OPERAÇÕES FIGURAIS FUNDAMENTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Edilene Simões Costa dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
edilenesc@gmail.com

Resumo
O presente artigo tem por objetivo apresentar e analisar uma atividade aplicada a alunos do quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública do Distrito Federal. O aporte teórico apresenta questões epistemológicas e metodológicas relacionadas à apropriação da história da matemática como recurso didático para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. A atividade elaborada com base na concepção histórica propiciou a percepção dos conhecimentos prévios do aluno, além de nos permitir analisar as produções matemáticas em processo de reconhecimento de que, por meios de operações figurais, podemos transformar uma figura em outra de mesma área.

Palavras-chave: História da matemática; recurso didático; ensino fundamental.

1. Introdução

Este artigo tem por objetivo apresentar e analisar uma atividade que foi elaborada, aplicada e analisada no âmbito da pesquisa de doutorado que tinha como objetivo geral: "Analisar a aprendizagem utilizando a história da matemática na concepção de circunstâncias produtoras e sistematizadoras do conceito de área como grandeza autônoma e procedimentos para sua medida, bem como geradora de atividades heurísticas deste conceito inseridas na organização do trabalho pedagógico no 5º ano". A atividade foi aplicada em duas escolas da rede pública do Distrito Federal para alunos do quinto ano, e a professores da educação básica em um curso de formação continuada. Aqui traremos do trabalho com os alunos.

O nosso interesse em elaborar este artigo é apresentar uma das atividades da pesquisa, bem como discutir a produção dos alunos, dado ao fato de nos chamar atenção as ponderações de alguns autores sobre o fato de que a história da matemática pode trazer mais dificuldades à aprendizagem do que promovê-la. Dentre eles, destacamos Grattan-Guinness (1973), ao considerar de que a história é um elemento que dificulta, mas, ao mesmo tempo, esclarece e dá sentido. No entanto, considera inútil como elemento didático em todos os níveis de ensino, com algumas exceções ao ensino superior, citando algumas dificuldades, entre elas que os alunos têm pouco ou nenhum sentido do processo histórico e não possuem capacidade para dominar a ordenação de fatos sucessivos ou simultâneos.

Acordamos que muitos dos argumentos apresentados questionando a potencialidade didática da história da matemática são legítimos, no entanto consideramos que os mesmos não constituem impedimentos à ação pedagógica que mobiliza didaticamente a história da matemática, por conseguinte, consideramo-los um incentivo à nossa pesquisa e um indicador da necessidade de mais investigações nesse sentido.

Utilizamos as concepções históricas do conceito de área para elaborar ou adequar atividades que atendessem às necessidades cognitivas e afetivas específicas dos alunos em questão na pesquisa e os levassem à aprendizagem desse conceito conforme o tratamento que lhe é peculiar nos dias de hoje, falando de outra maneira, a história já está construída, não vamos (re)construí-la. Também não temos como foco em ensinar os conteúdos históricos para estes sujeitos.

Buscamos elementos que indicassem essa construção e, a partir dessa compreensão, definimos escolhas de conhecimentos e procedimentos para a elaboração de atividades que favorecessem aos alunos a construção do conceito de área como grandeza autônoma e sua medida. Logo, nossa ênfase foi sobre os conceitos matemáticos, buscando na história possibilidades de respostas específicas a problemas e à questões matemáticas.

A seguir apresentamos o contexto histórico da atividade em questão neste artigo. Denominamos “um pouco de história” pelo fato de cada atividade da pesquisa definir o contexto histórico gerador, quando a história era trabalhada de maneira implícita com aluno. Quando trabalhada explicitamente, a mesma estava inserida na atividade, por exemplo, iniciávamos narrando ao aluno tal fato histórico.

2. Um pouco de história do conceito de área

As bases históricas estão no problema indiano de transformar um quadrado em um retângulo de mesma área e as ideias chinesas de utilizar quebra-cabeças pra resolver problemas de área.

Por meio dos *Sulbasutras* é possível termos conhecimento da matemática desenvolvida na Índia antiga. Os *Sulbasutras* compreendem medições e construções dos altares para sacrifícios por meio da elaboração de linhas traçadas de leste para oeste, de perpendiculares, de quadrados, de retângulos, de trapézios, de triângulos e losangos, iguais em área, a um determinado quadrado. Então, eles apresentam a transformação de quadrados em retângulos e vice-versa, de quadrados em círculos e vice-versa, ou seja, as figuras eram transformadas em quadrados de mesma área.

