

UMA ANÁLISE SOBRE A HISTÓRIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DAS PERSPECTIVAS DE YOUSCHKEVITCH E EULER

Luciana Vieira Andrade
UFRN
luvieira13@hotmail.com

Giselle Costa de Souza
UFRN
gisellecsousa@hotmail.com

Resumo:

Este artigo apresenta uma proposta de pesquisa de mestrado em andamento que estuda potencialidades do uso da História da Matemática articulada à Investigação Matemática e às Tecnologias da Informação e da Comunicação na sala de aula a partir da história do conceito de função. A proposta é apresentar concepções norteadoras do uso da HM em sala de aula, recorrendo a elementos da utilização das TIC e da IM, compondo uma dissertação do Mestrado Profissional que visa responder à pergunta-foco: *Que elementos facilitadores podemos encontrar no uso do Geogebra para o ensino de função, no nível da Educação Básica, considerando o tratamento do conceito realizado por Youschkevitch e Euler?* Para tanto, pretende-se desenvolver um produto educacional composto por atividades, abordando o conceito de função desenvolvido ao longo da história, aplicadas via *software Geogebra*. Neste sentido, está sendo realizada uma pesquisa de caráter qualitativo com duas fases distintas: uma teórica, feita com pesquisa bibliográfica e uma fase prática, pautada na pesquisa ação.

Palavras-chave: Ensino; Matemática; TIC; Investigação Matemática; Geogebra.

1. Introdução

Este artigo descreve uma proposta de pesquisa em andamento que será apresentada em sua totalidade em um dos capítulos de dissertação no Mestrado Profissional. As atenções estão voltadas à incorporação da História da Matemática (HM) na sala de aula a partir da utilização da história do conceito de função e sua articulação com Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e Investigação Matemática (IM) em prol da elaboração de um caderno de atividades. Tal trabalho será desenvolvido em duas fases e aqui nos propomos a apresentar a primeira que consiste no levantamento bibliográfico sobre o conceito de função.

Esclarecendo, como a proposta da dissertação é tratar da interligação entre o uso da HM e das TIC no ensino, visa-se, então, desenvolver um produto educacional que incluirá uma sequência de atividades, a ser aplicada com alunos da Educação Básica (EB) e especialmente com utilização da HM apoiada por recursos tecnológicos (*software* de

matemática

dinâmica: *Geogebra*) que aborde os elementos de uma função matemática, seus tipos e diferentes formas de representação. Conceito este unificador de vários outros.

Embora a citada dissertação busque verificar a medida na qual a interligação da HM e das TIC favorece a aprendizagem de função, esse artigo dá ênfase a elementos da HM que servirão como base para esse estudo. Com o objetivo de fundamentar a pesquisa, são apresentadas aqui algumas das ideias discutidas por Youschkevitch (1976) quanto ao conceito de função no passar do tempo, a definição de função defendida por Euler, assim como, um breve comparativo entre as principais ideias defendidas por esses matemáticos.

Tendo em vista essas informações centrais, seguem os itens que fundamentam teoricamente este artigo e a pesquisa supracitada.

2. Fundamentação Teórica

Para este artigo, organizou-se um referencial teórico que está apresentado a partir de quatro categorias que respaldam a pesquisa nos aspectos de conteúdo, práticos, metodológicos e científicos. Cada uma delas relaciona tópicos que abordam os itens considerados imprescindíveis quanto à fundamentação utilizada como apoio no desenvolvimento da pesquisa e deixam claras as referências que serão utilizadas no desenrolar de todo o trabalho.

O uso da História da Matemática

De forma geral, o estudo da história é capaz de exercer um grande fascínio aos estudantes. Desse modo, articulações entre a história e a Educação Matemática (EM) proporcionam verdadeiros diálogos entre duas ciências: História e Matemática.

Segundo Garnica e Souza (2013), a HM visa compreender alterações e permanências nas práticas relativas à produção da Matemática, construindo versões sobre como os conceitos matemáticos se desenvolveram, ou seja, é uma área voltada à compreensão da Matemática no contexto de ensino-aprendizagem. Desse modo, quando se pretende motivar as investigações ligadas às práticas em sala de aula, a HM aparece como recurso capaz de contribuir com o trabalho do professor de Matemática, em especial, tratando de aspectos como entendimento de que não é uma ciência acabada, mas que vive em constante processo de evolução.

