

IMPLICAÇÕES DA CRIAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA RAZÃO DE SER DA ATIVIDADE MATEMÁTICA

Edmo Fernandes Carvalho
UEFS/NIPEDICMT
edmoxfc@gmail.com

Anderson Souza Neves
UFBA/NIPEDICMT
andersonsneves@gmail.com

Eliane Santana de Souza
UEFS/ NIPEDICMT
annystar_@hotmail.com

Luiz Márcio Santos Farias
UFBA/NIPEDICMT
lmsfarias@ufba.br

Resumo:

O ensino de matemática na educação básica passa constantemente por transformações. Ao longo da história, o ensino dos objetos matemáticos surgiu em decorrência das necessidades sociais, mas em alguns casos foi perdendo a razão de ser nas instituições de ensino. Neste artigo inferimos, a partir dos resultados de avaliações de larga escala, que existem dificuldades interligadas ao ensino e aprendizagem dos números fracionários, associadas ao fenômeno da não compreensão da razão de ser desse objeto nas práticas institucionais. Para aprofundar a discussão, focamos nas operações com números fracionários, considerando seu estatuto epistemológico. Em resposta a esse problema propomos um Percurso de estudo e pesquisa (PEP) para formação docente voltado a construção de situações didáticas. Visamos analisar como professores integram em suas escolhas didáticas elementos desse PEP, embasados na noção de reconstrução de praxeologias matemáticas. Os resultados apontam possíveis caminhos por meio do desenvolvimento do momento de trabalho da técnica.

Palavras-chave: Números fracionários; praxeologias matemáticas; Percurso de estudo e pesquisa.

1. Introdução

Neste artigo, apontamos a existência de um problema didático (PD), relacionado as dificuldades no ensino e aprendizagem dos números fracionários e a não compreensão da razão de ser (BOSCH & GASCÓN, 2010; LUCAS, 2010) desse objeto nas instituições de ensino da educação básica. Este é ressaltado, por exemplo, pelos resultados das avaliações de larga escala, como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, através do qual podemos inferir que as dificuldades são nos quatro

IMPLICAÇÕES DA CRIAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA RAZÃO DE SER DA ATIVIDADE MATEMÁTICA

Edmo Fernandes Carvalho
UEFS/NIPEDICMT
edmojc@gmail.com

Anderson Souza Neves
UFBA/NIPEDICMT
andersonsneves@gmail.com

Eliane Santana de Souza
UEFS/ NIPEDICMT
annystar_@hotmail.com

Luiz Márcio Santos Farias
UFBA/NIPEDICMT
lmsfarias@ufba.br

Resumo:

O ensino de matemática na educação básica passa constantemente por transformações. Ao longo da história, o ensino dos objetos matemáticos surgiu em decorrência das necessidades sociais, mas em alguns casos foi perdendo a razão de ser nas instituições de ensino. Neste artigo inferimos, a partir dos resultados de avaliações de larga escala, que existem dificuldades interligadas ao ensino e aprendizagem dos números fracionários, associadas ao fenômeno da não compreensão da razão de ser desse objeto nas práticas institucionais. Para aprofundar a discussão, focamos nas operações com números fracionários, considerando seu estatuto epistemológico. Em resposta a esse problema propomos um Percurso de estudo e pesquisa (PEP) para formação docente voltado a construção de situações didáticas. Visamos analisar como professores integram em suas escolhas didáticas elementos desse PEP, embasados na noção de reconstrução de praxeologias matemáticas. Os resultados apontam possíveis caminhos por meio do desenvolvimento do momento de trabalho da técnica.

Palavras-chave: Números fracionários; praxeologias matemáticas; Percurso de estudo e pesquisa.

1. Introdução

Neste artigo, apontamos a existência de um problema didático (PD), relacionado as dificuldades no ensino e aprendizagem dos números fracionários e a não compreensão da razão de ser (BOSCH & GASCÓN, 2010; LUCAS, 2010) desse objeto nas instituições de ensino da educação básica. Este é ressaltado, por exemplo, pelos resultados das avaliações de larga escala, como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, através do qual podemos inferir que as dificuldades são nos quatro

eixos da matemática escolar, indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998).

