com o estabelecimento de relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios. Por último, promove uma atitude favorável que seja motivadora em relação à aprendizagem dos conteúdos e ajuda o aluno a adquirir habilidade relacionada com o aprender a aprender, que lhe permita ter autonomia cada vez maior em sua aprendizagem.

As sequências didáticas são organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos e são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa.

O conjunto de relações interativas necessárias para facilitar a aprendizagem com sequências didáticas, segundo Zabala (1998), é caracterizado pelas ações: planejar a atuação docente, contar com contribuições e conhecimentos dos alunos estabelecendo metas ao alcance dos mesmos, oferecer ajudas adequadas, entre outras.

4. Ensino de geometria com informática.

Desenhos, figuras, esboços e diagramas ocupam um lugar importante no ensino/aprendizagem da Geometria e facilitam a passagem gradual do concreto ao abstrato. A importância das representações externas (desenhos, gráficos, diagramas) é usualmente aceita, mas cada indivíduo tem de criar uma representação mental do objeto, a figura.

De acordo com Shulte (1994) o Ambiente Geométrico Dinâmico-AGD, para aprendizagem da Geometria, é um ambiente que pode propiciar a descoberta de propriedades e relações geométricas, facilitando aos alunos o estabelecimento e exploração de conjecturas.

Num AGD, é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas. A observação de regularidades, enquanto se processa a manipulação, permite a “descoberta” de novas propriedades e relações.

Também salientamos que as explorações desenvolvidas em ambientes computacionais dinâmicos favorecem a compreensão das relações entre os conceitos geométricos e levam progressivamente o aluno a pensar de um modo mais geral e abstrato.

A visualização é entendida como a capacidade de tratar informação visual e é uma das ferramentas utilizadas na resolução de problemas geométricos e que tem sido considerada como objeto de pesquisa e debate pela Educação Matemática.

Este *feedback* visual, através da manipulação de uma construção, permite verificar visualmente uma propriedade ou uma relação ou validar uma construção.

Entretanto, a diversidade de métodos de ensino com o uso de diferentes mídias como o lápis e papel, a máquina de calcular, o computador pode trazer uma flexibilização da didática para atingir a aprendizagem significativa e eficaz. A utilização dos AGDs é facilitadora da experimentação e da investigação de propriedades e relações, além de dar uma contribuição importante ao processo de descoberta intuitiva e de auxílio às demonstrações.

5. Investigações geométricas

A pesquisa realizada teve como um dos objetos as investigações geométricas de figuras planas. Segundo Ponte (2003, p.71),

a Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa.

O mesmo autor mostra afirma que “as investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações”. Ponte (2003, p.71)

A pesquisa provocou o desenvolvimento de capacidades, especialmente da visualização, com diferentes tipos de atividades, que segundo o mesmo autor é favorecida com tarefas em diversas situações matemáticas.

6. Sobre o *GeoGebra*

GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica que foi desenvolvido pelo Austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter no ano de 2002 para ser utilizado em sala de aula, principalmente em escolas secundárias. O nome *GeoGebra* reúne *GEO*metria, *álGEBRA* e cálculo. Esse *software* recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o prêmio de *software* educacional Alemão e Europeu.

O *GeoGebra* possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica, dentre as principais destacamos aquelas que permitem:

- Construir figuras geométricas e deformá-las mantendo suas propriedades;

- Criar novas ferramentas (macro-construções) e adicioná-las na barra de menu;
- Que seus arquivos sejam facilmente compartilhados em outros programas de computação; além disso é um *software* livre; com excelente interface; fácil de manusear.

7. Elaboração e aplicação das atividades

A pesquisa realizada teve como objeto a elaboração de atividades investigativas guiadas para exploração de conceitos, propriedades e relações da Geometria Plana, segundo os parâmetros de Ponte (2003). As atividades foram organizadas de maneira articuladas, ordenadas e estruturadas em sequências didáticas, segundo Zabala (1998).

Foram selecionados os conteúdos e para cada atividade foram determinados seus “Objetivos Específicos”, e uma “Metodologia” própria.

