VIGILÂNCIA EPISTEMOLÓGICA DE CHEVALLARD EM UM ESTUDO DE CASO SOBRE O CONCEITO DE DIVISIBILIDADE EM UMA TURMA DO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rúbia Carla Pereira
Instituto Federal do Espírito Santo
profrubiacarla@gmail.com

Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Instituto Federal do Espírito Santo
vilelapaiva@gmail.com

Rony Cláudio de Oliveira Freitas
Instituto Federal do Espírito Santo
freitasrco@gmail.com

Resumo:
Este trabalho apresenta uma análise do processo de *didatização* do saber escolar sobre o conceito de divisibilidade, procurando identificar possíveis distorções na adaptação do saber científico para saber escolar. Para isso, faz-se o uso da teoria da Transposição Didática, em especial do processo de *vigilância epistemológica*, elemento desta teoria, proposta pelo matemático, Chevallard, estudioso da didática da matemática francesa. Tal teoria é um instrumento de verificação das possíveis distorções ocorridas durante o processo de ensino e aprendizagem e subsidia, em um primeiro momento, a identificação do conceitual do conteúdo de divisibilidade, tanto na área de Teoria dos Números, quanto na adaptação para a educação básica. Já em um segundo momento, analisou-se o processo de transposição desse conceito em uma turma de 6° ano do ensino fundamental, sob o exercício da vigilância epistemológica, configurando que o processo de *didatização* pode, por vezes, causar rupturas conceituais desse conteúdo na educação básica.
Palavras-chave: Divisibilidade; Transposição Didática; Vigilância Epistemológica.

1. Introdução

É responsabilidade da matemática escolar a transformação do saber matemático científico em saber escolar, de forma a torná-lo ensinável aos alunos (SAVIANI, 1994). Este fenômeno de adaptação do saber é o objeto de estudo da Teoria da Transposição Didática no âmbito da relação triangular, professor-aluno-saber, e além dela.

Para Chevallard (1991), o saber *sábio* ou científico, ao longo de seu processo de escolarização, passa por processos de adaptações desde a textualização até o trabalho efetivo do professor na sala de aula. Nesse contexto, ocorre a *didatização* do saber que pode causar distorções conceituais. Como toda aprendizagem se faz sob a influência de uma transposição

(PAIS, 2011), essas distorções podem causar prejuízos à construção de conceitos matemáticos. Nesta direção, a Teoria da Transposição Didática apresenta um processo importante para o funcionamento didático do saber: a *vigilância epistemológica*.

Assim, neste trabalho faz-se um estudo sobre a teoria da Transposição Didática focando nas relações professor-aluno-saber. Para isso, faz-se uma análise do processo de *didatização* que ocorre na construção do conceito de divisibilidade, em especial, na discussão deste conteúdo e o número zero, numa turma de 6° ano do ensino fundamental. Inicialmente, será apresentada uma revisão da Teoria da Transposição Didática, assim como o conceito de divisibilidade em Teoria dos Números no contexto do livro didático da educação básica, e por fim, analisaremos como ocorre o exercício da *vigilância epistemológica* deste saber numa turma de 6° ano do ensino fundamental.

2. A Teoria da Transposição Didática

A Teoria da Transposição Didática está estruturada sobre o sistema de ensino, composto pela comunidade científica, pais, sistemas de gestão da educação etc., e sobre o sistema didático, composto pelo professor, o aluno e o saber, enfatizando este último e expondo a necessária distância entre o saber científico e o saber ensinado, e propõe analisar o sistema didático a partir dessa dimensão com base na epistemologia do saber ensinado (CHEVALLARD, 1991, p.16). Essa proposta não deteriora o saber escolar frente ao saber sábio, mas favorece o reconhecimento de especificidades do saber matemático escolar, situando-o dentro de um contexto próprio, com demandas e tratamentos específicos.

