# USANDO O GEOGEBRA EM DISPOSITIVOS MÓVEIS PARA EXPLORAR INVARIANTES GEOMÉTRICOS NA SALA DE AULA

*Humberto José Bortolossi*
*Universidade Federal Fluminense/Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro*
*hjbortol@vm.uff.br*

*Edilson José Curvello Machado*
*E. M. João Monteiro (SME-Maricá)/UFF-PROEX- Pré-Universitário Oficina do Saber*
*edilson.machado@gmail.com*

**Resumo:**
Estudos apontam que, em Geometria, alunos da Escola Básica frequentemente confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado. Assim, por exemplo, um quadrado girado deixa de ser um quadrado para esses alunos. Possivelmente, este tipo de comportamento seja um reflexo da natureza estática de como a Geometria é comumente trabalhada em sala de aula (figuras não podem ser movidas ou alteradas em uma página de um livro ou no quadro-negro). Neste minicurso, propomos atividades que procuram contrapor este cenário: apresentamos uma coleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde os alunos devem (1) implementar a construção do enunciado usando um software de geometria dinâmica (o GeoGebra para dispositivos móveis, por exemplo), (2) arrastar os pontos livres e semilivres para estudar o problema, (3) descobrir (por si mesmos) invariantes geométricos associados à configuração e, por fim, (4) tentar prová-los.
**Palavras-chave:** Ensino e Aprendizagem de Geometria; Invariantes Geométricos; Geometria Dinâmica; GeoGebra.

## 1. Introdução

Nossa experiência em escolas confirma resultados já apontados por Gravina (1996): em geral, alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado, ou seja, misturam a componente figural associada ao desenho com a componente conceitual, aquela que define o objeto por meio das suas propriedades intrínsecas. Essa confusão entre as propriedades do desenho e aquelas do objeto geométrico tem origem nos livros didáticos e práticas de ensino de nossas escolas. Os livros escolares iniciam seus assuntos com definições verbais, nem sempre claras e precisas, onde determinada propriedade é enfatizada, acompanhadas de desenhos bem particulares do tipo “prototípicos” onde, por exemplo, quadrados e retângulos apresentam desenhados quase sempre com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, na sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na “horizontal” e sua altura na “vertical” (Figura 1).

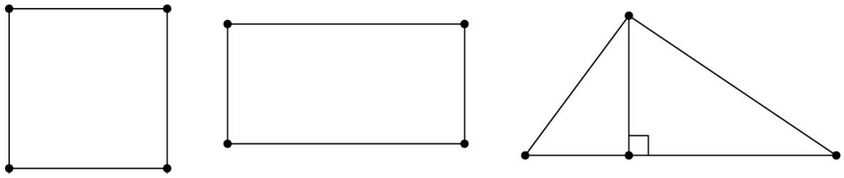

**Figura 1: Figuras geométricas em posições prototípicas.**

Isto leva nossos alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos em outras posições (como na Figura 2).

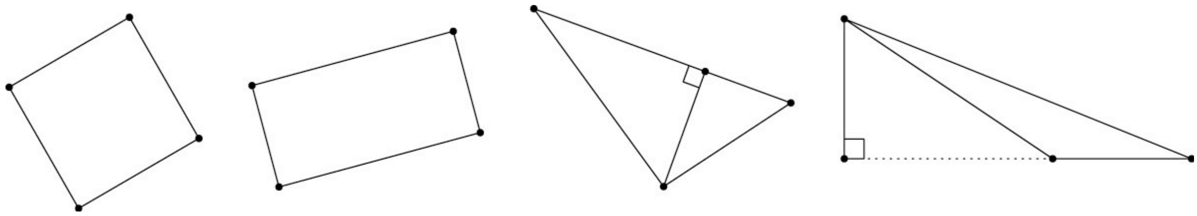

**Figura 2: Figuras geométricas em posições não prototípicas.**

Mais ainda: os exemplos e exercícios propostos são, em geral, aqueles cujas soluções são baseadas em operações aritméticas do tipo “calcule” ou em equações “determine o valor de x”, de modo que, para os alunos, a posição relativa do desenho quanto a borda da página, o traçado particular do segmento, a operação aritmética ou a equação utilizada passam a fazer parte das características do objeto estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos. Deste modo, a operação de multiplicação substitui o conceito de área e a soma substitui o conceito de perímetro, o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos se “escondem” em equações complicadas e o Teorema de Pitágoras acaba se reduzindo a uma pura aplicação da equação de segundo grau.