ISSN 2178-034X

Os altares de fogo foram prescritos de formas diferentes. De acordo com o benefício específico, sacrifício realizado no *syenacit* (forma de um falcão) era para alcançar o céu e, no praugacit (forma de triângulos isósceles), para destruir os inimigos e assim por diante. Mas todas estas formas diferentes tinham que ter estritamente a mesma área de 7 ½ purushas quadrados. Assim, desenvolveram métodos para transformar uma figura geométrica em outra, especialmente o quadrado, em outras figuras geométricas de mesma área. Portanto, os *Sulbasutras* descritos apresentam diferentes métodos de alterar as formas das figuras, mantendo as mesmas áreas (AMMA, 1979, p. 32).

Os quatro principais *Sulbasutras*, que são matematicamente os mais importantes, são aqueles escritos por *Baudhayana, Manava, Apastamba e Katyayana*. De acordo com Amma (1979) a comparação de tais textos com outros textos védicos aponta que eles foram datados de cerca de 800 a. C. a 200 d. C., o mais antigo é o que foi atribuído a Baudhayana, escrito por volta de 800 a. C. a 600 a. C. No entanto, é provável que alguns conhecimentos neles tratados sejam anteriores a 1.500 a. C.

> É interessante observar que apesar do conhecimento geométrico encontrado nos S*ulbasutras* estar relacionado às exigências teóricas para construção de altares de tijolos, a tecnologia de construção de tijolos cozidos pertencia à cultura Harappa. Há, portanto a possibilidade de que o conhecimento geométrico contido nos *Sulbasutras* já existisse no período Harappa e também pode ser uma evidência da possibilidade de haver alguma relação entre estas duas civilizações. De qualquer modo são os S*ulbasultras* as fontes do conhecimento geométrico da Antiga Índia. (GASPAR, 2003).

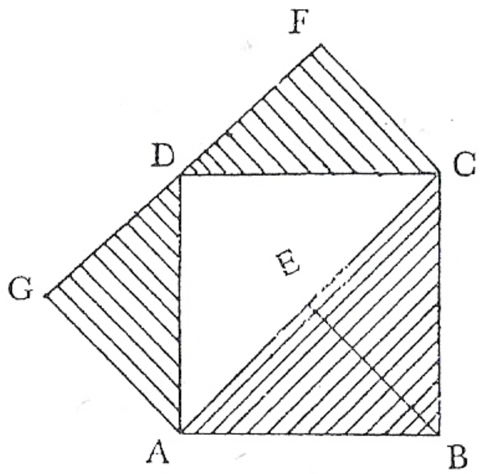
Para Amma (1979), talvez a primeira declaração do teorema popularmente associado com o nome de Pitágoras (540 a. C.) é a mais importante contribuição da Índia antiga para o desenvolvimento da matemática. No entanto, o atual enunciado do teorema nos *Sulbasutras* não era referente ao triângulo retângulo, o enunciado indiano é relativo ao retângulo: a área do quadrado construído sobre a diagonal do retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados desse retângulo. É um teorema sobre retângulos.

É verdade que a maioria dos povos antigos conhecia e utilizava o triângulo retângulo 3, 4, 5 para obter um ângulo reto e os registros babilônicos contêm uma lista de números pitagóricos. Contudo, essa autora considera o significado geométrico completo do teorema que relaciona entre si os lados de qualquer triângulos-retângulos; talvez eles tenham sido adotados primeiramente na construção de altares de sacerdotes védicos.

Ainda segundo essa autora, dois importantes matemáticos alemães A. Bürk e M. Cantor discutiram a questão detalhadamente e chegaram à conclusão de que o teorema era conhecido na Índia, o mais tardar no século 8 a. C., data do mais antigo *Sulbasutra, o de Bauhãyana*. Por isso, é provável que o teorema do quadrado da hipotenusa fosse conhecido na Índia muito antes do que o período dos *Sulbasutras* (AMMA, 1979, p. 17).

Baudhãyana, matemático indiano, que viveu no século X a. C., trabalhava com um método de transformar o quadrado em retângulo. Ele escreveu os primeiros textos indianos sobre a construção de altares. Por seus métodos, podemos dizer que ele já aplicava o teorema de Pitágoras: “uma corda esticada ao longo do comprimento da diagonal produz uma área que lados verticais e horizontais fazem juntos”.

