

“O MUNDO MÁGICO DE ESCHER”: EXPLORANDO ISOMETRIAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Vitor Lacerda Siqueira
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
siqueira.vitorlacerda@gmail.com

Vanessa Carmo dos Santos
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
vanessacarmos@hotmail.com

Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
claudia.araujo@ifes.edu.br

Michel Guerra de Souza
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
michel.souza@ifes.edu.br

Waldiléria Silva Viana
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
waldileria@gmail.com

Higor Soares Majoni
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
higor_majoni@hotmail.com

Resumo:

Neste trabalho, apresentamos as experiências vivenciadas em um minicurso ofertado no ano de 2015 para alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Vitória/ES, através do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino Médio do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, campus Vitória/ES. Nosso objetivo foi explorar a pavimentação do plano com base em malhas de quadrados e de triângulos equiláteros utilizando isometrias de rotação e translação, a partir de técnicas utilizadas pelo artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher. O curso permitiu uma reflexão sobre especificidades do estudo de geometria plana no Ensino Fundamental, destacando-se a relevância de conceitos elementares como os de ângulo e polígono. Os estudantes participantes mostraram-se receptivos e interessados pelo tema, despertando assim um novo olhar para a matemática.

Palavras-chave: Escher; minicurso; pavimentação do plano; translação; rotação.

1. Introdução

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico que viveu de 1898 a 1972. Suas obras são conhecidas mundialmente por representar construções impossíveis, preencher regularmente o plano, explorar o infinito e as metamorfoses. Neste texto, relatamos a realização do minicurso

acerca do “Mundo Mágico de Escher”¹, que teve como proposta a exploração da pavimentação do plano a partir da construção de mosaicos como os do artista, com o emprego de translações ou rotações sobre elementos de quadrados ou triângulos equiláteros, usados como unidades de malhas poligonais.

Este projeto é uma iniciativa do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Ensino Médio – Grupemem do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, campus Vitória/ES – Ifes-Vitória. O grupo tem interesse em discutir relações entre a Educação Matemática e o Ensino Médio, fomentando a criação de espaços-tempo alternativos de estudo e de produção de conhecimento em matemática, de maneira interativa entre alunos do Ensino Médio e do curso de Licenciatura em Matemática, especialmente na instituição.

A proposta do minicurso é uma consequência da oficina de extensão “*O mundo mágico de Escher*”: *questões sobre a pavimentação do plano*, realizada em 2014 com alunos de Ensino Médio, que explorou o conceito de isometrias no plano a partir da obra do artista holandês Maurits Escher. O tema isometrias aparece de maneira incipiente nos conteúdos curriculares e, no entanto, é relevante na compreensão tanto de ideias geométricas como daquelas relacionadas, por exemplo, ao estudo de funções, nos diferentes níveis escolares.

Devido a um grande envolvimento com o tema, alguns alunos participantes da oficina foram convidados a atuar como monitores ou expositores posteriormente em atividades envolvendo o mesmo assunto na IV Semana de Matemática do Ifes (LORENZONI, SOUZA, VICTOR & MAJONI; 2015; e LORENZONI, SOUZA & VICTOR; 2015a) e no X Encontro Capixaba de Educação Matemática (LORENZONI, SOUZA & VICTOR; 2015b), ambos em 2015. Desses alunos, dois do Ensino Médio se sentiram motivados a levar o que vêm aprendendo a alunos de escolas públicas municipais, o que ganhou a adesão de outros dois alunos, dessa vez do curso de Licenciatura em Matemática da instituição.

O minicurso foi ofertado com 30 vagas para alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental com interesse em matemática para um estudo além da sala de aula, em uma escola municipal na região de Vitória/ES, antiga escola de uma das estudantes do Ifes, tendo sido

¹ Nome da exposição de obras do artista que visitou várias cidades pelo mundo, inclusive Vitória-ES, onde se desenvolveu este relato.

ministrado por ela e seus outros três colegas do Ifes (Ensino Médio e Superior) sob orientação de uma equipe de professores.