8. Atividade 1 - Pontos Notáveis do Triângulo

Objetivos:

- Identificar as propriedades dos pontos notáveis do triângulo. (Baricentro, Incentro, Circuncentro e Ortocentro).
- Verificar que as propriedades dos pontos notáveis do triângulo podem ser utilizadas como instrumentos para realização de demonstrações, mantendo-se as mesmas, com a movimentação das figuras, por meio da geometria dinâmica.

a) Baricentro

O aluno encontrou, com o auxílio das ferramentas do *GeoGebra*, o ponto notável do triângulo chamado *baricentro* (ponto de interseção das medianas de um triângulo). Para isso, primeiramente construiu um triângulo ABC. Depois selecionou os pontos médios de cada lado do triângulo, ligou esses pontos médios em cada vértice oposto aos pontos médios. A interseção dessas três retas é o que chamamos de *baricentro* (G) do triângulo.

b) Incentro

Nessa atividade o aluno encontrou com o auxílio das ferramentas do *GeoGebra* o ponto notável do triângulo chamado *incentro* (I), que é o ponto de interseção das bissetrizes de um triângulo. Para isso, o aluno primeiramente construiu no *GeoGebra* um triângulo ABC, depois criou as bissetrizes a partir dos vértices do triângulo. Os pontos de interseção dessas

três retas bissetrizes é o que chamamos de *incentro* (I). Verifica-se na construção do *incentro* que há uma circunferência inscrita no triângulo.

c) **Circuncentro**

O aluno encontrou o ponto notável do triângulo chamado de *circuncentro*, que é o ponto de interseção das mediatrizes de um triângulo. Para isso, o aluno primeiramente construiu no *GeoGebra* um triângulo ABC, depois criou as mediatrizes em cada lado do triângulo. Os pontos de interseção dessas três retas mediatrizes é o que chamamos de *circuncentro*.

d) **Ortocentro**

O aluno encontrou o ponto notável do triângulo chamado de *ortocentro*, que é o ponto de interseção das alturas de um triângulo. Para isso, o aluno primeiramente construiu um triângulo ABC, depois criou as alturas em cada lado do triângulo obtendo a reta perpendicular à base passando pelo vértice. Fazendo isso com outros dois lados do triângulo, obteve a intersecção dessas três retas ou cevianas, que chamamos de *ortocentro*.

9. Atividade 2 – Algumas propriedades dos Pontos Notáveis do Triângulo.

Objetivos:

- Aplicar os conhecimentos adquiridos nas propriedades dos pontos notáveis do triângulo, para construção de aplicações sobre:
 - a) I propriedade para o Lugar Geométrico do Baricentro;
 - b) II propriedade para o lugar geométrico do Baricentro;
 - c) Propriedade interessante para o Incentro;
 - d) Circunferência Exinscritas – Exincentros;
 - e) A reta de Simson;
 - f) Propriedade interessante para o Ortocentro;
 - g) Lugar Geométrico para o Ortocentro;
 - h) Triângulo Órtico,
 - i) Reta de Euler.
- Verificar que as propriedades dos pontos notáveis do triângulo podem ser utilizadas como instrumentos para realização de demonstrações, mantendo-se as mesmas, com a movimentação das figuras, por meio da geometria dinâmica.

a) I Propriedade para o Lugar Geométrico do Baricentro

O aluno criou um triângulo ABC e construiu o *baricentro* (G) do triângulo ABC . Depois o aluno construiu uma reta passando pela base AC e outra reta paralela a AC passando por B .

Feito isso, criou uma reta “ p ” paralela a AC passando pelo *baricentro* (G). Tudo isso, para verificar que quando o vértice B do triângulo ABC se desloca sobre uma reta paralela a base, o *baricentro* (G) se desloca sobre a reta “ p ” que é paralela a base do triângulo.

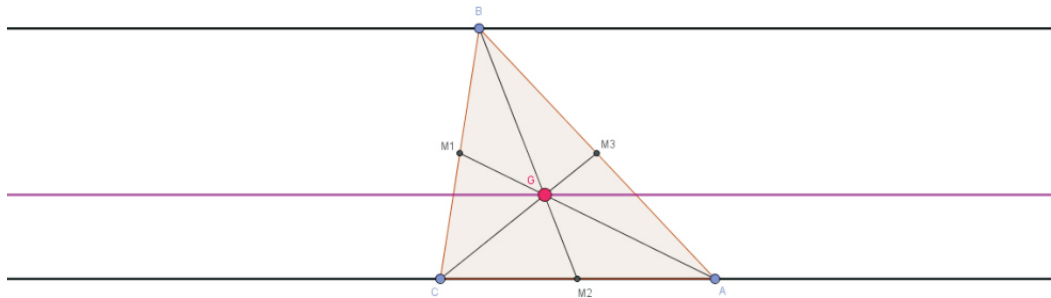


Figura 1: I propriedade para o Lugar Geométrico do *Baricentro* – Fonte: GEOGEBRA