Figura 1 - Transformação do quadrado em retângulo



Fonte: AMMA, 1979, p.38

Baudhãyana e *Kãtyãyana* usavam o seguinte método para transformar um quadrado em um retângulo de mesma área: desejando-se transformar um quadrado em um retângulo, deve-se cortar a diagonal no meio, dividir uma parte Assim, sendo ABCD um quadrado dado. Ele é cortado ao longo de CA para formar dois triângulos retângulos. O triângulo ABC cortado na metade ao longo da altura BE. As duas metades BEA e BEC são removidas para as posições DFC e DGA. Logo, o retângulo ACFG tem área igual ao quadrado ABCD. O problema desse método é que ele não permite transformar o quadrado em um retângulo com um lado qualquer (AMMA 1979. p. 38).

Para calcular a área de uma figura qualquer, os gregos costumavam transformá-la em um quadrado equivalente, utilizando régua não graduada e compasso não flexível, já que sabiam como calcular a área de um quadrado. Podemos observar, citando como exemplo a preposição 14, do Livro II, dos Elementos de Euclides, na qual ele mostra ser possível, a partir de uma figura retilínea dada, determinar um quadrado equicomposto, ou seja, obter a quadratura da figura. Para os gregos, determinar a quadratura de uma figura dada significava determinar a área desta figura (ROQUE, 2012, p. 183).

Então, o processo de comparar superfícies por recorte e colagem remete-nos aos procedimentos utilizados por diferentes civilizações da Antiguidade – Egípcia, Babilônica, Indiana, Chinesa e Grega, na resolução de problemas envolvendo área. Os problemas mais comuns de medição baseados nos volumes de sólidos e áreas das figuras planas, na maior parte, eram calculados corretamente. Áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles foram obtidas corretamente, provavelmente por um processo de "decomposição e

ISSN 2178-034X

composição", semelhantes aos encontrados nas geometrias indiana e chinesa (JOSEPH, 2000, p. 82).

Apresentamos a seguir uma das atividades da pesquisa. Esta atividade está baseada nos métodos indianos, chineses e gregos de transformar uma figura em outra de mesma área. Adequamos o contexto trabalhando com figuras e por meios de operações figurais, trabalhamos os alunos puderam concluir que figuras diferentes podem ter a mesma área. Para a análise da construção do conhecimento utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), na qual os invariantes operatórios são teoremas em ação e conceitos em ação, constituintes da base conceitual implícita que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes. Assim, é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito. Além disso, apoiamo-nos nas considerações de Duval (1993, 2003, 2011), acerca do desenvolvimento do pensamento matemático, quando considera que as representações semióticas produzidas pelos sujeitos, além de exteriorizar as suas representações mentais são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento.

3. Atividade - compor figuras a partir de três figuras dadas

3.1 Objetivo da atividade

Levar os alunos a perceberem que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes.

3.2 Material

Um conjunto de 3 peças de cartolina conforme a figura abaixo (para cada aluno).

3.3 Procedimento

1) Dividir a sala em grupos de 4 alunos.

2) Entregar o conjunto com as três peças para os alunos.
3) Identificar se os alunos conhecem as peças.
4) Fazer questionamentos sobre a área das figuras: qual tem a maior área? Quais têm áreas iguais?
5) Questionar se existe alguma relação entre as áreas das figuras.

3.4 Situação 1

a) Utilizando as três peças construir uma figura.

b) Pedir para o aluno registrar, em forma de desenho, a figura que ele construiu.

c) Qual foi a figura que você construiu?

d) Qual é a área dessa figura?

e) Provocar no aluno a conclusão de que, se não houver sobreposição de figuras, a área total é igual à soma das áreas de cada figura.

f) Montar um painel com todas as figuras construídas.

g) Mediar: o que podemos dizer sobre a área dessas figuras?

h) Provocar no aluno a conclusão de que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Na seção seguinte apresentamos a análise, as representações produzidas pelos alunos, apoiamo-nos na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1993, 2003,2011). A função da representação é ajudar o pensamento e a organização da ação.

3.4 Análise

Ordenamos, em cada questão, as respostas dadas pelos alunos em grupos por semelhanças entre as soluções ou procedimentos apresentados pelos mesmos. Em cada grupo, selecionamos uma resposta para representar o grupo e apresentamos no trabalho.