Frente ao objeto principal da sua teoria – o saber – Chevallard (1991) define a Transposição Didática:

> Um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O “trabalho” que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado *Transposição Didática*. (CHEVALLARD, 1991, p.45. Tradução nossa. Grifos do autor).

Assim, a Transposição Didática é um conjunto de processos adaptativos que torna o objeto de saber (saber sábio) em objeto de ensino (saber a ensinar). Esses processos são: a epistemologia do regime didático do saber (noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas), a noosfera, as criações didáticas, a *vigilância epistemológica*, a

ISSN 2178-034X

desincretização do saber, a *despersonalização* do saber, a *programabilidade* do saber, a publicidade do saber, o controle social das aprendizagens, a dialética antigo/novo, a obsolescência externa e interna, a cronogênese e a topogênese.

As noções matemática, paramatemáticas e protomatemáticas dizem respeito ao saber matemático. As noções matemáticas são os conteúdos de saber. Já as noções paramatemáticas são ferramentas auxiliares da atividade matemática, como noções de parametrização, demonstração, etc. E as noções protomatemáticas são as capacidades desenvolvidas, como criar e testar hipóteses, análise de dados e outras.

Outro elemento citado na teoria de Chevallard (1991) é a noosfera, que é onde ocorre a interação entre o sistema de ensino (professor-aluno-saber) e a sociedade, por exemplo, as discussões sobre os objetos de saber que se tornam escolarizáveis.

Já as criações didáticas são "conteúdos" criados motivados pelas necessidades do ensino para atuarem como recursos para outras aprendizagens. Esses conteúdos são úteis apenas no contexto escolar (PAIS, 2015, p.17).

O processo de adaptação do saber sábio para ensinável pode causar distorções conceituais no objeto ensinado. Cabe então aos agentes do sistema de ensino, professores e comunidade científica, exercer a *vigilância epistemológica* para que essas distorções não ocorram. Assim, esse processo preserva a distância necessária entre o saber sábio e o saber escolar, ao mesmo tempo em que garante que tal separação não cause erros conceituais ao objeto de saber.

> O conceito de Transposição Didática, enquanto refere-se à trajetória do saber sábio para o saber ensinado, e, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha o questionamento necessário, ao mesmo tempo em que se torna a sua primeira ferramenta. Para didática, é uma ferramenta que permite reconsiderar, examinar as evidências, colocar em cheque as ideias simples, se livrar de familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em uma palavra, que lhe permite exercer sua vigilância epistemológica. (CHEVALLARD, 1991, p.16. Tradução nossa.).

O professor exerce, no decorrer do seu trabalho, a *vigilância epistemológica* quando questiona sobre a natureza do objeto, como se concebe esse objeto no ensino e qual a relação entre a construção desse objeto e sua abordagem didática.

Da academia à escola básica, o saber passa por várias transformações que o distancia cada vez mais do saber sábio. O processo de vigilância epistemológica é uma grande contribuição da teoria da Transposição Didática, pois diante do inevitável distanciamento entre o saber científico e escolar, ele traz à reflexão sobre o quê e como ensinar de forma que seja possível manter a fidelidade ao conceito matemático.

A *desincretização*, *despersonalização*, *programabilidade* e publicidade do saber são processos da transposição didática associados à construção textual de um determinado conteúdo ou teoria matemática. A *desincretização* diz respeito à separação e organização da teoria em áreas. A despersonalização é o processo que torna um determinado saber desvinculado do seu autor, assim como a *descontextualização* desvincula o saber do contexto histórico o qual foi desenvolvido.

Visto que um determinado objeto de saber já se encontra descontextualizado, despersonalizado e *desincretizado* em áreas, ocorre o processo de *programabilidade*, que consiste em estabelecer uma programação segundo uma sequência didática progressiva e racional. Por fim, acontece o processo da publicidade do saber, que é a definição explicita do saber que deverá ser ensinado (PAIS, 2015, p.33). Isso, por sua vez, possibilita o controle social da aprendizagem, que se expressa nas práticas de avaliação para certificações oficiais.