b) II propriedade para o lugar geométrico do Baricentro

O aluno primeiramente criou um triângulo ABC e construiu o *baricentro* (G) do triângulo ABC . Depois construiu uma reta paralela ao segmento BC passando pelo *baricentro* (G) em seguida, construiu uma reta paralela ao segmento AB passando pelo *baricentro* (G) com isso o aluno verificou a seguinte propriedade: “As paralelas a dois lados de um triângulo que passam pelo *baricentro* (G) dividem o terceiro lado em três partes iguais”.

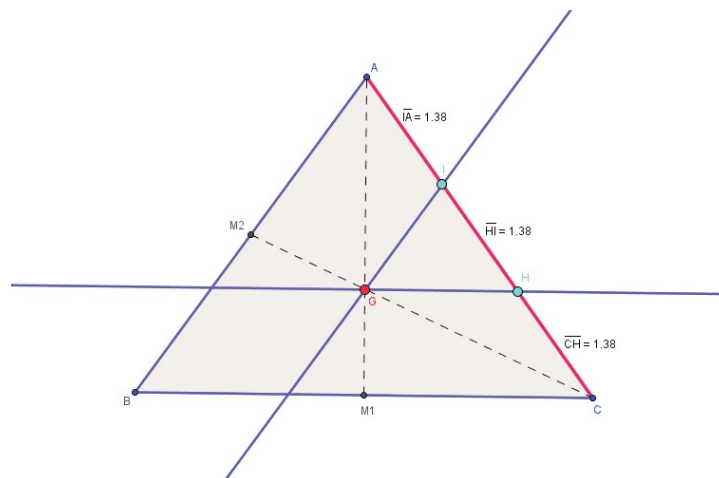


Figura 2: II propriedade para o lugar geométrico do *Baricentro* – Fonte: GEOGEBRA

c) Uma Propriedade para o Incentro

Nessa propriedade o aluno verifica que a reta que une o vértice A de um triângulo [ABC] com o *incentro* I corta a circunferência circunscrita num ponto P equidistante de B, de I e de C.

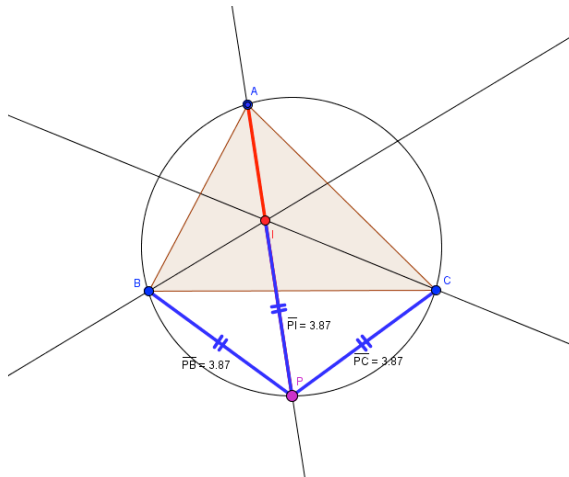


Figura 3: Uma Propriedade para o *Incentro* – Fonte: GEOGEBRA

d) Circunferência Exinscritas – Exincentros

Essa atividade é uma aplicação do ponto notável do triângulo “*incentro*”. A construção dessa atividade é um desafio para o aluno.

Para construir essa figura, primeiramente teremos que encontrar o *incentro* e depois os três pontos externos que equidistam dos lados do triângulo. Porque *incentro* nos dará uma circunferência inscrita no triângulo. Consequentemente sabemos que a circunferência vai tangenciar os lados do triângulo internamente. O desafio foi obter as três circunferências que tangenciam os lados do triângulo externamente. Basta tomar as intersecções das bissetrizes exteriores dos ângulos do triângulo.

Essa atividade exige uma grande habilidade com o *software* por parte do aluno.