A propósito, destacamos que as concepções sobre números fracionários, que representam um megaconceito, tem sido alvo de estudos (SILVA, 1997, 2005; LOPES, 2008, BERTONI, 2008), devido à complexidade associada a ideia de fração enquanto entidade numérica. O uso do termo número fracionário para indicar os números escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, encontra algumas barreiras tais como: o sujeito que estuda, o reconhece como dois números um sobre o outro, e não como uma única entidade; e não o compreende como conceito multifacetado (LOPES, 2008), ou com diferentes concepções (SILVA, 2005); e por fim está ligado a técnicas dominantes de disseminação, especialmente quando se refere as operações.

O ensino dos números fracionários, enquanto saber institucionalizado ao longo da história, enfrenta outra dificuldade, o uso da resolução de problemas enquanto metodologia, indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998), como ponto de partida do ensino da matemática. Mesmo após algumas décadas dessa recomendação e das pesquisas acadêmicas em torno dessa problemática, ainda identificamos resultados insatisfatórios, dos estudantes, nas referidas avaliações de larga escala.

Apresentamos dois aspectos dessa problemática, um referindo-se ao saber, e outro como esse saber será ensinado. O que fora exposto, auxilia-nos a configurar melhor o PD. Para que possamos aprofundar o estudo de um fenômeno relacionado a tal problema, concentramos a atenção a adição de números fracionários, visto que que as dificuldades em torno do ensino e aprendizagem podem ser aumentadas devido sua natureza epistemológica.

Nesse artigo, apresentamos um recorte de uma investigação realizada no programa de pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências e no âmbito do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias (NIPEDICMT/UFBA) pelo primeiro autor, trazendo alguns elementos da análise de modelos epistemológicos dominante (MED) e de referência (MER), em que é feita descrição e interpretação do âmbito matemático (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013), e a desconstrução e reconstrução de praxeologias matemáticas.

Como resposta didática ao PD, postulamos a desconstrução e reconstrução de praxeologias matemáticas na instituição pesquisada. Vale ressaltar que o MER, onde se dá esse processo, é um modelo relativo, que constitui para o investigador um instrumento de emancipação a respeito das diferentes instituições que formam parte do seu objeto de estudo tais como a sociedade, escola, sala de aula (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013), ou seja, é um modelo que parte das escolhas do pesquisador.

Mas é por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), dispositivo didático (CHEVALLARD, 2005), que em nossa investigação fora embasado em outros dispositivos de formação de professores (SILVA, 2005, CHEVALLARD 2005; FARRAS, BOSCH, GASCÓN 2010), que a resposta ao PD se materializa.

Nesse artigo, buscamos responder a uma das questões relacionadas ao PD, na *dimensão ecológica*: Que papel tem a criação e resolução de problemas no desenho e na prática de uma organização didática de professores de matemática para o ensino do objeto adição de números fracionários?

Os resultados revelam a possibilidade de iniciar a reflexão da atividade matemática dentro da instituição pesquisada, por meio do momento de trabalho da técnica, com o levantamento de hipóteses, questões problemáticas e escolha de ferramentas matemáticas mais adequadas para resolução dos problemas. Com efeito, consideramos que a proposta pode ser melhor integrada as escolhas didáticas dos professores à medida que o trabalho com situações didáticas (BROUSSEAU, 1986) vão fazendo parte do repertório dos referidos professores.

2. Praxeologias matemáticas no processo de resolução de problemas

Compreendemos a atividade matemática (AM) como atividade humana, dentro de instituições (CHEVALLARD, 1999). De forma muito específica, esse autor nos ofertou um modelo teórico que nos permite enfrentar PD (LUCAS et al. 2014). Dessa forma, queremos dizer que as dificuldades enfrentadas no ensino de matemática também são de ordem institucional, envolvendo toda a forma de organização da AM e atividade didática (AD) dentro de instituições, como por exemplo na escola.