Concordand

o com esta posição, Miorim e Miguel (2011) defendem que a HM investiga as dimensões da atividade matemática na história das práticas sociais envolvidas no processo de produção do conhecimento. Para eles, é nítido verificar potencialidades que a aplicação da HM como apoio didático-pedagógico na escola oferece, como por exemplo, o fato de que é capaz de justificar o ensino da Matemática. Logo, aplicá-la como instrumento para a formalização dos conceitos e construção do pensamento crítico é de grande valia, e também a sua utilização como fonte de métodos de ensino e de problemas práticos a serem aplicados em sala de aula.

Buscando tornar o ensino mais atrativo, a HM contribui para que o aluno confirme que a matemática é ciência em constante aprimoramento, tornando-a mais humana, sensibilizando a todos os envolvidos no processo, garantindo um ensino contextualizado. Essa prática pode aliviar o problema das dificuldades que o aluno tem em dar significado à Matemática e aos seus conteúdos. Nossa proposta usará a HM nessa perspectiva.

Quanto à utilização de Tecnologias da Informação e da Comunicação em sala de aula

No intuito de “dar significado ao aprendizado é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver conhecimentos de alcance mais universal” (BRASIL, 2000, p. 7). As TIC aparecem como recursos que propiciam o desenvolvimento de múltiplas linguagens a partir de seus recursos próprios que, com uso criativo e crítico, garantem um aprendizado com prazer e encanto. Logo, compreender e empregar inúmeras tecnologias para elaborar visões de mundo e da sociedade é característica que se espera fazer parte do cotidiano da escola durante toda a EB, pois, é fato que a tecnologia exerce impacto em nossa vida, pois impacta a sociedade e a escola não pode ficar de fora já que é inerente a ela.

Reconhecendo que a utilização da tecnologia – computadores - em sala de aula exerce um poder que vai além de diversificar e favorecer o aprendizado, enxergamos aqui que aplicar atividades com utilização de tais recursos supera a ideia retrógrada de somente transmitir informações aos alunos, mas que atua especialmente quanto à produção do conhecimento.

Para Valente (1999a, p. 01), a importância da inserção da informática na escola tem vistas a “enriquecer os ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do conhecimento”, além disso, considera que “práticas pedagógicas inovadoras acontecem quando as instituições se propõem a repensar e a transformar a sua estrutura cristalizada em estrutura flexível, dinâmica e articulada” (VALENTE, 1999a, p. 11).

Assim

, entendendo o homem como um coletivo pensante formados por humanos e não-humanos, Borba (2002) se fundamenta em algumas ideias do Vigotskyano Tikhomirov (1981) quanto à defender que a informática é capaz de reorganizar o pensamento e não complementá-lo/substituí-lo e de Lévy (1993), ao julgar que as tecnologias podem ser encaradas como extensão da memória. Nessa perspectiva, Lévy (1993) apud Borba (2002), concordando com Tikhomirov (1981) apud Borba (2002), argumenta que não deve haver dicotomia entre técnica e ser humano, mas que o processo ensino-aprendizagem deve garantir interação ente a técnica (informática) e o ser humano (pensamento).

A informática com suas características próprias de articular aspectos como simulação, experimentação, linguagem específica, que envolve oralidade, escrita, imagens, comunicação instantânea, deve ser vista como estratégia para a construção do conhecimento. *Softwares* educacionais tem apresentado papel importante na vida dos jovens atuais, pois é frequente o seu uso no cotidiano já que possibilitam uma relação de interação do homem com o recurso computacional. De fato,

O computador pode ser importante recurso para promover passagem da informação ao usuário ou facilitar o processo de construção de conhecimento. No entanto, por intermédio da análise de softwares, é possível entender que o aprender (memorização ou construção de conhecimento) não estar restrito ao software, mas à interação aluno-software (VALENTE, 1999b, p. 89).

Tal fato remete ao desenvolvimento do pensamento promovido pelo que Borba (2001) chama de coletivos-seres-humanos-com-mídia, ou seja, a construção do conhecimento ocorre a partir dos coletivos pensantes formados por humanos (raciocínio) e mídias (técnica).