Sobre a dialética Antigo/Novo, Chevallard (1991) e outros teóricos da linha da didática francesa, consideram que a construção do saber matemático é motivada por uma problemática que deve ser tratada por conhecimentos matemáticos antigos e novos. Antigo, porque o problema proposto deve abordar conhecimentos prévios, de forma que estes já não são suficientes para responder a situação proposta, mas motivam a expansão do conhecimento e motivam o saber novo que, por sua vez, é aquele que impulsiona e justifica a relação didática. Depois de passado o tempo de ensino, esse saber se classificará em antigo, em um ciclo de superação dessa dialética e de aprendizagem contínua.

> Na *relação didática* (que une professor, alunos e saber) o professor está a serviço da máquina didática cujo *motor* é a contradição entre o antigo e o novo: alimenta seu funcionamento introduzindo objetos transicionais que são os objetos de saber convenientemente convertidos em objetos de ensino. (CHEVALLARD, 1991, p.81. Grifos do autor. Tradução nossa.).

Os processos de obsolescência externa e interna, a cronogênese e a topogênese dizem respeito ao tempo didático.

ISSN 2178-034X

A obsolescência interna refere-se ao saber escolar em relação à duração de um ciclo de ensino, isto é, o objeto de saber superou a contradição antigo/novo e se tornou "antigo" para continuar. Já a obsolescência externa é um processo que ocorre em relação à sociedade, ou seja, é um desgaste histórico e cultural do saber, que já não é mais útil para a economia do sistema de ensino.

Chevallard (1991) evidencia diferenças temporais entre o professor e o aluno em relação ao saber. A cronogênese figura no fato de o professor saber mais conteúdos matemáticos, nas diversas áreas e suas inter-relações, o que o instrumentaliza para programar o tempo de ensino e o de aprendizagem. Por outro lado, a topogênese diz respeito à dimensão e ao domínio do objeto de saber que o professor detém e que o aluno ainda não. Além disso, o professor tem conhecimento de técnicas para ensinar, ou seja, para que o aluno desenvolva não só a dimensão conceitual do objeto de saber, mas as competências e as capacidades críticas.

3. A divisibilidade no contexto da Teoria dos Números e na Educação Básica

O estudo dos conceitos matemáticos fica mais evidente quando considera a questão de sua especificidade científica e educacional. Segundo Pais (2011), a "natureza e o estatuto científico de cada disciplina, moldada pela sua trajetória histórica, determina uma forma particular de valorizar a dimensão educacional de cada saber" (PAIS, 2011, p.29).

Em particular, o conceito de divisibilidade permeia tanto a matemática científica, quanto a matemática escolar. Daí faz-se necessário um trabalho de transposição didática desse saber, de forma que o distanciamento necessário não crie distorções conceituais no conteúdo.

Para a área de Teoria dos Números define-se por divisibilidade quando um número natural a divide um número natural b, e escreve-se $a|b$, e existe um número natural c, tal que $b = a{\cdot}c$. Assim, pode-se compreender que o conceito de divisibilidade é uma relação entre dois ou mais números naturais (ou inteiros), associado à operação de multiplicação (HEFEZ, 1993, p.66).

Na definição de divisibilidade, não existe restrição para os números a e b, exceto que se a for nulo, então b também deve ser nulo, e neste caso, o número c não é único, o que não fere a definição. Daí, uma das propriedades de divisibilidade é $n|n$, para todo n inteiro, ou seja, para o caso de $n = 0$, tem-se que $0|0$, pois $0 = 0 \cdot p$, para todo p inteiro.

Já na matemática básica, a divisibilidade é trabalha nas relações de múltiplo, divisível e divisor, e no contexto escolar, o conceito dessas relações estão associadas à divisão exata. Ou seja, dizemos que a é múltiplo de ou divisível por b se existe c, tal que $a = b \cdot c$ e também se $a \div b = c$ e o resto dessa divisão é nulo. Ou ainda, dizemos que b é divisor de a.

