

SIGNOS PRODUZIDOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO DOS ALUNOS

Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR
lourdes@uel.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva
UTFPR- Londrina – PR
karinapessoa@gmail.com

Resumo:

Neste trabalho investigamos a relação entre signos produzidos e ou mobilizados em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. Para isso, nos apoiamos em aspectos da semiótica peirceana que nos possibilitam articular os conhecimentos dos alunos viabilizados por meio de signos matemáticos ou não matemáticos que produzem e ou mobilizam no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. A atividade que analisamos foi desenvolvida por um grupo de alunos em sala de aula na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. A análise indica que a relação entre signos e conhecimento dos alunos parece se configurar como uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento, por meio de uma estrutura que associa conhecimento matemático, conhecimento sobre o problema em estudo e conhecimento tecnológico.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Semiótica; Signos; Conhecimento.

1. Introdução

As discussões relativas à construção do conhecimento no âmbito da Educação Matemática, especialmente no contexto escolar nos diversos níveis de escolaridade, vêm ocupando professores e pesquisadores da área. Essa construção de conhecimento, entretanto, tem relação com especificidades das atividades desenvolvidas e das possibilidades que elas proporcionam para a abordagem do que se deseja conhecer.

Neste texto interessa-nos colocar em discussão a construção de conhecimento durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Considerando a natureza contextual de atividades desse tipo, conhecimentos matemáticos e não matemáticos podem ser construídos ou ativados.

Todavia, os objetos em Matemática tem natureza simbólica e o acesso a eles é mediado por representações. A abordagem dessas representações, num sentido amplo, remete

SIGNOS PRODUZIDOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO DOS ALUNOS

Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR
lourdes@uel.br

Karina Alessandra Pessoa da Silva
UTFPR- Londrina – PR
karinapessoa@gmail.com

Resumo:

Neste trabalho investigamos a relação entre signos produzidos e ou mobilizados em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. Para isso, nos apoiamos em aspectos da semiótica peirceana que nos possibilitam articular os conhecimentos dos alunos viabilizados por meio de signos matemáticos ou não matemáticos que produzem e ou mobilizam no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. A atividade que analisamos foi desenvolvida por um grupo de alunos em sala de aula na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. A análise indica que a relação entre signos e conhecimento dos alunos parece se configurar como uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento, por meio de uma estrutura que associa conhecimento matemático, conhecimento sobre o problema em estudo e conhecimento tecnológico.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Semiótica; Signos; Conhecimento.

1. Introdução

As discussões relativas à construção do conhecimento no âmbito da Educação Matemática, especialmente no contexto escolar nos diversos níveis de escolaridade, vêm ocupando professores e pesquisadores da área. Essa construção de conhecimento, entretanto, tem relação com especificidades das atividades desenvolvidas e das possibilidades que elas proporcionam para a abordagem do que se deseja conhecer.

Neste texto interessa-nos colocar em discussão a construção de conhecimento durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Considerando a natureza contextual de atividades desse tipo, conhecimentos matemáticos e não matemáticos podem ser construídos ou ativados.

Todavia, os objetos em Matemática tem natureza simbólica e o acesso a eles é mediado por representações. A abordagem dessas representações, num sentido amplo, remete

à Semiótica na qual argumentações contemporâneas são destacadas por Charles Sanders Peirce.

Investigações da abordagem peirceana em Matemática e, particularmente, na modelagem matemática, já podem ser percebidas na literatura. Podemos citar, por exemplo, Almeida e Silva (2012), Silva (2013).

Neste texto, em particular, nos propomos a discutir a relação entre signos produzidos e ou mobilizados em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. Para isso, nos apoiamos em aspectos da semiótica peirceana que nos possibilitam articular os conhecimentos dos alunos viabilizados por meio de signos matemáticos ou não matemáticos que produzem e ou mobilizam no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

2. Modelagem Matemática e interlocuções com a semiótica peirceana

A modelagem matemática diz respeito a uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não matemática. Assim, em linhas gerais, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial – problema a ser investigado – e uma situação final – modelo matemático que serve para descrever, representar e/ou prever aspectos associados ao problema.

Um modelo matemático diz respeito a um conjunto de símbolos, operações, relações e regras que podem ser usadas para descrever, explicar ou prever o comportamento da situação em estudo. Nesse sentido, um modelo matemático não se restringe a expressões algébricas, podendo ser um gráfico, uma tabela, um texto, uma imagem que expresse relações matemáticas identificadas na situação.

