

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS NA APREDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Mariana Silva Mendonça
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
mariansilvamendonca@gmail.com

Rogério Fernando Pires
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
rffpires25@bol.com.br

Resumo:

Neste trabalho apresentamos alguns resultados obtidos a partir da aplicação de um teste piloto proveniente de uma pesquisa de mestrado que se encontra em andamento. Esta pesquisa tem por finalidade investigar como a utilização das Tecnologias Digitais (TD) nas aulas de Matemática pode auxiliar os estudantes do Ensino Médio na aprendizagem do conteúdo de função exponencial. As atividades do teste apresentado foram realizadas por uma turma do 1º ano do Ensino Médio, e contou com a fundamentação da Teoria do Registro de Representação Semiótica (TRRS) proposta por Raymond Duval. A aplicação teve o objetivo de ajustar os instrumentos de coleta do estudo principal. Os resultados desse estudo preliminar mostram que as TD podem auxiliar os estudantes na aprendizagem de função exponencial, uma vez que permite que a construção gráfica ocorra de maneira dinâmica e interativa e, ainda, sinalizam que alguns ajustes devem ser feitos no instrumento de modo a melhorá-lo.

Palavras-chave: Função Exponencial; Teoria do Registro de Representação Semiótica; Tecnologias Digitais.

1. Introdução

Neste trabalho apresentamos um estudo preliminar realizado para a nossa pesquisa de mestrado que ainda encontra-se em andamento, cujo objetivo é compreender como a utilização das tecnologias digitais nas aulas de Matemática pode auxiliar os estudantes do Ensino Médio na aprendizagem do conteúdo de função exponencial. Essa pesquisa está sendo desenvolvida sob a luz da Teoria do Registro de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval.

Com a intenção de ajustar os instrumentos que irão compor a intervenção de ensino da pesquisa de mestrado, tanto no que se refere à linguagem utilizada, quanto aos aspectos inerentes a própria Matemática, aplicamos um teste piloto em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola situada no sul do estado da Bahia. Participaram desse estudo inicial, 15 alunos que até então não haviam estudado função exponencial, esses estudantes estavam

iniciando o 1º ano do Ensino Médio e haviam estudado apenas função afim. Um instrumento contendo atividades que envolviam algumas noções de função exponencial foi trabalhado nessa turma em um período de duas aulas.

A pesquisa foi de cunho qualitativo, que além de nos elucidar acerca das contribuições das TD para a aprendizagem do objeto matemático em questão, ainda, nos ajudou a perceber as alterações que necessitam ser realizadas nos instrumentos que irão compor o estudo principal (dissertação de mestrado). Para tanto, os estudantes responderam o teste piloto utilizando o software GeoGebra quando solicitado.

2. Considerações sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o uso das Tecnologias Digitais no ensino de Matemática.

A teoria proposta do Raymond Duval é cognitivista, pois para o autor “o objetivo do ensino de Matemática, em formação inicial, [...] é contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização ao estudar Matemática” (DUVAL, 2013, p. 11).

Para o desenvolvimento dessa teoria Duval considerou que os objetos matemáticos só são acessíveis por meio da sua representação, destacando a importância da representação para que possamos ter acesso ao objeto matemático, nesse sentido ele afirma que:

Contrariamente ao que sempre se postula no ensino da matemática, a discriminação das unidades de sentido pertinentes nas diferentes representações não é a consequência da aquisição de conceitos, mas condição preliminar dessa aquisição. Analogamente, a escolha de uma “boa” representação, ou mesmo a multiplicação de representações, são apenas ajudas enganosas. Pois as “boas” representações não podem ser associadas aos objetos matemáticos que elas representam, porque esses não são acessíveis direta ou empiricamente. A única via de acesso possível aos objetos empiricamente não acessíveis passa por colocar em correspondência representações semióticas diferentes. (DUVAL, 2011 a, p. 49)

Dessa forma, podemos dizer que assim como os demais objetos matemáticos, a função exponencial só pode ser acessada por meio das representações. Quando, por exemplo, um aluno constrói o gráfico de função exponencial, ou quando ele elabora uma tabela com valores que descrevem uma relação funcional que apresenta características exponenciais, ele está trabalhando com registros de uma função exponencial.