Essa noção também permite, compreender as condições de existência e restrições de objetos matemáticos e sua organização em instituições. Nesse contexto, como forma de analisar as AM nas instituições. Desse modo, Chevallard (1999), propôs a noção de praxeologia, como forma de entender as ações humanas (do professor e dos alunos), utilizando assim um conjunto formado por ações $[T, \tau, \Theta, \Theta]$, onde T representa tipo de tarefa (problemas matemáticos na nossa investigação), τ representa a técnica (as predominantes ou as menos usuais usadas para solucionar as tarefas), Θ a tecnologia (propriedades que justifiquem as técnicas) e Θ a teoria (que justifica a tecnologia).

No âmbito da TAD, os problemas matemáticos são tratados como tarefas, cuja delimitação depende do ponto de vista da instituição onde se desenvolvem praxeologias, cujo intuito é descrever a atividade com objetivo definido (ALMOULOUD, 2007). Isso implica de certa forma na ruptura e criação de um novo contrato, não necessariamente nessa ordem.

Nossa proposta está pautada na necessidade latente de reconstrução das tarefas enquanto construções das instituições (CHEVALLARD, 1999). Entendemos que essa reconstrução das tarefas, pode passar por uma mudança de ação didática, em que o professor pode criar/elaborar problemas matemáticos, fugindo de tarefas que comumente engessa técnicas, as vezes validadas pelo livro didático (LD).

O PD, supostamente presente no 6º ano, quando nos referimos a adição de números fracionários, configura-se pelo uso de técnicas dominantes, refletindo assim possivelmente na ausência de ações reflexivas, no sentido de compreender a razão de ser das tarefas e técnicas utilizadas, nas práticas ligadas a essa instituição (BOSCH, GASCÓN, 2010).

Outrossim, a análise praxeológica permite olharmos os problemas que envolvem o objeto matemático em questão, como tarefas e indagarmos se tais tarefas reconhecidas nas instituições referem-se apenas à atividade de adicionar fracionários com denominadores iguais e com denominadores diferentes.

Percurso de Estudo e Pesquisa

O PEP, se constitui como núcleo da nossa investigação realizada no intuito de analisar a forma como professores integram a criação e resolução de problemas com números fracionários em suas escolhas didáticas, que implica na integração da noção de situações didáticas. Esse dispositivo didático, por meio de sequências didáticas para formação de professores, pretendeu promover o estudo e a reconstrução de praxeologias matemáticas, que implicava na tentativa de apresentação de diferentes técnicas de resolução de problemas.

O ponto de partida de desenvolvimento do PEP, foi a abertura de espaço para as questões docentes, aquelas que representavam os anseios das participantes da investigação. Tratava-se na verdade de um PEP para formação docente em serviço, que além da reconstrução de ferramentas matemáticas como as técnicas de resolução de tarefas, era proposto também a reconstrução das organizações didáticas para o ensino da adição de números fracionários.

Ao levantar hipóteses a respeito das técnicas que seriam utilizadas na resolução das tarefas as professoras já realizavam uma análise a priori de uma situação didática e visualizavam possibilidades de modificar os valores das variáveis didáticas das situações. Essa ação reflexiva, permitiu não só a reconstrução de praxeologias matemáticas, mas a tornar clara opções que orientariam a organização didática dessas docentes.

3. Resultados e discussão

Para o desenvolvimento do PEP construímos duas sequências de atividades que compreendiam uma proposta de elaboração de problemas com concepções de números fracionários e adição para o trabalho com três professoras de uma escola pública na região da Chapada Diamantina - Bahia. O trabalho foi iniciado com questões docentes, aquelas que traduzissem as inquietações das participantes sobre o objeto matemático e seu ensino. Depois para trabalhar as diferentes concepções sobre números fracionários (SILVA, 2005), e construção de situações didáticas, com foco no levantamento de hipóteses e estudo das ferramentas matemáticas (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013).

Foi necessário incluir textos para estudo e aprofundamento do PD, sendo as *variáveis didáticas* uma noção forte que orientava a criação de problemas (MALASPINA, 2013). De forma concomitante, discutíamos a razão de ser do objeto matemático em questão, visto que essa contribuiria para o processo de construção das situações.