> O aspecto de construção dos objetos geométricos raramente é abordado; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução “construa” e, no entanto, esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. Mais difícil ainda é encontrar questões do tipo “o que podemos dizer nesta situação?” ou “que regularidades percebemos?”, onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas. (GRAVINA, 1996, p. 2).

Na formação dos conceitos da Geometria, a componente figural desempenha um papel fundamental. O desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento da componente conceitual. Se, por um lado, ele revela os conceitos e resultados que ajudam em sua


ISSN 2178-034X

compreensão, por outro, guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das propriedades que definem o objeto geométrico problematizado. Em diversas situações de aprendizagem, os~alunos devem, num mesmo problema, controlar diversas informações num mesmo desenho e deduzir aquelas propriedades importantes para sua compreensão. Como nos aponta Gravina (1996), faltam no contexto escolar mais atividades que explorem os conceitos geométricos em si:

> Deduzir uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses). Esta cadeia de raciocínios que denominamos de argumentação lógica e dedutiva. O desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades. (GRAVINA, 1996, p.3)

Tanto no caso da formação de conceitos, quanto no caso de dedução de propriedades, podemos concluir que grande parte das dificuldades se originam no aspecto estático do desenho: devemos explorar situações de aprendizagem que permitam "o controle do desenho para que características de contingência da representação não sejam incorporadas às propriedades matemáticas que determinam a configuração" (GRAVINA, 1996, p. 6). No sentido de evitar que características de representação sejam confundidas com as propriedades matemáticas dos objetos geométricos, devemos passar para um tratamento de "desenhos em movimento" onde particularidades da representação desapareçam quando impomos ao desenho movimentos de translação, rotação, entre outros.

Numa sala de aula convencional, atividades com dobraduras, recortes, colagens, papel quadriculado, entre outras, até podem propiciar configurações com "desenhos em movimento" mas, a partir de um certo grau de complexidade, onde são exigidos configurações com muitos objetos, o movimento sincronizado com esses recursos se torna difícil.

Neste contexto, os softwares de geometria dinâmica são especialmente convenientes. De fato: uma construção geométrica feita no papel com lápis, régua e compasso ou no quadro com giz é estática e, desta maneira, uma vez feita, ela não pode ser modificada. Para gerar outros exemplos, o professor ou o aluno deverá repetir o mesmo procedimento da construção com outros dados iniciais, o que é tedioso e toma um tempo precioso de sala de aula com uma atividade repetitiva. Em um software de geometria dinâmica, por outro lado, a construção é feita apenas uma única vez, com mais precisão e de tal modo que os elementos geométricos da construção podem ser alterados para gerar uma quantidade grande de exemplos. Mais ainda: ao mover os elementos geométricos da construção, as relações geométricas (pertinência, paralelismo, etc.) entre estes elementos são mantidas. Com isto, ao interagir com um software de geometria dinâmica, o aluno encontrará um ambiente propício à visualização, análise e dedução informal das relações geométricas da construção a partir do qual deduções formais e rigorosas podem ser construídas posteriormente.