Considerando que os objetos matemáticos só podem ser acessados por meio das suas representações, é preciso atentarmos para que a representação não seja confundida com o objeto. Nesse ínterim, Duval afirma que “o conhecimento começa quando não adotamos mais a representação do objeto no lugar do próprio objeto” (2011 a, p. 16-17), e para o autor uma das formas “para não confundir o objeto matemático e sua representação é dispor de uma segunda representação cujo conteúdo será diferente da primeira” (2011 a, p. 48).

Nesse sentido, Duval afirma quando se refere às atividades matemática, “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica” (Duval, 2011 a, p. 15).

Essa passagem nos chama a atenção para o fato dos objetos matemáticos disporem diferentes representações e a importância da exploração dos diferentes tipos de representação para uma melhor compreensão dos conteúdos em matemática. Assim, o estudo de um objeto matemático não pode ser restrito a um tipo registro, e a aprendizagem só acontecerá se o indivíduo conseguir transitar pelas diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

As diferentes representações podem ser alcançadas pelas transformações, que podem permanecer ao mesmo sistema, que é denominado tratamento, ou mudar de sistema, que é a conversão. Como exemplo de tratamento, podemos citar o caso quando o indivíduo está diante da representação algébrica de uma função e a partir dessa representação calcula o valor dessa função em um determinado ponto. Já a conversão, pode ocorrer quando a partir da representação algébrica de uma função constrói a representação gráfica da mesma.

Diante disso, a nossa intervenção de ensino foi pensada para contemplar as transformações entre os registros da função exponencial, em especial a conversão entre os registros algébricos e gráficos. Essas transformações contarão com o auxílio das TD, a qual acreditamos que irá contribuir com a aprendizagem da função exponencial.

De acordo com Duval (2003), a mobilização e a coordenação de diferentes representações de um mesmo objeto matemático é que darão ao indivíduo condições para que possa compreender de maneira ampla o conceito que está sendo estudado. No caso do nosso objeto matemático (função exponencial), acreditamos que a articulação entre as representações algébrica e gráfica podem possibilitar ao estudante a descoberta de algumas propriedades fundamentais para a compreensão desse conceito.

Nessa perspectiva, entendemos que as TD podem contribuir com a compreensão das noções de função exponencial, bem como, auxiliar na conversão dos registros algébrico e gráfico.

O uso das TD em sala de aula possibilita experimentações, visto que nesse ambiente as tarefas são realizadas de maneira mais rápida do que no ambiente lápis e papel, permitindo a realização de um volume maior de atividades, o que permite ao estudante destinar um tempo maior para estabelecer relações entre as diferentes representações do objeto matemático, proporcionando a descoberta de propriedades. Além disso, o caráter dinâmico de algumas TD possibilita a visualização de propriedades que no ambiente lápis e papel são mais difíceis de perceber.

Nesse sentido, Borba e Penteadó (2003, p. 32) afirmam: “é difícil à geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel”, e isso, pode de certa forma limitar a aprendizagem dos estudantes, uma vez que diversas propriedades podem deixar de ser exploradas por conta do tempo demandado para a construção de gráficos no ambiente lápis e papel. Corroborando com Borba e Penteadó no que tange as múltiplas gerações de registro com as TD, Duval afirmar que “obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escrita e cálculos ou construções de figuras” (2011 a, p. 137).

Ao permitir as experimentações, as TD abrem espaço para que possamos explorar a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, permitindo a compreensão do que cada elemento em um tipo de representação corresponde no outro. Quanto as possibilidades de trabalhar a conversão do registro gráfico em registro algébrico as TD se mostram ainda mais interessantes, pois como afirmou Duval em um de seus artigos (2011 b, p. 97) a passagem do registro gráfico para o algébrico que traz problemas para os estudantes.

Quanto ao uso do software GeoGebra, nesta pesquisa esperamos que ele possibilite que os estudantes explorem as relações entre as variáveis visuais pertinentes e as unidades simbólicas significativas, e isso é fundamental para que os alunos consigam perceber as implicações das unidades simbólicas significativas da representação algébrica nas variáveis visuais pertinentes da representação gráfica. Nesse sentido, Duval afirma que:

Não pode haver utilização correta das representações gráficas cartesianas sem a discriminação explícita das variáveis visuais pertinentes e sem uma correspondência sistematicamente estabelecida entre os valores dessas variáveis e as unidades significativas da expressão algébrica. (2011 a, p. 104)

Quanto a escolha do uso das TD para o estudo da função, além de conhecermos as possibilidades que as TD proporcionam para o estudo de matemática tomamos como base os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental, que trazem alguns direcionamentos acerca do emprego das tecnologias no ambiente educacional. Nele é sinalizado que “o fato de, neste final de século, estar emergindo um conhecimento por simulação, típica da cultura informática, faz com que o computador seja visto como um recurso didático cada dia mais indispensável.” (BRASIL, 1997, p. 34). Isso mostra a importância de mídias como o computador estarem presentes no cotidiano da sala de aula, como ferramentas que viabilizam o ensino e a aprendizagem, assim como o giz, o lápis e o papel.