Nossa proposta pretende elaborar uma sequência de atividades que aborde conhecimentos históricos que serão tratados via uso da tecnologia. Para tanto, as atividades serão elaboradas por meio do *software* de Matemática dinâmica *Geogebra*, que é gratuito e foi pensado para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Para efeitos didáticos, esse programa de computadores:

Reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o *Geogebra* tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. (INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO)

Portanto, o

uso dos computadores para fins didático pedagógicos, é algo que possibilita ao professor enriquecer suas práticas educacionais, permitindo-o realizar simulações, exercícios e até comprovando propriedades que dificulta o entendimento do aluno, no entanto, além da formação sólida que o educador deve ter, deve também ter discernimento para superar as dificuldades encontradas no espaço escolar.

Sobre a Investigação Matemática

A proposta do trabalho com investigação está intimamente ligada ao estudo de questões que permitam a construção do conhecimento por meio da formulação de conjecturas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Em Matemática, investigar tem características peculiares que, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), estão fortemente representadas pelas ideias da tríade: conjectura-teste-demonstração. Em busca de informações sobre o que é desconhecido, os matemáticos vislumbram a investigação como a descoberta das relações entre objetos matemáticos com vistas à identificação de suas propriedades. Para isso, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) argumentam que a IM envolve quatro etapas: reconhecimento da situação, sua exploração e a formulação de questões; formulação de conjecturas; realização de testes e refinamento das conjecturas e argumentação, demonstração e avaliação do trabalho.

No desenrolar da pesquisa, faremos uso das afirmações defendidas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), quanto à IM, nos momentos da elaboração e das aplicações das atividades tendo em vista que o uso da HM pode colocar o aluno no papel do matemático e, portanto, investigador/pesquisador, que produz conhecimento, apoiado pelas TIC.

Quanto ao ensino de função

Não sendo a Matemática um simples aglomerado de conceitos antigos e definitivos, a BNC (BRASIL, 2014, p. 116) orienta que o ideal é que a construção do conhecimento ocorra por meio da provocação do aluno por atribuir significado aos conhecimentos. No intuito de atender a essas ideias, a BNC (BRASIL, 2014, p. 119) informa que para a EB o eixo álgebra “está associado à capacidade de identificar atributos e regras de formação de sequências”. O ensino de função se destaca como conteúdo que favorece a organização do pensamento e vai além da simples manipulação simbólico-algébrica.

Nesse

contexto, o conceito de função é visto como elemento integrador no âmbito da própria Matemática e na interligação dela com outras áreas, atentando para suas aplicações sociais, por exemplo, sendo importante ao descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos. A Matemática, então, é responsável por incentivar no aluno a capacidade de investigação ao se deparar com situações problemas de diversas áreas. O uso da HM e das TIC, isolados ou conectados, ganham força quando se trabalha com o conceito de Função.

Em relação à prática de sala de aula, Fossa (2001) argumenta que a analogia de função com uma máquina, que muito tem sido utilizada como estratégia de professores, é interessante, mas não suficiente para garantir o aprendizado desse conceito por parte dos alunos. Ele sugere, ainda, que, quando são utilizados métodos de ensino onde o aluno participa efetivamente da construção do conhecimento matemático, tal analogia não é muito sugestiva. Dessa forma, o ideal é a aplicação de atividades em que o aluno é participante ativo engajado no processo de fazer Matemática (FOSSA, 2001, p. 143). Isso remete à utilização de atividades que propõe a manipulação de materiais concretos para, a partir daí, descobrirem, por si próprios, o referido conceito, ou seja, “a atividade deve ir além da máquina e modelar, de maneira intuitiva, aquele conjunto de ideias de que o conceito consiste” (FOSSA, 2001, p. 143). Por meio de uma de suas representações, diagrama de Vem, por exemplo, o professor deve pensar em atividades que apresente os elementos do domínio e do contradomínio e também uma maneira de ligá-los em uma relação funcional. Ele ainda destaca que “além de ser um dos conceitos fundamentais da Matemática, a noção de função é extremamente abstrata e acarreta um grande número de implicações complexas” (FOSSA, 2001, p. 155).