Para os autores Almeida, Silva e Vertuan (2012) é possível identificar elementos que, de modo geral, constituem uma atividade de modelagem. Segundo os autores

[...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou analisados durante a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Pensar a abordagem de conceitos matemáticos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, entretanto, requer considerar a natureza simbólica destes conceitos que, segundo Lins (2004), “são conhecidos, não no que eles são, mas apenas em suas propriedades, no que deles se pode dizer” (p. 96).

Assim, aquilo a que se tem acesso são representações dos conceitos e é a partir delas e por meio delas que se pode abordar a construção de conhecimento por aqueles envolvidos na atividade de modelagem matemática.

A necessidade das representações nos remete à Semiótica, cujo ente fundamental é o signo. Para Peirce (2005), o signo é o elemento por meio do qual um intérprete pode conhecer, modificar ou ampliar o entendimento de algo – o objeto do signo. Visando caracterizar o que é um signo, Santaella (2004, p. 8) diz que signo é “[...] qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa outra coisa, chamada de objeto do signo e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial [...]”.

Para Peirce (2005) a representação é uma função do signo e representar é “estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro” (p. 61). Peirce faz também uma relação entre signo e representação: “Quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato da representação, pode-se denominar o primeiro de ‘signo’ e o último de ‘representação’” (p. 61).

Os encaminhamentos em uma atividade de modelagem matemática são amparados nos conhecimentos acerca da situação em estudo e dos conceitos matemáticos utilizados para encontrar uma solução para o problema advindo dessa situação. Assim, os signos, utilizados e/ou produzidos pelos alunos são indicativos do conhecimento que os alunos produzem e/ou acionam durante o desenvolvimento da atividade.

3. Aspectos metodológicos

Para investigar a relação entre signos produzidos e /ou mobilizados em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos, analisamos uma atividade desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e

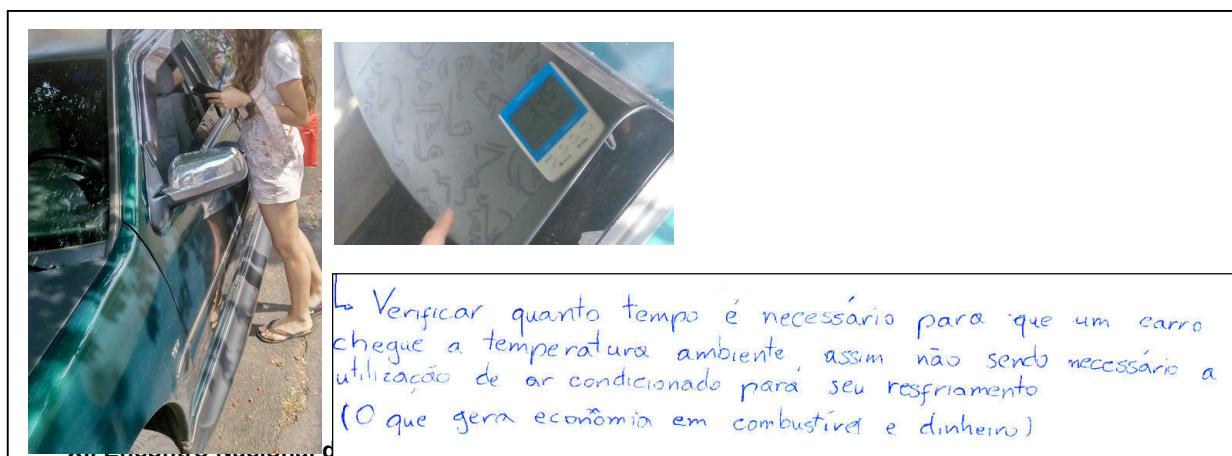
Integral I ministrada por uma das autoras deste texto em uma universidade pública do estado do Paraná. Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa qualitativa e de análise interpretativa.

A atividade foi desenvolvida durante aulas regulares da disciplina. As informações que analisamos foram obtidas usando registros escritos dos alunos bem como a transcrição de gravações em áudio e vídeo do desenvolvimento dessa atividade, obtidas com o consentimento dos mesmos.

A turma era composta por 44 alunos que formaram grupos para desenvolver atividades de modelagem matemática. Analisamos as informações relativas à atividade desenvolvida por um desses grupos formado por quatro alunos.