Com base no que foi exposto até aqui, elaboramos um teste piloto semelhante a intervenção de ensino que irá compor o estudo principal. Na seção seguinte apresentamos a proposta.

3. Proposta de intervenção

O teste piloto foi planejado para ser executado em duas aulas, sendo assim, elaboramos e aplicamos um instrumento contendo sete atividades (todas elaboradas por nós). Com esse teste tínhamos o objetivo de explorar elementos e propriedades relacionados à definição de função exponencial, que consideramos importantes para a nossa investigação, pois a definição é fundamental para que os estudantes compreendam o que é a função exponencial e seja capaz de identificá-la ao se deparar com situações em que ela aparece.

O instrumento foi planejado considerando os direcionamentos propostos pela TRRS para a elaboração de atividades, exploramos ao menos dois tipos de registros de representação do objeto matemático em questão, pois como afirma Duval “os registros são ferramentas para avaliar a pertinência cognitiva de sequências de atividades, isto é, sua adequação às condições necessárias para desenvolver a compreensão.” (2011 a, p. 141).

Exploramos também atividades que exigem as transformações do objeto matemático estudado, uma vez que o mesmo autor aponta que “o que é matematicamente essencial em

uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação” (Duval, 2011 a, p. 68).

Devido ao tamanho da síntese que devemos apresentar aqui, decidimos apresentar e discutir apenas duas atividades, a sexta e sétima atividade. Optamos por essas atividades pelo fato de uma delas solicitar a utilização do software GeoGebra e a outra por permitir verificar a compreensão das características da função estudada.

Na sexta atividade exploramos a condição do a (base da potência da função exponencial) para que a função exista. Para isso ela solicita que os estudantes construam no GeoGebra o gráfico da função $f(x) = a^x$ e que eles criem um controle deslizante para o “ a ”. Para a realização da atividade, os estudantes foram orientados sobre os passos que deveriam seguir. Como é possível observar na figura a seguir.

6ª) Construa no software uma animação em que a base da função $f(x) = a^x$ varia de -2 a 2 . Para isso siga as instruções abaixo.

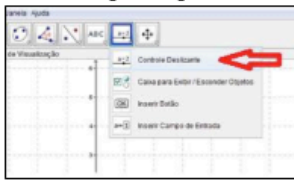
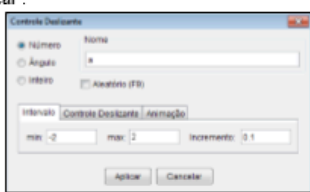

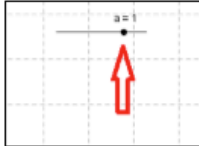
- Com a página do GeoGebra aberta clique no botão “controle deslizante” localizado na parte superior da janela como indica a figura a seguir.
 
- Clique em qualquer lugar no plano cartesiano, em seguida irá abrir uma janela. Nesta janela marque a opção “número”, preencha o campo “nome” como a letra a , o campo “min” com -2 , o campo “max” com 2 e o “incremento” com $0,1$, conforme a figura a seguir e em seguida clique em “aplicar”.
 
- O controle deslizante irá aparecer no local onde você clicou no plano cartesiano. Em seguida insira no campo de entrada a função $f(x) = a^x$ em seguida aperte “enter”, use o acento circunflexo (^) para colocar o x como expoente.
 
- O gráfico da função irá aparecer no plano cartesiano, agora clique e arraste para direita e para a esquerda o ponto presente no controle deslizante que você construiu.
 

Figura 1: primeira parte da 6ª atividade extraída do teste piloto

Com essa abordagem tínhamos o objetivo de explorar uma unidade simbólica significativa da função exponencial, a base da potência (a), e com o auxílio do software GeoGebra proporcionar aos estudantes a associação dela com as variáveis visuais pertinentes correspondente na representação gráfica.