Fossa (2001) argumenta que, em geral, o trabalho desenvolvido pelos professores, quando tratam do conceito de Função, acaba limitando a construção real do conceito pelos alunos porque lhes é solicitado que manipule equações e gráficos e, portanto, estudam uma classe restrita de funções. Para superar tais limitações, propõe-se elaborar/aplicar atividades com caráter investigatório onde o aluno atua de forma ativa diante do seu saber.

3. Percurso Metodológico

Para essa proposta de trabalho tem-se realizado pesquisa qualitativa, em que, como consideram Ludke e André (1986), os dados predominantemente descritivos e interessam

mais pelo processo do que pelo produto, tendo como foco do pesquisador os significados atribuídos pelos envolvidos às coisas e à vida, além de realizar análise indutiva dos dados.

Como mencionado, a pesquisa completa será desenvolvida por meio de duas fases, a primeira com caráter teórico e que ocorre através de pesquisa bibliográfica. Para essa etapa, a fundamentação ocorrerá por meio de leituras de livros, teses, dissertações, artigos em periódicos, ensaios e anais de congressos e, por essa razão, concordando com Gil (2008, p. 16), é bibliográfica por estar sendo “desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. A segunda fase, com características mais empíricas, utilizará o tipo pesquisa ação onde as ideias da IM estarão presentes nos momentos de observações e na análise dos dados coletados. Para essa fase, registros de observações de aulas (relatórios), registros fotográficos, de vídeo e atividades dos alunos também serão utilizados e os resultados organizados em gráficos e tabelas.

A pesquisa bibliográfica realizada e descrita neste artigo compõe a fase teórica de trabalho ainda em andamento. Nela procuram-se registros acerca da história do conceito de função, seus elementos e formas de representação em diferentes épocas a fim de se identificar possíveis alterações/aplicações que possam ter ocorrido com o passar do tempo. A HM tem sido utilizada como recurso que visa a atribuir significado ao ensino a partir da evolução histórica de conceitos, como propõe a BNC. Como resultado parcial, tem-se que o conceito de função é forte aliado ao ensino da Matemática e de outras áreas do conhecimento por permitir a descrição do comportamento de fenômenos no cotidiano através da leitura, interpretação e construção dos gráficos (BRASIL, 2000), tabelas e expressões gerais (leis de formação).

3.1. Alguns pontos quanto à história do conceito de função segundo Youschkevitch (1976)

“Até agora a história da funcionalidade tem sido estudada de maneira insuficiente”. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 37). Em especial, percebendo divergências entre as opiniões de autores em relação à época em que realmente se originou o conceito de função, Youschkevitch apresenta algumas informações que comprovam essa ideia, citando:

❖ D. E. Smith (1958) afirma: “[...] after all, the real idea of functionality, as shown by the use of coordinates was first clearly and publicly expressed by Descartes [...]” apud (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 37).

❖ Boyer

(1959), sobre as obras de Fermat, contemporâneo de Descartes diz que: “[...] The function concept and the idea of symbols as representing variables does not seem to enter into the work of any mathematician of the time[...].” (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 38).

❖ W. Hartner e M. Schramm (1963) supõem que: “[...] The question of origin and development (of the concept of function) is usually treated with one-sidedness it is considered almost exclusively in relation to Cartesian analysis [...]”

Das falas postas, é possível notar que operações utilizando ideia de funcionalidade apareciam em cálculos da astronomia desde a antiguidade, na ciência árabe e na matemática grega. Boyer (1956) defende: “This was somewhat equivalent to the modern use of equations as expressions of functional relationships, although far more restricted” (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 38).

Youschkevitch (1976), sem defender ou discordar de alguma ideia, informa que no século XIX a definição clássica de função em quase todos os textos sobre análise matemática é atribuída a Dirichlet (1805-1859) ou a Lobachevski (1792-1856), embora não seja afirmação exata já que o conceito geral de função como a relação arbitrária entre pares de elementos, cada um tomado em seu próprio conjunto, foi formulada em meados do século XVIII.

Estando clara a importância de conhecer o histórico do conceito de função, Youschkevitch (1976) aborda breves observações quanto ao seu desenvolvimento até cerca da metade do século XIX, separando esse tempo em três períodos que ele julga importantes:

❖ Antiguidade: estudo de casos particulares de dependências entre duas quantidades mas onde ainda não se tinham as noções gerais de quantidades variáveis e funções.