O objetivo foi apresentar a pavimentação do plano por polígonos regulares congruentes mostrando que por trás de algumas técnicas usadas por Escher na confecção de seus mosaicos havia conceitos matemáticos. E assim mostrar que a matemática está muito além das paredes de uma sala de aula. Como os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN argumentam, destaca-se no trabalho com o campo Espaço e Forma,

...a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta [...]. Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.51)

Sobre a pavimentação do plano, o próprio Escher escreve “um plano, que podemos imaginar estendendo-se sem fronteiras em todas as direções, pode ser preenchido ou dividido até o infinito, de acordo com um número limitado de sistemas, em figuras geométricas similares, contíguas, sem deixar qualquer espaço livre”. (ESCHER, 1989, p.93)

Um dos métodos de Escher pode ser entendido a partir de “deformações” de um polígono. Por exemplo, em Bird - Nº 128 (Figura 1), Escher registra em destaque abaixo do mosaico a unidade de pavimentação, obtida por translações de curvas sobre um quadrado do qual destaca os vértices pelo símbolo “ \circ ”. Este processo pode ser observado, de maneira mais detalhada, na Figura 2, onde do quadrado ABCD é destacada a translação da curva AD, paralelamente ao lado AB do quadrado, fazendo coincidir os vértices A e D com os vértices B e C, respectivamente. De maneira análoga, a curva CD é obtida pela translação da curva AB, paralelamente ao lado BC do quadrado, fazendo coincidir os vértices A e B com os vértices D e C, respectivamente.

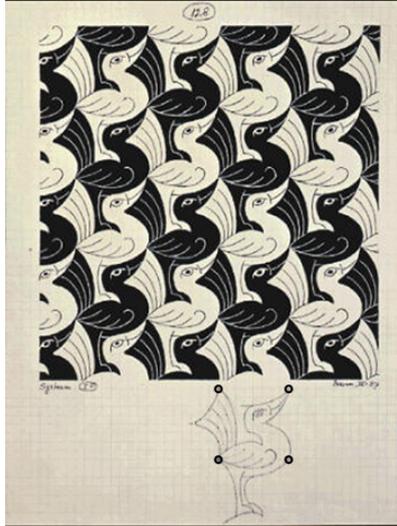


Figura 1. Fonte: <http://www.mcescher.com/gallery/>

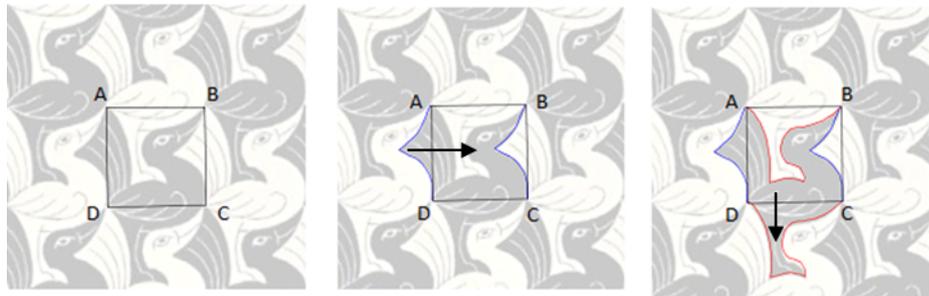


Figura 2. Fonte: Arquivo pessoal.

Em Fish – Nº 20, (Figura 3), as curvas sofrem movimento de rotação, também a partir de um quadrado com os vértices em destaque pelo símbolo “O”. Nota-se que tais procedimentos preservam a área da figura original.

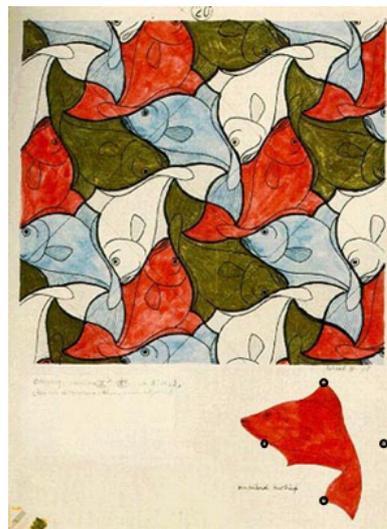


Figura 3. Fonte: <http://www.mcescher.com/gallery/>

2. Metodologia de Desenvolvimento

O minicurso teve a duração de dois encontros presenciais (não sequenciais) com duração de 4 horas cada, ministradas no contraturno escolar. No primeiro encontro haviam 20 alunos, e no segundo 16.