Nossa organização didática (OD) proposta no PEP, consistiu em expor as participantes à situação de resolução de tarefas (problemas nos contextos intra e extra-matemático), que eram para nossa investigação organizações matemáticas pontuais (SILVA, 2005), num segundo momento, após as reflexões e apresentação de técnicas variadas de resolução, partimos para construção de situações para o ensino desse saber no sexto ano.

Isso implicou diretamente na proposta de reconstrução de ferramentas matemáticas, e na organização didática dessas docentes para o ensino do objeto matemático em jogo. Além disso, essa estruturação do PEP, evocava análises a priori das situações construídas. Nesse contexto nossas análises são distribuídas de duas formas: a primeira quanto ao material produzido por essas professoras nas sessões de estudo (SE) do PEP, depois produção individual para experimentação em sala de aula.

Devido ao debate de confrontação (ALMOULOU, 2007) provocado nas SE, os efeitos eram mais diretos, no sentido de variação de técnicas, o que podemos apontar como gênese do momento didático do trabalho da técnica. Desse modo, identificamos que o processo de resolução embasados na proposição de variadas técnicas contribuiu para a elaboração de novos problemas, ou seja, situações mais problemáticas, com as quais é possível iniciar um trabalho de investigação matemática na sala de aula.

O objetivo da análise a priori proposta na construção das situações didáticas, era poder controlar os possíveis comportamentos dos estudantes, pela escolha mais acertada dos valores das variáveis didáticas manipuladas, essa etapa constitui a análise didática (ALMOULOU, 2007) das situações que seriam propostas para alunos do sexto ano, bem como das ferramentas que surgiriam – estratégias ou técnicas, consistindo numa análise matemática (ALMOULOU, 2007). Dentre as variáveis manipuladas no PEP, a que aparece fortemente é o tipo de tarefa (problema) que estava associado as concepções de números fracionários, isso focando a operação de adição. Dessa forma, poderiam alterar os valores concepção de partedo, ou medida para tornar mais econômico para o estudante o processo de resolução dos problemas.

Era esperado também que ao resolverem as suas próprias tarefas, as participantes identificassem possíveis lacunas, referentes a estrutura da linguagem utilizada, conceito, tipo de número, uso de figuras, recursos que deveriam utilizar, para desenvolvimento de situações construídas para o ensino do objeto do saber em jogo. Esses aspectos contemplam a organização didática das docentes, em termos de suas escolhas didáticas. Como exemplo do trabalho com uma das ferramentas matemáticas acessíveis ao nosso trabalho (as técnicas), trataremos a seguir de um problema e as modificações realizadas pelas docentes, em termos de valores das variáveis didáticas.

Da descrição e interpretação feita por meio da análise do modelo epistemológico dominante (MED), destacamos o modelo algébrico presente na instituição livro didático $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{axd + bxc}{bx d}$, que era esperado como o dominante entre as praxeologias na instituição pesquisada. Embasados num estudo de Guerra e Silva (2008), utilizamos uma referência para tal saber por meio de uma noção que evoca a ideia de área de um retângulo como produto de dois segmentos conforme foi feito por Euclides a partir do livro II.

Nesse recorte das elaborações das docentes, identificamos uma inclinação para situações com problemas extra-matemáticos. As variáveis identificadas pelo grupo, para mudança de valores foram a concepção de número fracionário (V1), o tipo de figura (V2), as interações entre os estudantes (V3) e o tipo de número fracionário (V4). Cabe destacar que o processo de elencar as técnicas também repercutiu dificuldades quanto à forma de expressá-las na língua natural. Buscou-se na elaboração justificar as possíveis técnicas que seriam utilizadas pela razão de ser do objeto matemático naquela instituição. O discurso tecnológico precisava ser explicitado à medida que as docentes enunciavam suas produções, entretanto não conseguimos avançar nesse momento didático, revelando a incompletude na atividade matemática naquela instituição.