❖ Idade Média: na ciência Europeia do século XIV, noções gerais expressas pela primeira vez de forma definida, tanto nas formas geométrica quanto mecânicas. Como na Antiguidade, a dependência entre quantidades era definida por meio de uma expressão verbal, ou com um gráfico, em vez de uma fórmula.

❖ Período Moderno (fim do século XVI, início do XVII): começam a prevalecer as expressões analíticas das funções, expressas por somas de séries de potências de infinitas.

Bem

verdade é que a interpretação por meio analítico da funcionalidade tenha revolucionado o mundo matemático, especialmente pela sua eficácia, tendo, assim, assumido um papel importantíssimo quanto ao conceito de função em todas as ciências exatas. Contudo, exclusivamente esse entendimento, com o passar do tempo, foi tido como inadequado, de tal modo que houve a necessidade de uma nova definição geral que se universalizou.

Tal definição geral de função, por volta da metade do século XIX, possibilitou outros caminhos no desenvolvimento da teoria das funções. Contudo, de maneira bem geral, a definição desenvolvida nessa época é muito comum àquela que é utilizada ainda hoje:

Uma função da variável x , $y = f(x)$, é uma relação entre pares de elementos de dois conjuntos numéricos X e Y , em que cada elemento do primeiro conjunto X se interliga com um elemento y , e somente um y do segundo conjunto Y , segundo uma regra definida (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 39).

Vale lembrar também que a regra sugerida na definição anterior pode se apresentar de maneira verbal, por meio de tabela de valores, com expressão analítica ou por gráfico.

A partir dos argumentos de Youschkevitch (1976), percebe-se que o conceito de funcionalidade sofreu alterações com o decorrer do tempo. Conhecer tais alterações implica perceber o quão dinâmico é o conhecimento matemático e ainda que se trata de uma área inacabada. A evolução do conceito de dependência funcional é utilizada nesse trabalho como elemento que nos proporciona um panorama global desse dinamismo da matemática, característica essa que torna clara a importância da aplicação que atividades que considerem a contextualização como recurso didático a ser aplicado em sala de aula, visando favorecer a aprendizagem. Assim, a utilização da HM aparece como metodologia capaz de contribuir para o ensino, como recomendam os documentos oficiais e os autores referenciados neste trabalho.

3.2. Ideias de Euler sobre função

Leonhard Euler (1707-1783), segundo Boyer (2012), sob influências/incentivos dos irmãos Bernoulli, já usava em seus trabalhos a notação utilizada até hoje. A designação \lg para logaritmo de x , o uso da letra Σ para indicar somatório, e talvez a mais importante de todas, a representação $f(x)$ para função de x , são notações de Euler (BOYER, 2012, p. 305).

Para

Boyer (2012), a partir de segunda metade do século XVIII, a ideia de função tornou-se fundamental para o estudo da análise matemática, sejam as ideias ligadas à geometria analítica de Fermat e Descartes ou o cálculo de Newton e Leibniz. Euler, em seu *Introductio* define função de uma quantidade variável como “qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes” (BOYER, 2012, p. 305), definição essa, um tanto quanto incoerente para os dias atuais visto que não deixam claras as suas reais ideias envolvidas. Embora deixe um sentido um tanto quanto ambíguo, tal conceito possibilita pensar em função com um significado próprio, independente das considerações geométricas. Ou seja, a formalidade da ideia de função, para Euler, tem de fato um caráter de simbologia muito forte onde o analítico exerce um papel significativo na interpretação de dependência funcional. A partir das definições de Euler o conceito de função se tornou o centro da análise.

Roque (2012) considera que foi com Euler que o cálculo foi visto como uma teoria das funções e a análise como uma ciência geral das variáveis e suas funções.

Perceber que a dependência funcional, já no século XVII, aparece com esse caráter analítico é entender que a função tem um conceito que pode ser aplicado em situações das mais diversas naturezas e representações, que nos remete à interpretação do conceito de função como elemento integrador. No intuito de atribuir significado ao conhecimento matemático e de enxergar tal área como fonte de modelos para fenômenos reais, aparece a possibilidade de levar essa temática para a sala de aula, associando o mundo físico em que se vive ao mundo abstrato da Matemática, como recomenda a BNC (BRASIL, 2014). É com esse olhar que o estudo da história do conceito de função é entendido em nosso trabalho.