No primeiro encontro, foi feito o uso de uma televisão e um notebook para exibir as imagens da exposição de Escher e também de imagens dos locais em que Escher buscou inspiração. A partir de então, iniciamos reflexões sobre a relação entre o conhecimento matemático e obras do artista, cujas técnicas também podem ser observadas no nosso cotidiano.

Foram feitos questionamentos aos alunos sobre a pavimentação do plano por polígonos regulares congruentes, com o objetivo de se concluir que as únicas pavimentações lado-lado do plano com polígonos regulares de um só tipo são aquelas obtidas com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. Esses questionamentos demandaram a discussão de alguns conceitos que ainda não estavam claros para alguns participantes como as ideias de ângulos, polígonos, soma dos ângulos internos de um polígono, congruência e semelhança.

A Figura 4 foi utilizada para explicitar o movimento de rotação e a Figura 5 foi utilizada para demonstrar a ideia da soma dos ângulos internos, figuras regulares e congruentes, bem como o encaixe perfeito dessas figuras.

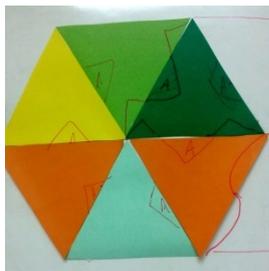


Figura 4. Fonte: Arquivo pessoal.



Figura 5. Fonte: Arquivo pessoal.

A partir de então, apresentamos alguns mosaicos de Escher para que os alunos identificassem os tipos de polígonos utilizados. Por exemplo, em Fish - Nº94 (Figura 6; <http://www.mcescher.com/gallery/>), pode ser identificada uma malha triangular, como pode ser observado na Figura 7.



Figura 6. Fonte: <http://www.mcescher.com/gallery/>

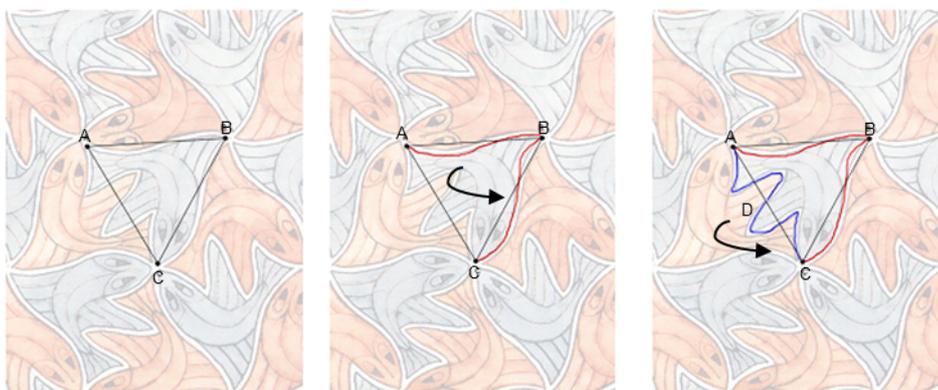


Figura 7. Fonte: Arquivo pessoal.

Foi então discutido propriamente o processo de “deformação” de polígonos com o uso de isometrias sem a perda da área ocupada. Este processo pode ser observado, de maneira mais detalhada, na Figura 7, onde do triângulo ABC é destacada a rotação de 60° da curva AB, no sentido anti-horário, em torno do vértice B, fazendo coincidir os vértices A e C. De maneira análoga, a curva AC foi obtida da rotação de 180° da curva AD, onde D é o ponto médio do segmento AC, no sentido anti-horário em torno de D, fazendo coincidir os vértices A e C.

Fizemos uso de um quebra-cabeça (Figura 8) para mostrar e facilitar o entendimento pelos alunos acerca da “deformação” de um quadrado por movimentos de translação e a consequente compensação de área.

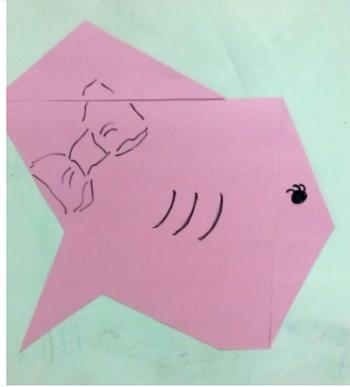


Figura 8. Fonte: Arquivo pessoal.