Questão 1 - Você conhece essas figuras?

Como esperávamos, os alunos conheciam as figuras. Tratava-se de triângulos por que tinham três lados.

Questão 2 - As áreas dessas figuras são iguais ou diferentes?

“Tem dois triângulos pequenos com áreas iguais e um grande com área diferente”.

“Os dois pequenos têm áreas iguais e o grande área diferente”.

“O triângulo grande tem mais área e os dois pequenos menos área”.

“Os pequenos têm áreas iguais e o grande não tem área igual”.

Questão 3 - Existe alguma relação entre as áreas dessas figuras? No caso de sim, qual é a relação?

Os alunos colocaram números nos triângulos e responderam:

“O número 1 tem a metade da área do 2”.

“Os dos pequenos formam um grande e o grande é o dobro do pequeno”.

“Juntando os triângulos 2 e 3 ficarão do mesmo tamanho do número 1. Os triângulos 2 e 3 são a metade de 1”.

“Sim, a área do grande é o dobro da área do pequeno”.

“Dá para colocar os dois pequenos no grande. A área do pequeno é a metade do grande”.

Questão 4 - Utilizando as três peças, sem sobreposição, construir uma figura. Desenhe essa figura aqui.

Pedimos para os alunos desenharem, em vez de utilizarem a colagem, para que eles fossem comparando a figura formada e as partes ao longo do resto da atividade. Outro motivo era para que os alunos continuassem com as peças para manuseá-las. Ao final, foi construído em cada turma um cartaz com as figuras formadas.

Questão 5 - Qual figura você construiu?

Um triângulo, barco, gato, árvore de natal, retângulo, quadrado, peixe, trapézio, casa, pipa, tenda, paralelogramo, losango, uma montanha.

Questão 6 - Qual é a área dessa figura que você construiu? Justifique sua resposta.

“A área é de dois triângulos pequenos e um grande”.

“Dois triângulos pequenos e um grande”. Esta resposta foi a mais apresentada.

“Um triângulo grande e dois pequenos pode ser dois triângulos grandes ou quatro triângulos pequenos”.

“Ela mede 3 triângulos”.

“Ela mede 4 triângulos pequenos”.

“A área da minha figura é igual a dois triângulos grandes juntos”.

Consideramos inicialmente, que os alunos teriam dificuldade com essa questão por trabalhar com unidade de medida diferente. Explicamos várias vezes o que a questão pedia. No entanto, eles trabalharam tranquilamente com duas unidades de medidas; um número considerável entendeu que poderia transformar uma unidade em outra, quando responderam que a área de sua figura podia medir 4 triângulos pequenos ou dois grandes. Houve uma única resposta na qual a aluna se expressou da seguinte forma: “São 3 desenhos dois que tem 45°

que são os pequenos e o outro tem 90° que é grande”. Ao questioná-la sobre sua resposta, ela explicou que um dos triângulos tinha 90°, e sabia que, ao juntar os dois triângulos, teria outro ângulo de 90°. Como eles eram iguais, então, cada triângulo ficou com a metade de 90°. Primeiramente consideramos que aquela aluna não tinha o domínio da propriedade de reversibilidade. Ao mediarmos, entendemos que ela, assim como a turma, havia aprendido a trabalhar com ângulos internos de um triângulo. A professora da turma em que havia surgido a discussão resolveu rever tal conceito por meio de dobradura. Constatamos que as professoras colaboradoras, em suas aulas, trabalhavam conceitos abordados na resolução da atividade da pesquisa.

Questão 7 - Foi montado um painel com todas as figuras construídas na sala. Pergunta-se: o que podemos dizer sobre a área dessas figuras?

“Podemos dizer que todas figuras têm áreas iguais”.

“Que são do mesmo tamanho em área”.

“Juntando os dois triângulos pequenos e um grande podemos fazer figuras diferente de mesma área”.

“Que todas as áreas são iguais”.

“Que todas as figuras do painel tem áreas iguais e só muda o desenho”.

“Que as áreas são diferentes e só as figuras são iguais e só muda os desenhos”. Esta aluna entendeu o que era área, mas ainda não havia compreendido a medida de área. Tivemos que explicar algumas vezes para ela. Nós percebemos que ela e mais alguns alunos precisariam de mais tempo e mais atividades para compreender esse conceito. Acordamos em ficar atentas àqueles alunos.