Essa atividade continua com cinco indagações, e para responder a essas perguntas os estudantes poderiam recorrer a construção realizada anteriormente. Tais perguntas são:

- Diante do que você observou ao movimentar o controle deslizante, responda:
- a) O que você observou quando os valores de a foram maiores do que 1?
 - b) O que você observou quando o valor de a foi igual a 1?
 - c) O que você observou quando os valores de a variou entre 0 e 1?
 - d) O que você observou quando o valor de a foi igual a 0?
 - e) O que você observou quando os valores de a foram menores que 0?

Figura 2: continuação da 6ª atividade extraída do teste piloto

Com os cinco itens, queremos investigar se os estudantes reconhecem o “ a ” com uma unidade de sentido e se eles compreendem a implicação do valor dela quando se converte o registro de algébrico para o registro gráfico.

Com o item (a) a intenção era verificar se os estudantes perceberam que quando o valor da base da potência for maior que 1 a função será crescente. No item (b) queríamos verificar se os estudantes perceberam que quando a base da potência for igual a 1 a função será constante. No item (c) queríamos verificar se os estudantes observaram que quando os valores da base da potência ficam entre 0 e 1 a função é decrescente.

No item (d) o objetivo era analisar se os estudantes perceberam a impossibilidade da base da potência ser igual a 0. No item (e) queríamos verificar se os estudantes perceberam que quando os valores da base da potência é menor do que 1 a função não é definida.

Para responder esses itens os estudantes deveriam observar o registro algébrico e gráfico da função simultaneamente, e isso é possível, pois o software GeoGebra possui a janela de álgebra e a malha gráfica em uma mesma interface. Foi esperado que eles observassem que o registro gráfico da função exponencial possui um determinado comportamento quando a base da potência assume valores específicos.

A atividade sete foi escolhida, pois solicita que os estudantes escrevam as características da função estudada. Acreditávamos, que os estudantes poderiam depois de responderem as questões anteriores (não apenas a atividade 6) chegar a características que se aproximem de maneira não formal da definição da função exponencial. Como por exemplo,

indicar que a base da função exponencial tem que ser maior que zero e diferente de 1, que o domínio é real e a imagem positiva e indicar a lei de formação dessa função.

7*) Diante do que foi observado nas seis atividades anteriores, quais as principais características deste tipo de função?

Figura 3: 7ª atividade extraída do teste piloto

Para responder a essa questão os estudantes deveriam recorrer às atividades anteriores. Delas, deveriam se lembrar das propriedades exploradas e articular os registros de representação algébrico e gráfico da função estudada, associar as unidades simbólicas significativas às variáveis visuais pertinentes desse tipo de função, e escrever em língua materna as características que eles observaram.

4. Resultados e Reflexões

Esta seção constitui-se da análise dos dados coletados com os instrumentos aplicados aos estudantes que participaram dessa investigação. A análise foi de cunho qualitativo e procuramos evidenciar o desenvolvimento das atividades pelos sujeitos.

Antes de apresentarmos a análise das respostas dos estudantes é importante dizermos que a maior parte dos estudantes se mostraram dispostos a responder o teste e demonstraram abertura em realizar esse estudo com o auxílio do software GeoGebra.

Dos quinze alunos que participaram dessa investigação, dois não responderam nenhuma das questões do instrumento. Quanto a sexta questão, treze estudantes responderam todos os itens dessa atividade. No que tange as respostas dadas ao item (a), “O que você observou quando os valores de a foram maiores do que 1?”, oito dos treze alunos responderam corretamente. Uma das respostas pode ser observada na imagem a seguir.

a) O que você observou quando os valores de a foram maiores do que 1?
a função é crescente

Figura 4: resposta do estudante Henrique

Ao indicar que a função é crescente, o aluno demonstrou que conseguiu associar os dois registros e determinar uma característica desse tipo de função. Isso é indício de que ao mobilizar, coordenar e manipular os registros algébrico e gráfico de uma mesma função, o estudante realiza segundo Duval (2011, b) uma conversão qualitativa, pois associa as

unidades simbólicas significativas da representação algébrica às variáveis visuais pertinentes da representação gráfica.

Algumas respostas atípicas também foram dadas por alguns alunos, como “as linhas se afastam”, na qual acreditamos ser o eixo x e o gráfico da função, outro aluno respondeu “veio reto e começou a subir” e ainda “que a reta está crescente”. Acreditamos que essas respostas surgiram por eles estarem iniciando os estudos sobre função.