É no dinamismo que está a chave da geometria dinâmica. Como um exemplo (dos vários que serão tratados no minicurso), considere a seguinte situação: a partir de um quadrilátero *ABCD*, marcam-se os pontos médios *P*, *Q*, *R* e *S* dos quatro lados desse quadrilátero e, então, constrói-se o quadrilátero *PQRS*. Que propriedade marcante o quadrilátero *PQRS* possui? Com lápis, papel e régua, o aluno poderia, eventualmente, fazer um desenho bem particular para o quadrilátero *ABCD* (como o retângulo e o losango indicados na Figura 3) e, então, deduzir uma propriedade (por exemplo, que *PQRS* é um losango ou retângulo) que não é válida em geral. O aluno ainda poderia fazer um desenho em posição geral, mas com um único desenho em mãos, talvez não conseguisse visualizar e analisar o problema.

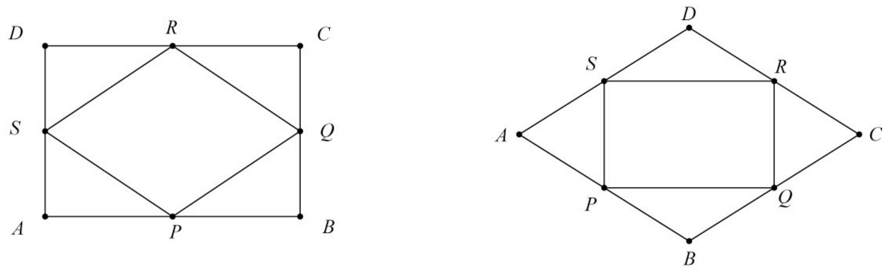


**Figura 3: Um invariante geométrico associado a quadriláteros em posições prototípicas.**

Em um software de geometria dinâmica, por outro lado, uma vez feita a construção, vários exemplos podem ser gerados facilmente movimentando-se os pontos iniciais *A*, *B*, *C* e *D* (os assim denominados pontos livres) da construção. Ao gerar vários exemplos, o aluno perceberá que nem sempre o quadrilátero *PQRS* é um losango ou um retângulo, como na figura anterior e, mais ainda, poderá considerar situações que não consideraria normalmente, como o caso em que o quadrilátero *ABCD* não é convexo (Figura 4). Usando um software de geometria dinâmica, o aluno experimentará mais e terá condições mais favoráveis para perceber a propriedade invariante do quadrilátero *PQRS*: ele é sempre um paralelogramo. Esta propriedade, ora conjecturada, pode (e deve) ser provada: como os pontos *R* e *S* são pontos médios, respectivamente, dos lados *AD* e *CD*, segue-se pelo teorema da base média do triângulo que *RS* é paralelo a *AC* e que $RS = AC/2$. Analogamente, *PQ* é paralelo a *AC* e $PQ =$


ISSN 2178-034X

*AC*/2. Logo, *RS* é paralelo a *PQ* e *RS* = *PQ*. Observando agora os triângulos *ABD* e *CBD*, podemos também concluir que *PS* é paralelo a *QR* e *PQ* = *QR*. Sendo assim, o quadrilátero *PQRS* é, de fato, um paralelogramo.

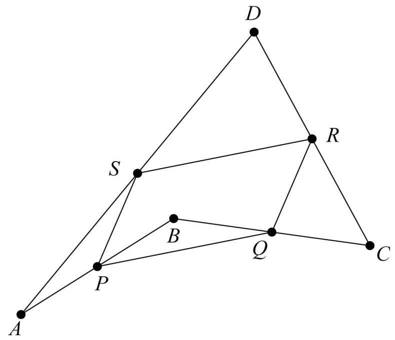


**Figura 4: Um invariante geométrico associado a quadriláteros em posição não prototípica.**

Como nos aponta ainda Gravina (1996), um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância e, para o seu reconhecimento e entendimento, nada melhor que a variação oferecida pelos softwares de geometria dinâmica. A transição contínua entre estados intermediários é um recurso importante desses programas sob o ponto de vista cognitivo porque permite a construção de uma infinidade de exemplos, o que favorece a construção de conceitos e destaca os invariantes geométricos presentes na configuração.

## 2. Proposta

Nesta oficina, pretendemos explorar uma seleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde o participante deve (1) implementar a construção sugerida no exercício em um software de geometria dinâmica (no caso, o GeoGebra para celulares), (2) estudá-la movendo os elementos "livres" da construção, (3) fazer uma conjectura para o invariante geométrico da construção e (4) provar sua conjectura.