Um estudante escreveu: “Todas as figuras são iguais só que depois ficaram com os formatos diferentes”. Esse aluno expressou-se verbalmente assim: “Todas elas são formadas pelas mesmas figuras, dois triângulos pequenos e um grande, depois cada desenho ficou com um formato diferente. Todo desenho tem área igual”.

Uma aluna escreveu: “Que elas têm área maior menor, são do mesmo tamanho. São diferentes”. Quando conversamos com essa aluna, ela verbalizou: “elas todas são formadas por triângulos grandes e pequenos, as áreas são iguais, as figuras que são diferentes na forma”. A grande maioria dos alunos participantes da pesquisa tinha essa dificuldade de expressar por escrito tudo o que verbalizava.

Questão 8 - Observando o painel, a que conclusão podemos chegar?

“Figura diferente pode ter a mesma área”.

"Que todas têm a mesma área".

"Se juntarmos figuras pequenas elas formam uma figura grande e as áreas são iguais e as figuras são diferentes".

"Figura diferente pode ter área igual".

"Que todas as figuras são soma das três". Quando questionado, o aluno respondeu que "a área das figuras era igual à soma das áreas dos três triângulos".

"Com triângulos podemos fazer muitas coisas, e apesar das figuras serem diferentes elas têm as mesmas áreas".

"Juntando mais de 2 triângulos podemos fazer muitos desenhos".

"A conclusão é que a gente recebeu só três figuras e transformamos em vários desenhos".

"Podemos chegar que todas as figuras do painel tem a mesma área".

"Que quando junta as duas pequenas fica um triângulo do tamanho do grande". A aluna que escreveu essa resposta construiu um quadrado, juntou os dois triângulos pequenos de mesmo tamanho, formando um triângulo maior, que, junto com o outro maior, formaram um quadrado. Ela continuou fazendo afirmação ao olhar para a sua figura, então, pedimos para que ela observasse o painel. Ela era tão tímida que mal levantava os olhos do seu desenho. Ao percebermos isso, voltamos depois à mesa da aluna, quando esta não estava em evidência, para reiniciarmos a mediação. Finalmente, ela compreendeu que era para estabelecer uma relação entre as figuras construídas por todos os alunos. Esse tipo de procedimento, atendimento individualizado com mais atenção, era possível por estarmos em duas professoras na sala. Enquanto uma cuidava de casos particulares, a outra prestava atenção à turma de forma geral.

Um número pequeno de alunos apresentou dificuldade em responder essa questão corretamente. Como o nosso objetivo era que todos construíssem os conhecimentos desejáveis na atividade, fomos pedindo a determinados alunos para que comparassem dois desenhos dos painéis. Para isso, usamos questionamentos que se assemelhavam aos seguintes: quem construiu essa figura? E essa? Ela se parece com o quê? Qual é o nome da sua figura? O que você sabe da sua figura? Quantos lados ela tem? Ela foi formada por quantas figuras? Qual é o nome dessas figuras? Todos os triângulos tem a mesma área? Qual é a área da figura que você construiu? Se a figura tal tem área igual a dois triângulos pequenos e um grande e a outra figura tem área igual a dois triângulos pequenos e a outra tem área igual a um triângulo grande, podemos dizer que essas figuras têm áreas iguais ou diferentes? Ah, Então figuras diferentes podem ter áreas iguais?

Se o aluno respondesse que a área era dois triângulos grandes, fazíamos as perguntas utilizando essa unidade de medida e assim por diante. Depois escolhíamos três figuras e iniciávamos a mediação provocando os alunos por meio dos questionamentos. Envolvíamos os alunos que estavam com dificuldades na formalização dos conhecimentos, ou seja, aquele aluno com dificuldade era convocado à discussão. É claro que os demais alunos da turma participavam respondendo ou gritando, tentando se antecipar ao sujeito para o qual a pergunta havia sido dirigida. Finalmente aumentamos para quatro figuras e perguntamos à turma: o que podíamos concluir em relação a todas as figuras do painel e suas respectivas áreas?

Os teoremas em ação apresentados pelos alunos na atividade

A unidade de medida de área pode ser o triângulo pequeno.

A unidade de medida de área pode ser o triângulo grande.