3.3. Algumas relações entre as ideias de Youschkevitch (1976) e Euler (1748, apud ROQUE, 2012)

Partindo do fato de que as principais ideias que vem à nossa mente quando pensamos em função são sua representação gráfica e sua expressão analítica, cabe aqui considerar que as tabelas babilônicas e egípcias já tratavam da ideia de funcionalidade, em especial, por sua característica de registrar correspondência entre quantidades.

Dessa maneira, e concordando com o que argumenta Youschkevitch (1976), considera-se que a noção de funcionalidade existe desde os tempos antigos tendo se

aperfeiçoado com o decorrer da história. Por exemplo, a ideia de variável não havia na antiguidade, mas foi inserida no conceito de função em épocas posteriores de modo a se alcançar o que hoje é elemento imprescindível a tal conceito: a ideia de grandezas que variam de modo correlato, como julga Roque (2012, p. 371).

Como notou Youschkevitch (1976), desde o início do século XVII, prevalecia as expressões analíticas, de fato, o simbolismo já utilizado por Euler no século XIII foi um passo significativo para o desenvolvimento do conceito de função que é aplicado nos dias atuais.

4. Considerações Finais

Os conhecimentos adquiridos e descritos nesse artigo são resultados das leituras acerca dos principais elementos quanto à utilização da HM e das TIC, com apoio da IM, no ensino da Matemática, particularmente, sobre a história do conceito de função. Defendemos aqui a ideia de que utilizar essas informações/recursos em sala de aula contribui para o aprendizado do aluno e enriquece a prática docente. Contudo, uma fundamentação teórica sobre essa temática se faz imprescindível afim de que as atividades a serem desenvolvidas visem a atender ao que estabelecem os documentos oficiais que regem a educação em nosso país.

A aplicação da abordagem da HM de forma crítica e utilização das TIC permitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica, colaborando com a melhoria nos processos de ensino e aprendizagem. Concluimos então que pensar a Matemática da escola com uma visão mais global propiciada pela HM viabiliza o trabalho por meio das TIC, particularmente, para abordagem do conceito de Função. Para tanto, tomamos como referência os trabalhos clássicos de Youschkevitch (1976) e Euler e delineamos aspectos importantes a serem levados em consideração quando se trata do conceito histórico de função. Dentre tais aspectos, destacamos a relevância de abordagens que primem por diferentes representações, algébrica, gráfica e analítica que apostamos estarem articulados de modo investigativo via *software Geogebra* e atividades históricas que façam uso da Investigação Matemática.

5. Referências

BORBA, M. de C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção do conhecimento matemático**. In: I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002, Curitiba. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2001. v. 1. p. 135-146.

BOYER, C. B.,

MERZBACH, U. C. [Tradução Helena Castro] **História da Matemática**. SP: Blucher, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de EB, 2014. 302p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria do Ensino Médio, 2000. 58p.

FOSSA, J. A. **Indo além da máquina**: uma introdução às funções. In: _____, Ensaio sobre educação matemática. Belém: EDUEPA, 2001. 181p.

FOSSA, J. A. **Funções, equações e regras**. In: _____, Ensaio sobre educação matemática. Belém: EDUEPA, 2001. 181p.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A.. **Educação Matemática, História, História da Matemática e História da Educação Matemática**. In: _____, Elementos de história da educação matemática. São Paulo: Coleção Cultura Acadêmica - Editora UNESP, 2013. p. 17-48.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2008.

INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO. Apresentação. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/> Acesso em 16/05/2016

LUDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A.; **História na Educação Matemática**: proposta e desafios. 2 ed. - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PONTE, J. P. da, BROCARD, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed. Ver. Ampl.- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. RJ: Zahar, 2012.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century**. Moscow: Institute for History of Science and Technology, 1976.

VALENTE, J. A. **Informática na Educação no Brasil**: Análise e Contextualização Histórica. In: VALENTE, J. A. (org.). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999 a.

VALENTE, J. A. **Análise dos diferentes tipos de software usados na educação**. In: VALENTE, J. A. (Org.). O computador na sociedade do conhecimento. 1 ed. UNICAMP / NIED, Campinas, 1999b.