Dessa forma, fica evidente a operação de divisão exata para conceituar a relação de divisibilidade é uma criação didática para facilitar o funcionamento didático desse conteúdo na matemática escolar.

Assim, para exercer a *vigilância epistemológica* neste caso, é importante que o professor trabalhe a adaptação do conteúdo científico para o escolar no que se refere ao número zero. Pois é necessária a construção significativa do fato de o zero ser múltiplo de todos os números naturais e, no entanto, não é divisor de nenhum deles.

4. Metodologia

Esta pesquisa é parte de uma pesquisa maior e retrata um estudo de caso em uma turma de 6° ano do ensino fundamental, para analisar como acontece o exercício da *vigilância epistemológica* no processo de *didatização* do conceito de divisibilidade. Para isso, observaram-se dez aulas deste conteúdo em uma escola particular da região metropolitana de Vitória, Espírito Santo.

Para a construção dos dados foram observadas 10 aulas do conteúdo proposto e gravados áudios.

A Teoria da Transposição Didática subsidiou as análises dos dados, sendo observadas as seguintes questões:

- Distorções do conceito de divisibilidade ocorridas na *didatização* do saber nos áudios das aulas observadas na turma de 6° ano do ensino fundamental;

- As inter-relações entre o saber escolar construído e o saber científico.

5. Resultados e Conclusões

ISSN 2178-034X

A professora Sandra (nome fictício para a professora do 6° ano do ensino fundamental) construiu o conceito de divisibilidade explicando a relação de múltiplo e de divisível com base nas operações de multiplicação e de divisão, e nesse sentido, a *didatização*, no que se refere à associação do conceito de divisibilidade com a divisão exata, não feriu o saber sábio. Para Pais (2015) a Transposição Didática deve ser praticada de tal forma que concilie o trabalho dos matemáticos e o do professor, e assim, facilite o exercício da vigilância epistemológica.

> É preciso ainda relacionar o trabalho do professor de matemática com o trabalho do matemático, não excluindo, evidentemente, a possibilidade de conciliação dessas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático acaba determinando uma influência considerável na prática pedagógica. (PAIS, 2015, p.30).

Outra prática da vigilância epistemológica ocorre sobre o enunciado no livro didático que descreve: “Um detalhe: o número zero é múltiplo dele mesmo. Entretanto, zero não é divisor de si, porque não é possível dividir por zero!” (IMENES; LELLIS, 2010, p.115).

Nesse enunciado, observa-se a preocupação do autor com a *vigilância epistemológica* do saber em todos os detalhes. Pode ocorrer, para algum aluno de 6° ano do ensino fundamental, a confusão entre múltiplo/divisível e divisor. No enunciado, o autor afirma que “zero é múltiplo de si mesmo”, pois a relação de múltiplo tem sua definição na operação de multiplicação, definida para o número zero. Mas a relação divisor, no contexto do saber escolar, não é equivalente à relação de múltiplo ou divisível, pois sua definição está associada à operação de divisão, não definida para o zero.

No entanto, a abordagem com o zero, sugerida pelo livro didático, sofreu distorção, como se pode observar no recorte da aula a seguir. Neste diálogo, adotou-se a legenda P para professora e Al para os alunos.

> A1 – É verdade que zero dividido por zero dá 1?
> P – É, é verdade!
> A2 – O quê? Como assim, zero dividido por zero dá um?
> P – Vamos discutir? Tem uma afirmação aí no livro, página 115, depois do exemplo 1 que ele colocou assim: ”Um detalhe, o zero é múltiplo dele mesmo, entretanto, o zero não é divisor de si” (Figura 14).
> A1 – Mas zero dividido por zero dá um.
> P – Mas zero dividido por zero dá dois, e daí?
> A2 – Eu não entendi.
> A1 – Você que disse que zero dividido por zero dá um.
> P – Mas zero dividido por zero dá dois. Porque se você pegar zero igual a duas vezes zero (0 = 2 x zero), não vale?