Ademais podemos dizer, que as participantes foram fieis a apresentação de técnicas que não priorizassem o uso de algoritmos, dessa forma apresentando-se de forma distinta do manual didático adotado naquela escola.

Tarefa 2.1 (elaborada pela professora P1 por modificação nos valores das variáveis):

Um grupo de quatro amigos foram a uma pizzeria e pediram uma pizza média com 6 fatias. Cada amigo comeu uma fatia e das que sobraram um dos amigos resolveu dividir em dois pedaços iguais e comeu um. Qual a fração da pizza que sobrou para ser embrulhada para viagem?

Questionada sobre as possíveis técnicas para solução dessa tarefa a professora P1 apresentou a técnica (τ_1), que consiste em dividir os pedaços restantes na mesma quantidade de partes iguais da fatia dividida. Fazer o mesmo com o total de fatias e com a ideia de dupla contagem representar a nova fração. Isso pode ser representado da seguinte maneira:

$$\frac{1x2 + 1}{6x2} = \frac{3}{12}$$

O discurso tecnológico indicado pela professora (Θ) é a equivalência de fracionários, que segundo sua opinião só aparece de forma diferente nessa técnica.

Para visualizarmos o momento de trabalho da técnica no desenvolvimento da sequência com as professoras foi preciso incentivá-las a produzirem outras técnicas. A partir disso, a professora P2 informou ao grupo que já teria visto uma técnica que precisava constatar se funcionava com a adição e subtração de qualquer tipo de número fracionário e se só funcionava na adição de apenas duas entidades numéricas. A professora apresentou tal técnica (τ_2), que consiste em um algoritmo que comumente é utilizado em disciplinas de cálculos por alguns professores em instituições de ensino superior: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1.2+1.6}{6.2} = \frac{8}{12}$ o grupo percebeu que tinha algo de errado nessa técnica, o que provocou momento de reflexão. As frações encontradas por meio das duas técnicas não representavam o mesmo número racional.

O que ocorreu nessa técnica que resultou em erro foi que a concepção de um fracionário como operador precisava surgir no momento da escrita do número que representou metade de uma fatia da pizza: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, o número um doze avos deveria substituir o que indicava a metade. No momento que a professora utiliza o fracionário $\frac{1}{2}$ está utilizando a ideia de somar uma fatia que corresponde à metade da pizza a outra que corresponde a $\frac{1}{6}$ da mesma pizza. A reflexão caminhou para o uso dessa técnica numa turma de 6º ano. As outras professoras temiam que fosse mais uma técnica que induzisse os estudantes a processos

mecânicos de resolução, mesmo porque apresentavam dificuldade para compreender o discurso tecnológico associado a tal técnica para o ensino do objeto em questão na instituição sala de aula de 6º ano.

Apresentamos mais uma técnica que as professoras tentaram utilizar para essa tarefa. Ela se baseia no modelo epistemológico de referência do objeto matemático adição de números fracionários, o qual tratamos no eixo II e que fora passado como leitura complementar em que a ideia de área de uma unidade inteira é associada à adição de números fracionários pelo princípio da contagem. A técnica (τ_3) consiste em tomar um círculo dividido em 6 áreas de medidas iguais (seis fatias). Em seguida na mesma figura dividir cada fatia em duas partes iguais. Considerar que havia duas fatias que podem ser representadas pelas frações $\frac{2}{6}$ ou $\frac{4}{12}$. Após um dos amigos comer metade de uma fatia sobrou $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, escrever o fracionário equivalente a $\frac{1}{6}$ que corresponde a pizza dividida em 12 fatias ($\frac{2}{12}$). Por fim somar os números $\frac{2}{12}$ e $\frac{1}{12}$. Essa técnica foi adaptada. As professoras tiveram contato com essa técnica cuja figura utilizada foi um quadrado e realizaram uma adaptação modificando a figura para um círculo. Comparando os resultados encontraram números fracionários equivalentes entre as técnicas (τ_1) e (τ_3).