No item b , “O que você observou quando o valor de a foi igual a 1?”, nove alunos responderam corretamente a indagação. Demonstrando que a maior parte da turma conseguiu visualizar o que acontece com o gráfico da função exponencial quando a assume o valor 1. Entretanto, acreditamos que os estudantes não compreenderam o porquê da função se tornar uma função constante quando a assumi o valor 1, uma vez que eles só indicam a característica visual da representação gráfica como podemos observar na resposta dada pelo aluno João.

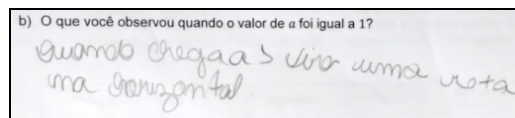


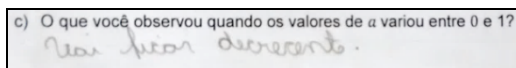
Figura 5: resposta do estudante João

Podemos perceber na resposta de João, que ele não associou as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico da função representada por $f(x) = 1^x$ as unidades simbólicas significativas da representação algébrica da mesma função, uma vez que ele não levou em consideração algumas características, como o fato do gráfico ser um reta paralela ao eixo x e secante ao eixo y em 1, ou seja, ser de uma função constante e, ainda, o fato desse registro estar associado à função exponencial de base 1, o que faz com que qualquer valor que x assumia, $f(x)$ sempre será igual a 1.

Foi possível identificada nessa resposta, que o estudante não percebeu que quando a base da potência que representa algebricamente a função exponencial é igual a 1, a função se torna constante.

No item seguinte, “O que você observou quando os valores de a variou entre 0 e 1?”, seis alunos responderam o questionamento de forma correta. Esperávamos que o número de acertos nesse item fosse igual ao número de acertos do item (a), entretanto acreditamos que a quantidade de acertos foi menor devido ao fato do a variar em um intervalo pequeno, apesar de o intervalo ser do mesmo tamanho do item (a), indicando a necessidade de diminuirmos o

valor do incremento na construção do controle deslizante. Assim, como no item anterior as respostas foram apenas descrições sobre o que eles observaram, sem haver nenhuma alusão ao porque desse comportamento, como podemos verificar nas respostas do aluno Carlos.

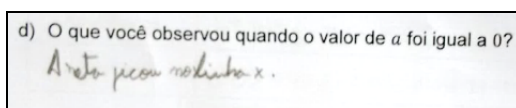


c) O que você observou quando os valores de a variou entre 0 e 1?
Não ficou decrescente.

Figura 6: resposta do aluno Carlos

Na resposta dada pelo aluno Carlos, apesar de não haver justificativas, é possível perceber que ele foi capaz de associar as variáveis visuais pertinentes as unidades simbólicas significativas, pois ele mostrou compreender que quando a base da função assume valores entre 0 e 1 o registro gráfico da função assume um comportamento decrescente.

Quanto ao item d , “O que você observou quando o valor de a foi igual a 0?”, apenas dois estudantes apresentaram a resposta correta, outros três apresentam respostas incompletas, sinalizando que o gráfico se tornará um reta e que esta é coincidente com o eixo x , como podemos observar na resposta dada pelo aluno Pedro.

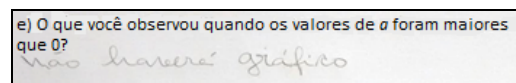


d) O que você observou quando o valor de a foi igual a 0?
A reta ficou no eixo x .

Figura 7:respostado aluno Pedro

Os demais deram respostas incoerentes como “não tem gráfico” ou “a reta desapareceu”, sinalizando a dificuldade em visualizar o registro gráfico, uma vez que ele irá sobrepor à parte positiva do eixo das abcissas, nos chamando a atenção para a necessidade de discutirmos esse fato com os alunos.

No último item dessa atividade, “O que você observou quando os valores de a foram menores que 0?”, oito estudantes responderam corretamente, indicando que não haverá gráficos, como podemos observar na imagem a seguir. Porém, cinco respostas equivocadas nos chamou a atenção, uma vez que o software GeoGebra não apresenta nenhum registro gráfico quando a base da função exponencial é menor que 1, não cabendo outra resposta.