A1 – Ah, tá! Zero dividido por zero dá dois.
P – Vamos fazer a tabuada do zero?
Als – 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0, 0 x 2 = 0, 0 x 3 = 0, 0 x 4 = 0, 0 x 5 = 0.
P – Todo número multiplicado por zero dá zero, né?!
A3 – Então, zero vezes qualquer coisa é zero, aí zero dividido por zero pode dar qualquer coisa?
A4 – Porque tipo assim, eu tenho 15 unidades. 15 para dividir para zero. Eu não vou dividir para nada, então, não vai ter nada para nada, sacou?
P – Saquei não. Olha só, vamos lembrar da operação inversa? Esse meu elemento aqui, quatro vezes oito é igual a trinta e dois (4 x 8 = 32), então trinta e dois divididos por quatro dá oito. Vamos fazer a mesma coisa com o zero? Se zero vezes zero é zero, se eu dividir zero por zero dá zero. Mas se zero vezes um é zero, se eu dividir zero por zero dá um.
A5 – Mas como a gente vai saber qual vai dar.
P – Uai, a operação inversa. Olha aqui! Trinta e dois divididos por quatro dá oito, porque oito vezes quatro é igual a trinta e dois.
A5 – Eu entendi isso, mas só tem um jeito de fazer isso?
P – Você pode fazer isso com qualquer número. Qualquer tabuada. Eu estou fazendo com o zero. Só que a tabuada do zero é uma tabuada especial.
A1 – É na tabuada do zero, zero dividido por zero vai dar quatro.
P – Calma! A tabuada do zero é especial, porque ela sempre dá de resultado o mesmo número, né?! Então, se eu fizer a operação inversa para todo mundo e vou achar quantos resultados?
A2 – Muitos.
A4 – Infinitos. Mas não entendo que eu divido zero, que é uma quantidade, vamos supor que é nada, por zero que também é nada, como que dá um?
P – Pela operação inversa da tabuada do zero.
A1 – Matemática é muito doida.
A4 – Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar um?
P – Pois é, a tabuada do zero é diferente das outras tabuadas, todos os resultados dão zero.
A4 – Tá, isso eu entendi, como que faz isso?
P – Como que acontece?
A5 – Como é que alguém consegue dividir zero por zero e dar um.
P – É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Porque senão a sequência aqui vai dar errada.
A4 – É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?
P – Mais ou menos. Não foi exatamente dessa forma.
A4 – Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né?! Por favor, não coloca.

Recorte da aula em 21/5/2015.

Nesse recorte da aula, a professora tenta justificar a divisão de zero por zero. Para isso, ela aborda a operação de multiplicação, pois a definição de divisibilidade tem sua base nessa operação. No entanto, conceitualmente zero não é divisor de nenhum número, pois a relação divisor entre naturais, para essa etapa, associa-se ao algoritmo de divisão, cuja representação é *repartir* ou *quantas vezes cabe*, não se construindo o sentido para a divisão por zero. Isso se confirma na fala da aluna, quando diz: "Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar um?", ou seja, sua estrutura mental está baseada no questionamento: nenhuma quantidade repartida por nenhuma quantidade, pode resultar em um de quantidade?

Para essa questão, a professora, justifica que zero é divisor de zero e tem como resultados infinitos números, argumentando para isso o fato de a tabuada do zero ser uma "tabuada especial". Se pensarmos, no entanto, pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, que fundamentou a construção do conceito de múltiplo e divisível, portanto de divisibilidade, concluímos que $0 = 0 \cdot q + 0$ para todo número natural q. Mas pelo teorema de Euclides, existe a unicidade do quociente, q, e do resto, r. Logo, pelo algoritmo, a afirmação zero ser divisor de zero também não pode ser verdadeiro, por isso o enunciado do teorema exclui o elemento nulo como divisor.