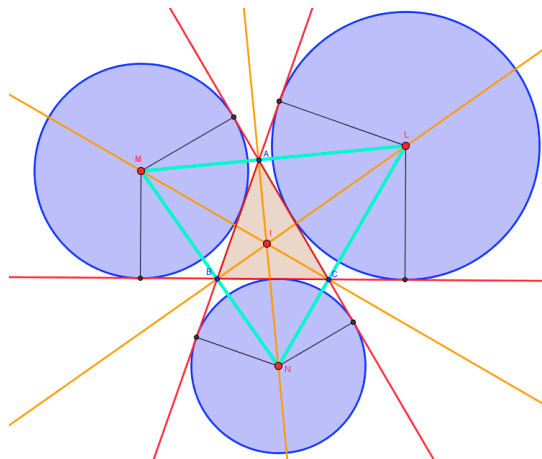


Figura 4: Circunferência *Exinscritas* – *Exincentros* – Fonte: GEOGEBRA

e) Reta de Simson

Essa atividade é uma aplicação do ponto notável *circuncentro* (ponto de interseção das mediatrizes do triângulo), pois utiliza um ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo.

Para a construção dessa atividade, o aluno cria um triângulo ABC, determina o ponto notável *circuncentro*, cria a circunferência circunscrita ao triângulo, cria um ponto P qualquer em cima da circunferência, cria as retas perpendiculares aos lados que passam pelo ponto P, cria as interseções das retas perpendiculares com os lados do triângulo. Finalmente pode verificar que essas três interseções formam uma reta que chamamos de Reta de Simson.

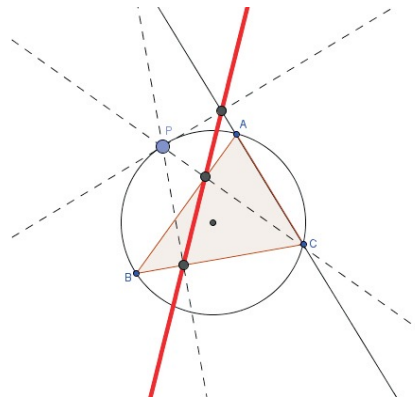


Figura 5: Construção da Reta de Simson – Fonte: GEOGEBRA

f) Propriedade interessante envolvendo o Ortocentro

As paralelas aos lados de um triângulo ABC que passam pelos vértices opostos, formam um triângulo A'B'C' em que $A'B' = 2 AB$, $A'C' = 2 AC$ e $B'C' = 2BC$, em que A, B e C são os pontos médios de B'C', A'C' e A'B' respectivamente.

Como consequência, as alturas do triângulo [ABC] são as mediatrizes de [A'B'C']. As três alturas de um triângulo (que são afinal mediatrizes de um outro triângulo) cortam-se num ponto H. H é o *ortocentro* do triângulo [ABC] e o *circuncentro* de [A'B'C'].

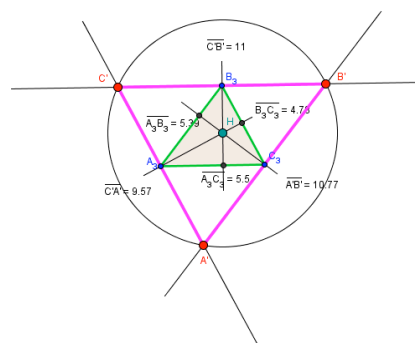


Figura 6: Propriedade interessante envolvendo o Ortocentro – Fonte: GEOGEBRA

g) Lugar geométrico interessante do ortocentro

Quando um vértice (no caso da figura B') de um triângulo ABC se desloca sobre uma reta paralela ao lado oposto A'C', o *ortocentro* (H) sempre descreve uma parábola.

Para fazer esta verificação o aluno seguiu os seguintes passos:

- Primeiro criou um ponto A, na janela de construção do *GeoGebra*. Depois uma reta (b) paralela ao eixo das abscissas.
- Depois criou um triângulo cujo ponto notável seja o *ortocentro*.
- Logo em seguida, irá habilitou a função rastro no ponto (H) e moveu o ponto B', o qual descreveu uma parábola.

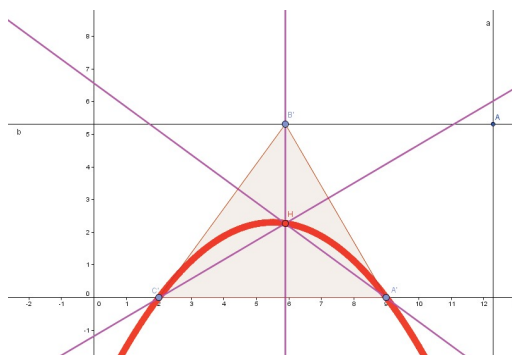


Figura 7: Construção do lugar geométrico do *ortocentro* – Fonte: GEOGEBRA

h) Reta de Euler

Essa atividade se tornou muito interessante porque o aluno teve a possibilidade de num mesmo triângulo, plotar os pontos notáveis: *baricentro* (G) – ponto de interseção das medianas do triângulo –, *circuncentro* (C) – ponto de interseção das mediatrizes do triângulo – e o *ortocentro* (O) ponto de interseção das alturas do triângulo.