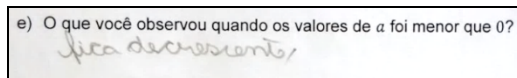


e) O que você observou quando os valores de a foram maiores que 0?
Não haverá gráfico

Figura 8: resposta da aluna Luana

Assim como nas respostas anteriores, não houve por parte dos estudantes a associação entre as unidades simbólicas significativas da representação algébrica às variáveis visuais pertinentes da representação gráfica, uma vez que a função não existe nesse intervalo, e nada referente a isso foi pontuado, talvez também pela ausência de um “por quê” no final do enunciado.

Dentre as respostas equivocadas, uma nos chamou a atenção, na qual um aluno indica que a função fica decrescente, nos revelando que devemos atentar quando formos aplicar a intervenção para que os alunos executem de fato o que a atividade solicita.

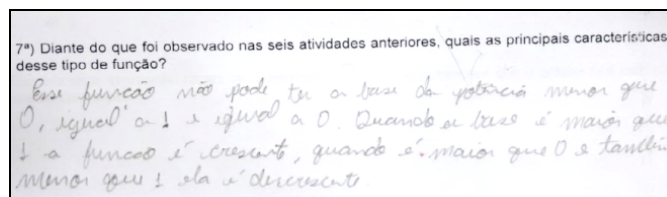


e) O que você observou quando os valores de a foi menor que 0?
fica decrescente.

Figura 9: resposta do aluno Carlos

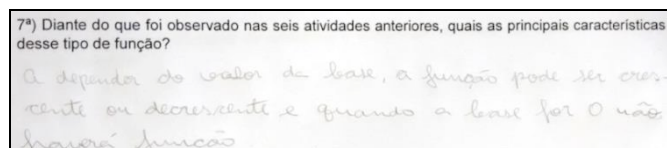
Ao analisarmos a atividade 6 percebemos que ela atingiu em partes o nosso objetivo que é aproximar os estudantes da definição de função exponencial, entretanto acreditamos que é necessário solicitarmos em cada item a justificativa das respostas dadas, para que possamos promover uma maior reflexão por parte dos estudantes. A justificativa poderá provocar nos estudantes a associação entre o registro algébrico e gráfico desse tipo de função, uma vez que observamos que muitos estudantes escreveram apenas o que viram sem muitas vezes associar as unidades simbólicas significativas às variáveis visuais pertinentes.

Quanto a atividade 7, dos quinze alunos que participaram da realização do teste apenas doze responderam essa questão. Dentre eles, apenas dois estudantes deram respostas que se aproximaram daquela que nós esperávamos, essas respostas podem ser observadas a seguir.



7a) Diante do que foi observado nas seis atividades anteriores, quais as principais características desse tipo de função?
Essa função não pode ter a base da potência menor que 0, igual a 1 e igual a 0. Quando a base é maior que 1 a função é crescente, quando é maior que 0 e também menor que 1 ela é decrescente.

Figura 10: resposta do aluno Henrique



7a) Diante do que foi observado nas seis atividades anteriores, quais as principais características desse tipo de função?
A depender do valor da base, a função pode ser crescente ou decrescente e quando a base for 0 não haverá função.

Figura 11: resposta da aluna Luana

Acreditamos que essas respostas só foram possíveis porque os estudantes conseguiram observar as unidades de sentido matematicamente pertinentes no decorrer da resolução das seis questões anteriores. Eles conseguiram associando os dois tipos de registros explorados nessas atividades (registro algébrico e gráfico), e compreender características que faz a função existir ou não, bem como outros comportamentos desse tipo de função.

Percebemos com a aplicação desse teste piloto que as TD podem de fato auxiliar os estudantes na associação entre os registros algébrico e gráfico e que a mobilização e coordenação de diferentes representações do mesmo objeto matemático pode contribuir para que os estudantes façam conjecturas, observem regularidades e descubram propriedades. Entretanto, os resultados obtidos nos apontam que os estudantes devem ser provocados a realizar uma investigação mais aprofundada sobre essa relação entre diferentes representações, tanto no enunciado das atividades, como também, no momento da aplicação da intervenção de ensino.

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Miriam Godoy. Informática e Educação Matemática. – 3. ed- Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. Semióses e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem, 2011 a.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Revista REVEMAT*, Florianópolis, v. 6, n. 2, 2011 b. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>>. Acesso em: 01 Março de 2016.