Com a visualização desta figura, foi esperado que os alunos compreendessem melhor que partindo de um polígono regular por meio de isometrias, é possível deformar esse polígono mantendo a mesma área inicial, mesmo tendo o formato e o perímetro diferente do polígono original. Ela foi feita com cartolina e demonstrada no quadro como um quebra-cabeça para maior compreensão. A figura a seguir (Figura 9) demonstra as etapas da sua construção e a pavimentação do plano tomando-a como unidade.

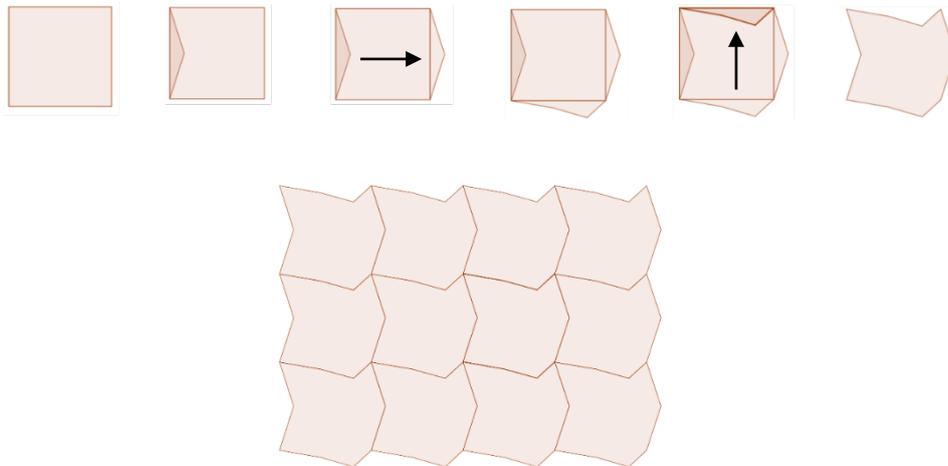


Figura 9. Fonte: Arquivo pessoal.

A partir daí, os alunos iniciaram os trabalhos, sempre com o auxílio dos monitores. Para tanto, dispunham de cópias de malhas quadradas e papel sulfite A4 colorido, lápis, lápis de cor, régua e borracha (estes itens foram entregues aos alunos por meio da escola, configurando-se como um kit básico para a realização do minicurso). Os alunos se sentaram em grupos de 4 ou 5, embora cada um tenha produzido seu próprio mosaico.

Tendo em vista as dúvidas iniciais dos alunos, alguns deles não conseguiram terminar os trabalhos no primeiro encontro, então foi sugerido que eles terminassem em outro momento e trouxessem no próximo dia do minicurso.

Tentamos desenvolver o segundo encontro da forma mais prática possível, para que os alunos soltassem sua criatividade, e explorassem de forma prazerosa o objetivo do minicurso. Utilizamos o conceito de rotação como base para os trabalhos. Foi possível observar que esse encontro rendeu mais criações dos alunos, que pareciam mais seguros e à vontade com o tema.

3. Resultados

Com a produção dos desenhos por parte dos alunos, percebemos que alguns dos estudantes não haviam compreendido o conceito da compensação de área. Desenhavam perfeitamente as isometrias, porém, ao colorir as figuras formadas, cometiam erros não mantendo a mesma área da figura original, ou seja, não compreendiam que a partir das isometrias, estavam formando novas figuras, de áreas iguais a figura inicial. Podemos observar nas figuras 10 e 11 dois trabalhos de estudantes distintos que mostram o emprego correto do conceito trabalhado. No segundo caso, porém, o estudante relatava no minicurso não identificar que nova figura tem a área do quadrado tomado como base.



Figura 10. Fonte: Arquivo pessoal.