Quando o aluno terminou a construção desses três pontos notáveis “C”, “G” e “O”, teve a possibilidade de verificar através da deformação do triângulo, que estes três pontos notáveis estão sempre alinhados.

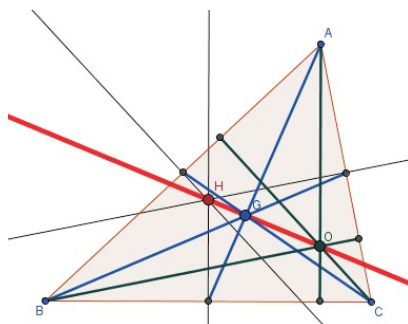


Figura 8: Construção da reta de Euler – Fonte: GEOGEBRA

i) Triângulo Órtico

Dado um triângulo acutângulo, o aluno inscreve nele um outro “triângulo com o menor perímetro possível”. Esse “triângulo com o menor perímetro possível” é obtido unindo-se os vértices da base da altura de todos os lados do triângulo.

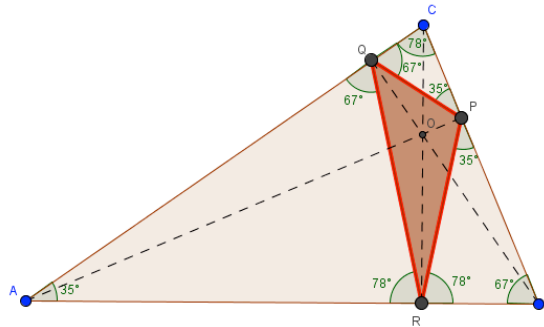


Figura 9: Triângulo Órtico – Fonte: GEOGEBRA

10. Considerações Finais

As atividades foram aplicadas em alunos do Ensino Fundamental e Médio, em alunos da Licenciatura em Matemática e em professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Onde os mesmos reconheceram a importância dos conceitos apresentados e tiveram a possibilidade de verificar que as propriedades não se alteram em situações de mudanças de posições das figuras. Com o auxílio da informática, os alunos tiveram a segurança para defender seus pontos de vista, através da utilização de argumentação baseada no domínio dos conhecimentos teóricos. Isso verificado através de um teste de conhecimento após a resolução da sequência didática e através de questionários aplicados pelo pesquisador.

O ambiente vivenciado fez com que os alunos adotassem uma postura mais reflexiva perante os conceitos de geometria plana, nos levando a refletir como esta abordagem proporcionou uma forma mais atraente de promover a aprendizagem.

Também é válido salientar que a escola necessita acompanhar o desenvolvimento da sociedade. Na realidade, os alunos estão habituados a frequentar as aulas sentados, enfileirados e em silêncio. Essa nova postura de investigar, construir e simular o conhecimento é uma quebra de paradigma, onde alunos e professores assumem uma postura dinâmica na construção individual e coletiva do conhecimento.

Como última etapa da aplicação da atividade foi realizada uma “socialização” sobre as questões trabalhadas com o objetivo de analisar as soluções encontradas pelos alunos. Foi nessa etapa que verificamos a apropriação do vocabulário matemático pelos mesmos, onde

eles usavam naturalmente expressões do tipo: intersecção, circunferência inscrita, mediatriz, bissetriz, triângulo agudo, retângulo e obtuso entre outras expressões de geometria.

Com as atividades elaboradas buscamos explorar o pensamento geométrico desenvolvendo a habilidade de visualização, enfatizando o movimento das figuras. Assim, para o trabalho da geometria dinâmica, optamos pelo *software GeoGebra*, porque tem a facilidade de acesso por ser um *software* livre. Motivado por essa pesquisa estamos elaborando uma apostila com várias sequencias didática para um maior aprofundamento das propriedades dos Pontos Notáveis do Triângulo e de Funções Matemáticas.

11. Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo horizonte: Autêntica, 2003.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e da função cognitiva do pensamento. **Jornal de Ensino e Ciências Cognitivas**, v. 5, 1995.

PONTE, João Pedro; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SHULTE, Alberto P.; LINDQUIST, Mary Montgomery. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento: repensando a Educação**. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