Como fonte de pesquisa, usamos as seguintes referências: Alencar Filho (1983), Asociación Fondo de Investigadores e Editores (2012), Dolce & Pompeo (1993), Morgado, Wagner & Jorge (1973), Muniz Neto (2013) e Posamentier & Salkind (1970).

A lista de invariantes que serão trabalhados na oficina está disponível no seguindo endereço: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2016.1/enem/invariantes.pdf> (um recorte de uma lista mais completa de invariantes em Machado (2015)). Nos enunciados destes invariantes usamos os seguintes termos: ponto livre, ponto semilivre e invariante geométrico. Por ponto livre entendemos qualquer ponto da construção que pode ser arrastado para qualquer lugar. Por ponto semilivre entendemos um ponto que é construído sobre segmentos, semirretas, retas e círculos e cujo movimento fica restrito a estes objetos geométricos. Por invariante geométrico entendemos qualquer propriedade geométrica (concorrência, colinearidade, perpendicularismo, paralelismo, etc.) e também relações entre medidas de comprimento de segmentos, de áreas e de ângulos (segmentos congruentes, áreas equivalentes, ângulos complementares, suplementares, etc.) que permanecem invariantes com relação ao movimento dos pontos livres e semilivres.

O minicurso poderá ser conduzido em uma sala de aula ou qualquer outro espaço, pois o propósito é usar o GeoGebra em dispositivos móveis (smartphones, tablets ou notebooks) seguindo o procedimento BYOD (Bring Your Own Device/Traga Seu Próprio Dispositivo) (Figura 5).

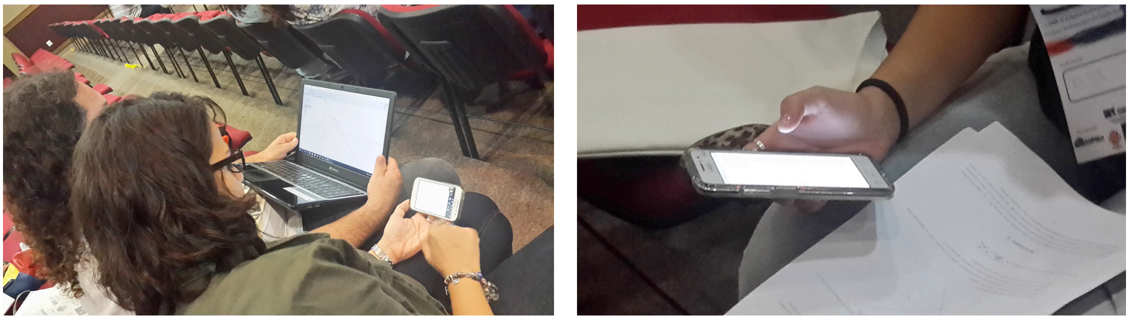

**Figura 5: Bring Your Own Device/Traga Seu Próprio Dispositivo: alunos usando o GeoGebra em dispositivos móveis diferentes.**

## 3. Referências

ALENCAR FILHO, E. *Exercícios de Geometria Plana*. Décima sexta edição. São Paulo: Nobel, 1983.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES E EDITORES (PERÚ). *Geometría: Una Visión de La Planimetría*. Segunda edición. Lima: Lumbreras, 2012.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry Revisted*. United States of America: The Mathematical Association of America, 1967.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana.* Sétima edição. São Paulo: Atual, 1993.

GRAVINA, M. A. *Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria.* Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996.

MACHADO, E. J. C. *Explorando Invariantes Geométricos com O GeoGebra: Uma Seleção para A Sala de Aula.* Dissertação de Mestrado Profissional. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2015.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II.* Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1973.

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana.* Segunda edição. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

POSAMENTIER,A. S.; SALKIND, C. T. *Challenging Problems in Geometry.* New York: Dover Publications, Inc, 1970.