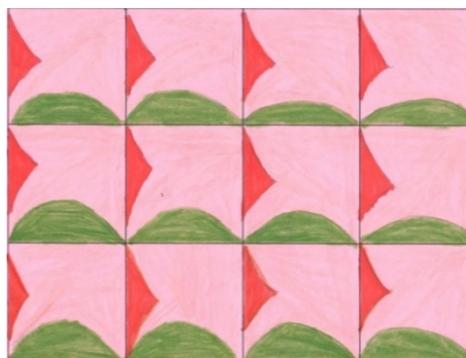


Figura 11. Fonte: Arquivo pessoal.

No segundo encontro, foi possível perceber que essas dúvidas foram quase todas sanadas através do uso dos quebra-cabeças. O comprometimento com o minicurso também foi maior por parte dos alunos. Eles se sentiram mais à vontade para errar e corrigir o erro. As figuras 12 e 13 mostram a criatividade dos alunos no processo de construção dos mosaicos.

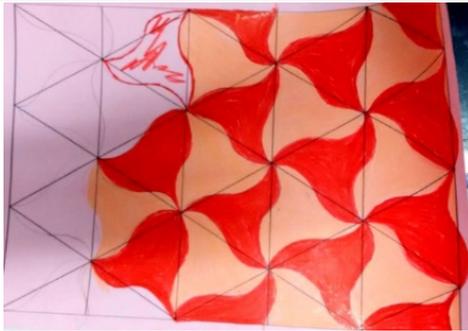


Figura 12. Fonte: Arquivo pessoal.

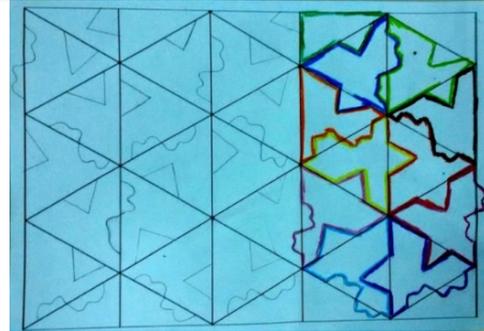


Figura 13. Fonte: Arquivo pessoal.

4. Questionário

Encerradas as atividades, ao final do segundo encontro foi aplicado um questionário para avaliar a aceitação dos alunos pelo tema abordado e pela forma de ensino-aprendizagem. Esses questionários contemplaram aspectos como: espaço físico, tema abordado, material usado, metodologia, ideias matemáticas e conhecimento adquirido.

O questionário foi respondido por 19 alunos participantes do minicurso, e os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Resultados do Questionário							
	O tema abordado	O material usado	A modo utilizado	As ideias matemáticas apresentadas	O espaço utilizado	O nível de compreensão pessoal	O conhecimento adquirido
Ruim / Insatisfatório	0	0	0	0	1	0	0
Satisfatório	2	3	0	2	6	2	1
Bom	0	12	4	3	9	8	2
Ótimo	14	4	15	14	3	7	15
Não respondeu	0	0	0	0	0	2	1

Tabela 1

De maneira geral, baseando-se nas respostas observadas, o minicurso foi bem recebido, despertou a curiosidade em relação ao artista M. C. Escher e contribuiu para o processo de aprendizagem da Matemática.

Em contrapartida, os estudantes destacaram que o espaço físico poderia ser melhorado assim como a necessidade de mais tempo para o aprofundamento das informações e dos conteúdos ministrados. Destacam-se a seguir algumas sugestões apresentadas pelos estudantes:

- "Eu gostei do programa mais poderia ter sido em mais dias, ter mais tempo com lugar melhor, mais pessoas, etc."

- "Poderia haver mais dias para aprendermos mais. Adorei o modo como os professores nos ensinaram e souberam entender que uns haviam mais dificuldade de aprendizado."

- "No minicurso eu tive uma experiência muito boa pois eu aprendi sobre o mundo mágico de Escher e um pouco das formas que ele fazia suas obras. Foi muito bom ter conhecido sobre esse artista e ter conhecido os professores que nos ensinaram".

5. Considerações Finais

Com o minicurso, percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades em alguns conceitos básicos, que seriam pré-requisitos para compreensão da matemática utilizada por Escher. Com isso, foi preciso criar um momento para sanar as dúvidas e fazer algumas explicações rápidas de alguns conceitos de matemáticos. Entretanto, outros alunos demonstraram extrema rapidez no entendimento por trás dos desafios propostos e na descoberta de quais figuras geométricas regulares congruentes são possíveis para pavimentar o plano. Mesmo com as adversidades, foi possível cumprir o objetivo do minicurso que era apresentar aos alunos a pavimentação do plano através das obras do Escher.