4. A atividade de modelagem e os signos produzidos e/ou mobilizados

A atividade cujas informações subsidiam nossas argumentações neste texto tem como temática *A análise da variação da temperatura no interior de um veículo após a sua permanência sob o sol*. O grupo que desenvolveu a atividade era composto por quatro alunos (A1, A2, A3 e A4) e o interesse surgiu dos próprios alunos que, em geral, deixam o veículo no sol em períodos de trabalho ou aula. Para a coleta de dados o grupo usou o veículo de um dos participantes que havia permanecido sob o sol e colocou-o na sombra, abriu os vidros e fez uso de um termômetro digital que mede temperatura de ambientes, anotando de 2 em 2 minutos a temperatura interna do veículo. A temperatura inicial registrada era de 35°C e o interesse dos alunos era determinar o tempo necessário para essa temperatura chegar a 27°C , temperatura ambiente no início do processo de coleta de dados. (Figura 1).



Fonte: Relatório dos alunos.

Figura 1: Coleta de dados e problema definido pelos alunos

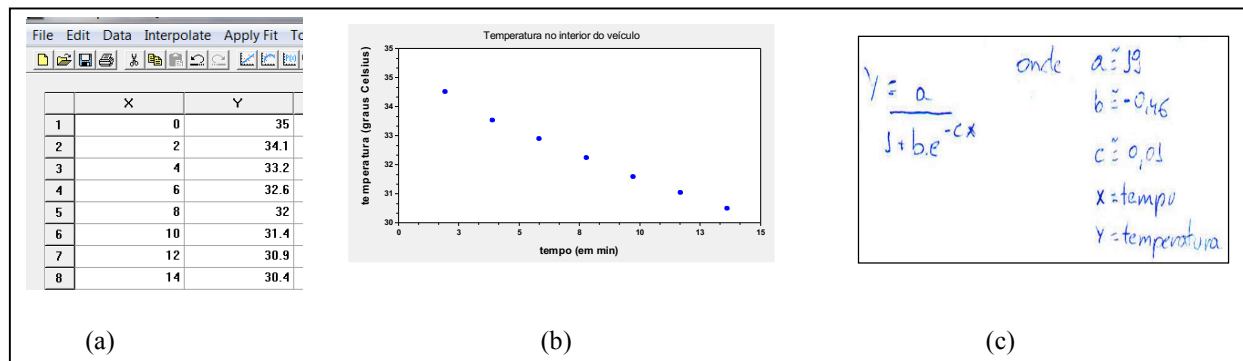
O encaminhamento da atividade na sala de aula, num período de cinco horas/aula, iniciou com os dados trazidos pelos alunos conforme indica a Tabela 1.

Na resolução do problema, a matematização da situação foi mediada pelo uso do software Curve Expert¹. As representações geradas com o apoio do software referem-se à tabela e pontos no plano cartesiano (itens (a) e (b) da Figura 2). A partir dessa representação, com o uso do software, ajustaram aos dados a curva $Y(x) = \frac{19}{1 - 0,46e^{-0,01x}}$ em que Y representa a temperatura no interior do veículo (em graus Celsius) em função do tempo x , em minutos (item (c) da Figura 2).

Tabela 1: Os dados coletados pelos alunos

| Tempo | Temperatura no interior do veículo | Tempo | Temperatura no interior do veículo |
|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|
| 0 min | 35 °C | 8min | 32 °C |
| 2min | 34,1 °C | 10min | 31,4 °C |
| 4min | 33,2 °C | 12min | 30,9 °C |
| 6min | 32,6 °C | 14min | 30,4 °C |

Fonte: Relatório dos alunos.