Na elaboração da tarefa, uma das professoras considera como importantes duas variáveis (V1) e (V2), pois as relaciona diretamente as possíveis técnicas que podem surgir para resolução e sobre esta tem possibilidade de realizar modificações de forma que alcance os objetivos definidos. A primeira tem como valores as concepções de parte-todo e medida e a segunda, a forma como será conduzido o processo de resolução, em um momento individual e a confrontação das estratégias para resolução quando discutimos a viabilidade das técnicas apresentadas e possibilidades de surgirem outras.

Quanto a noção de variável didática enquanto elemento que o professor pode manipular, ou seja, está relacionada as suas escolhas didáticas, e que altera a hierarquia das estratégias dos estudantes (BESSOT, 1994), não se chegou a um consenso em relação a variável (V2). Entretanto, pensamos que ao menos, o valor confrontação das soluções dos estudantes, pode ser um caminho que conduza os demais alunos a pensarem nas possibilidades de diferentes maneiras de resolver problemas. Isso revela a importância do conhecimento a respeito da manipulação das variáveis didáticas e de seus valores, e essa

análise é indissociável do processo de construção de situações didáticas, o que nos levou a confirmar que o trabalho embasado na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986), já aborda os dois aspectos discutidos em âmbitos diferentes, o de criação e de resolução de problemas.

Considerações Finais

É preciso destacarmos que um trabalho voltado ao ensino de um objeto matemático por meio da criação e resolução de problemas, pode ser integrado as escolhas didáticas de professores, primeiro pelo processo de formação docente de forma continuada, que em nossa investigação ocorreu a partir da proposição de um percurso de estudo e pesquisa, e em segundo lugar tendo como eixo norteador dessa proposta a noção de situações didáticas.

Salientamos que a discussão sobre as consequências da criação de problemas no processo de resolução, toma outro rumo do ponto de vista institucional e pela proposição de situações didáticas para o ensino dos objetos matemáticos.

Quanto ao processo de reconstrução de praxeologias, foi possível identificar que é apenas um passo inicial para atacar a incompletude da atividade matemática, falamos do ponto de vista do contexto investigado, isto porque, nesse, o campo de atuação com a proposta do PEP, não ultrapassou os limites do momento didático de trabalho da técnica, sendo que era necessário o desenvolvimento do momento tecnológico-teórico, como forma de construção e compreensão de um discurso racional que justificasse o bloco técnico-prático. A esse respeito é possível concluirmos que o não desenvolvimento desse último momento didático, não somente reflete sobre a incompletude da atividade matemática dentro de instituições escolares, mas também compromete a compreensão da razão de ser do objeto em questão, nessas instituições, refletindo diretamente nas praxeologias dos sujeitos que dela fazem parte.

Referências

ALMOULOU, S. Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 209 - 237.

BESSOT, A. Panorama del quadro teorico della didattica matematica in Francia. **L'educazione matematica**, Anno XV - Serie IV - Vol.1, nº1, Italie, 1994.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”, IN: Bronner, Alain et al. **Apports de la théorie anthropologique du didactique: Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. IUFM de l'académie de Montpellier 2010, p.55-90.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de 5ª a 8ª série** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v.7, n.2, pp.33-116. Grenoble, 1986.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 19, nº 2, 1999.

CHEVALLARD, Y. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire**, APMEP, pp. 239-263, 2005.

FARRAS, B. B., BOSCH, M. GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013.

GUERRA, R. B., SILVA, F. H. S. As operações com frações e o princípio da contagem. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, n.31, 2008, pp. 41-54.

LOPES, A. J. O que os nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22. 2008.

LUCAS, C. **Organizaciones matemáticas locales relativamente completas** (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo, 2010.

LUCAS, C. O. et. al. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.16, n.1, pp.1-24, 2014.

MALASPINA, U. La Creación de problemas de Matemáticas en la formación de profesores. In: VII CIBEM. Montivideo, Uruguay. **Actas...** Montivideo, Uruguay, 2013.pp.129-140. ISSN 2301-0797.

SILVA, M. J. F. da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação de mestrado em ensino de matemática. PUC-SP, 1997, p.22-24.

SILVA, M. J. F. da. **Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para quinta série**. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo. Brasil, 2005, 301f.