Para medir a área de uma única figura, posso usar duas unidades de medidas diferentes, no caso o triângulo grande e o triângulo pequeno.

Medir área é comparar área.

Medir área é dizer quantas vezes a unidade de medida cabe na área que está sendo medida.

Uma figura pode ser transformada em outra mantendo a medida da área.

A partir dos procedimentos e das respostas dos alunos institucionalizamos: Figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Como já analisado por Duval (2003), nossos sujeitos também apresentaram, na resolução da atividade, a operação merológica de reconfiguração na construção do raciocínio levando-se em conta a sobreposição e, tendo como filtros desse conhecimento, a ajuda entre pares, reconfiguração, a forma visualizada e desenhada no papel e caracterização de figuras diferentes formadas a partir dos três triângulos que receberam.

Em outros termos, a atividade nos permitiu analisar as produções matemáticas em processo de reconhecimento de que, por meios de operações figurais, podemos transformar uma figura em outra de mesma área. Uma atividade na qual o aluno não precisava proceder cálculos algébricos, o aluno utilizou as operações merológicas de reconfiguração as quais se apoiam sobre a percepção. A atividade tinha o objetivo de que a criança desenvolvesse o simples reconhecimento perceptivo das figuras o qual consideramos um facilitador para a realização das próximas atividades, em busca da construção do conceito de área, como grandeza autônoma.

Conforme Duval (2011), é preciso ter tomado consciência dos tipos de operações figurais e ter adquirido a mobilidade de focalização dimensional do olhar para reconhecer as múltiplas unidades figurais que se fundem no reconhecimento imediato de qualquer forma 2D. Temos aqui uma divisão merológica de uma forma em unidades figurais de mesma dimensão (2DX2D) e a sua reconfiguração, em outra figura de mesma área, mas com outro contorno global.

4 Considerações finais

Um novo conceito matemático é construído na articulação com outros conceitos e depende fortemente das situações a serem enfrentadas pelos sujeitos nas quais utilizarão estratégias pessoais na resolução. É importante a apresentação do conteúdo dentro de um contexto significativo para o aluno. No caso de nossa pesquisa, o contexto é histórico.

Portanto, pressupomos que, como primeira perspectiva do professor pesquisador que deseja utilizar a história como recurso na elaboração de contextos significativos aos alunos, a necessidade é conhecê-la e instrumentalizar-se dela a fim utilizá-la. O professor que não é, necessariamente, um historiador, deve inicialmente adquirir uma base do conhecimento da evolução histórica do conteúdo com o qual irá trabalhar: as ideias-chave, os questionamentos, os problemas que fundamentaram tal evolução histórica, o conhecimento dos aspectos essenciais que historicamente geraram as significações de tais conceitos.

Após a apropriação do conhecimento histórico do conteúdo a ser desenvolvido, o próximo passo deve envolver a transposição didática desse conhecimento em atividade produtiva para o aluno, ou seja, voltada à aprendizagem que é concebida a partir de uma visão de sujeito ativo, crítico, criativo, investigador. Nesse contexto, as reconstruções históricas serão dadas por sequências didáticas que deverão provocar nos alunos interesse acerca do tema em estudo e participação como sujeito que aprende. O historiador matemático é o que conta uma história. Quando o pesquisador quer apropriar-se da história para ensinar, sua postura é de alguém que olha para o ensino da matemática por meio da história.

Por meio desta atividade e do trabalho de pesquisa como todo, percebemos que é possível elaborar e desenvolver, em sala de aula, atividades que permitam ao aluno dos anos iniciais do ensino fundamental a participação direta na construção de conceitos matemáticos de forma criativa, ética e colaborativa, tornando o ensino mais real e dinâmico. O que nos leva a considerar que a história da matemática, nas devidas proporções, pode ser tomada com um elemento norteador de práticas pedagógicas e um instrumento que promove aprendizagens e construções de conceitos matemáticos por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

5 Referências

AMMA, T. A. S. *Geometry in Ancient and Medieval India*. 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg, vol. 5, p. 37-65. 1993.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

______. *Ver e ensinar a matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GRATTAN-GUINNESS, I. Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 4, p. 421-453, 1973.

JOSEPH, G. G. *The Crest of the Peacock:* non-european roots of mathematics. 2. ed. USA: Princeton University Press, 2000.

ROQUE, T. *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUNNER, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

ISSN 2178-034X