A atividade permitiu uma reflexão sobre especificidades do estudo de geometria plana no Ensino Fundamental, destacando-se a relevância de conceitos elementares como os de ângulo, polígono, soma de ângulos internos de um polígono, congruência semelhança e área. Os monitores mostraram-se comprometidos com as questões matemáticas e pedagógicas que emergiram de tal reflexão, aprofundando sua formação em matemática e no ensino de matemática. E os alunos participantes do minicurso, mostraram-se receptivos e interessados pelo tema do curso e pela interação com nosso Instituto.

Acreditamos que foi possível contribuir com a formação em matemática dos monitores e participantes do projeto à medida que eles ampliaram seu repertório de fontes para o estudo

de matemática por meio de recursos alternativos, como as obras de arte caminhando para o aprofundamento de seus conhecimentos matemáticos, de forma dinâmica, criativa e consistente. Foi desenvolvido um trabalho responsável e colaborativo.

Podemos afirmar que esta experiência serviu como incentivo para o envolvimento dos estudantes em outras atividades de extensão e de interação da matemática com diferentes áreas de conhecimento. Além disso, contribuiu também para a ampliação de oportunidades de estudos em matemática a estudantes de escolas municipais de Ensino Fundamental. Tiveram acesso a ideias matemáticas além das curriculares, mais ainda, mostraram-se interessados e receptivos ao minicurso, o que se comprova, por exemplo, no envolvimento e cumprimento das atividades propostas e no baixo índice de evasão.

As ações propostas no projeto pretendem trazer alternativas para o desenvolvimento de questionamentos e da criatividade em matemática, na medida em que exploram conceitos de diferentes campos da matemática e suas relações com outras áreas do conhecimento. Esperamos que seja possível dar continuidade a estas ações à medida que possamos ampliar as oportunidades de formação em matemática aos estudantes das escolas públicas de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Além disso, esperamos dar prosseguimento a projetos que caminham na perspectiva de uma Educação Matemática que contribuam na formação da cidadania, ao propor espaços de encontro de diferentes realidades e saberes, no caso, o Ensino Fundamental de escolas públicas municipais, e o Ensino Médio e a graduação do Ifes.

6. Agradecimentos

A todos os estudantes participantes do minicurso e ao seu professor de matemática Sidney Lins, que manifestou interesse pelo projeto.

7. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

COMPANY, B. V. **Gallery**: Selected works about M. C. Escher. Disponível em: <http://www.mcescher.com/gallery/>. Acesso em: 25 nov. 2014.

ESCHER, Maurits Cornelis. **The Regular Division of the Plane.** In: Escher on Escher: Exploring the Infinite. New York: Harry N. Abrams, Inc. Publishers, 1989.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo; SOUZA, Michel Guerra de; VICTOR, Douglas Araújo. **“O mundo mágico de Escher”:** Questões sobre a pavimentação do plano. In: SEMANA DE MATEMÁTICA DO IFES, 4., 2015, Vitória. Resumos... Vitória: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2015. Disponível em: <http://ocs.ifes.edu.br/index.php/semat/4/paper/viewFile/1584/551>. Acesso em: 28 de março de 2015.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo; SOUZA, Michel Guerra de; VICTOR, Douglas Araújo. **“O mundo mágico de Escher”:** Questões sobre a pavimentação do plano. In: Encontro Capixaba de Educação Matemática, 10., 2015, Vitória. Anais... Vitória: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. Disponível em: http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ECCEM/X_ECCEM/paper/view/2002/571. Acesso em: 18 out. 2015.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo; SOUZA, Michel Guerra de; VICTOR, Douglas Araújo; MAJONI, Higor Soares. **Tesselações de Escher e a pavimentação do plano euclidiano.** In: SEMANA DE MATEMÁTICA DO IFES, 4., 2015, Vitória. Resumos... Vitória: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 2015. Disponível em: <http://ocs.ifes.edu.br/index.php/semat/4/paper/viewFile/1623/474>. Acesso em: 18 out. 2015.