Assim, nesse recorte, percebemos uma ruptura com o conceito de divisibilidade, pois configura um erro conceitual no processo de *didatização* do saber.

Outro fator de distorção conceitual do conteúdo foi a explicação de que a tabuada de zero tem uma relação especial baseada em uma definição: "É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Por que senão a sequência vai dar errada". Nesta fala, há uma ruptura com o conceito de multiplicação, pois zero vezes um n qualquer é igual a zero ($0 \times n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$), porque, pelo conceito de multiplicação, $0 \times n = 0 + 0 + ... + 0$ (soma de n zeros é igual a zero). Assim, a explicação da professora não apresentou rigor científico com o conteúdo, visto que não existe uma definição de multiplicação por zero.

Nesse contexto, uma das alunas expressa uma síntese do que supõe compreender: "É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?". Analisando essa fala percebe-se a falta de significação do saber e a caracterização do ensino por autoridade, supondo ser suficiente que o saber seja posto por uma questão de hierarquia ou experiência. Para Pais (2011), "há uma tendência tradicional na prática de ensino da matemática que valoriza, em excesso, a função da memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações" (PAIS, 2011, p.56).

Assim, nessa circunstância, a ruptura ocorre devido à concepção da professora Sandra sobre um determinado conceito, isto é, a epistemologia do professor. Tal concepção está distorcida e isso afeta a aprendizagem o aluno, como podemos perceber na fala da aluna: "Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né? Por favor, não coloca.".

> (...) entendemos a epistemologia do professor como sendo as concepções referentes à disciplina com que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados. (PAIS, 2011, p.34).

Assim, o processo adaptação do saber sábio para o saber ensinável é influenciado pelo saber do professor, principalmente no que se refere aos conteúdos matemáticos que nesse contexto, está diretamente atrelado à disciplina de Teoria dos Números na formação inicial.

6. Considerações Finais

Houve uma distorção no tratamento da relação da divisibilidade no que se refere ao número zero. Por isso a importância do professor se relacionar com o saber científico e escolar, em um esforço de aproximar a matemática escolar da científica.

Nesse caso, o processo adaptação do saber sábio para saber ensinável foi fortemente influenciado pelo saber do professor, ou seja, é importante que pontos sensíveis, como vistos neste estudo sobre a divisibilidade por zero, sejam trabalhados na formação e o conceito deixe de ser uma "crença" do professor, pois isso pode acarretar distorções conceituais na construção de um saber matemático na educação básica.

Esta pesquisa conduz a reflexões sobre a formação inicial do professor e da importância de se trabalhar, nas disciplinas matemáticas da licenciatura, os conceitos com profundidade, além da importância de aproximar a matemática escolar da científica. O futuro professor precisa refletir durante a sua formação sobre a *didatização* do saber, pois este é um conhecimento necessário à construção de sua identidade profissional. Nesse contexto, é essencial que os formadores de professores reflitam sobre a licenciatura em matemática e na criação de espaços de discussão de conceitos e de sua transposição didática para a sala de aula e, também, na necessidade de materiais e ações que auxiliem na tarefa de formar professores.

7. Referências

CHEVALLARD, Y. **La tranposición didáctica**: Del saber sabio al saber enseñado. Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aies. 1991.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Atual. 1991.

_______, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra.** Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

IMENES, L. M. LELLIS, M. **Matemática** -6º Ano / 5ª Série -1ª Ed. Moderna. 2010

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática - Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2010.

PAIS, L. C. **Transposição Didática**. MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática Uma (nova) introdução. 3 ed. revisada, 3 reimp. – São Paulo: EDUC, 2015. p. 11-48. 2015.

_______, L. C. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2011.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. 4.ed. São Paulo: Autores Associados, 1994.