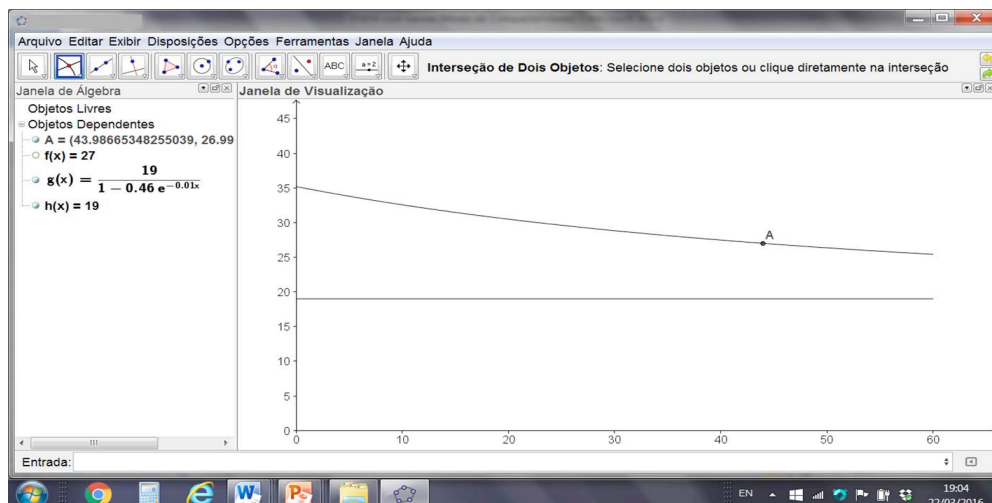
Fonte: Relatório dos alunos

Figura 2- Representações produzidas pelos alunos

Para a análise do problema em estudo os alunos determinaram o tempo necessário para a temperatura do interior do veículo chegar a 27 graus Celsius. Para isso, inicialmente, fizeram a representação gráfica usando o software Geogebra², conforme a indicação do ponto A na Figura 3 e também usaram procedimentos algébricos conforme mostra a Figura 4.

¹ Trata-se de um software livre e que viabiliza o ajuste de funções a diferentes tipos de dados.

² Software livre de uso frequente em aulas de Cálculo Diferencial e Integral.



Fonte: Relatório dos alunos

Figura 3: - Representação gráfica da função ajustada

| | | |
|--|--|---|
| $27 = \frac{19}{1 - 0,46 \cdot e^{-0,01 \cdot x}}$ $(1 - 0,46 e^{-0,01 \cdot x}) 27 = 19$ $27 - 12,42 e^{-0,01 \cdot x} = 19$ $-12,42 e^{-0,01 \cdot x} = 19 - 27$ $-12,42 e^{-0,01 \cdot x} = -8$ | $e^{-0,01 \cdot x} = \frac{-8}{-12,42}$ $e^{-0,01 \cdot x} = 0,64$ $-0,01 \cdot \ln e = \ln 0,64$ $x = \frac{-0,44}{-0,01}$ $x = 44$ | <p>Logo, pode ser comprovado que quando o carro ficar com os vidros abertos embaixo da sombra, após 44 minutos, o automóvel terá atingido a temperatura ambiente.</p> |
|--|--|---|

Fonte: Relatório dos alunos

Figura 4: Procedimento algébrico dos alunos para determinar a resposta para a questão

Assim, a resposta para a questão que os alunos se propuseram a responder na atividade é de que o tempo necessário para a temperatura chegar a 27 graus Celsius é de, aproximadamente, 44 minutos. Vale observar que os alunos fizeram aproximações nas casas decimais.

Ainda que parecessem satisfeitos do ponto de vista da resposta obtida (o tempo necessário para a temperatura chegar a 27 graus Celsius), três aspectos chamaram a atenção dos alunos: o que aconteceria se continuassem medindo a temperatura depois de 44 minutos? o número 19 como na expressão algébrica (modelo matemático) obtida; a temperatura cai mais rapidamente nos primeiros instantes.

Estes aspectos foram se evidenciando e ganhando relevância na medida em que os alunos conversaram com a professora, conforme indicam trechos transcritos dessa conversa.

Perguntados sobre a escolha do modelo ajustado aos pontos pelo software Curve Expert, o aluno A1 responde:

A1: Professora, a gente sabe que a função precisa ser assintótica, pois vai tendendo a se igualar à temperatura ambiente e o modelo logístico a gente já viu que dá certo naquela atividade [referindo-se à outra atividade desenvolvida em sala de aula].

Profa: E o que significa o dezoito na função?

A3: É que, usando essa função, a temperatura não fica menor que dezoito, não é isso?

Profa: Exatamente. Mas isso vai acontecer na situação-problema que estão estudando?

A3: Não sei.....

A4: Se vai chegar a dezoito?

A1: Não vai chegar a dezoito, professora. Vai chegar só até vinte e sete que é a temperatura do ambiente. Não vai ficar menos do que isso.

Os demais alunos do grupo acenaram e validaram a resposta de A1, justificando que o modelo escolhido (item (c) da Figura 2) é adequado para a situação.

Já para interpretar do ponto de vista matemático a observação de que nos primeiros instantes a temperatura cai mais rapidamente (isto pode ser observado nos dados da Tabela 1), os alunos se remeteram ao conceito de derivada já abordado em aulas anteriores, conforme afirmação de A4:

A4: Agora a gente poderia calcular a derivada não é professora? Com isso temos a taxa de variação da temperatura em qualquer tempo que quisermos, não é?

Profa: E o que isso significa?

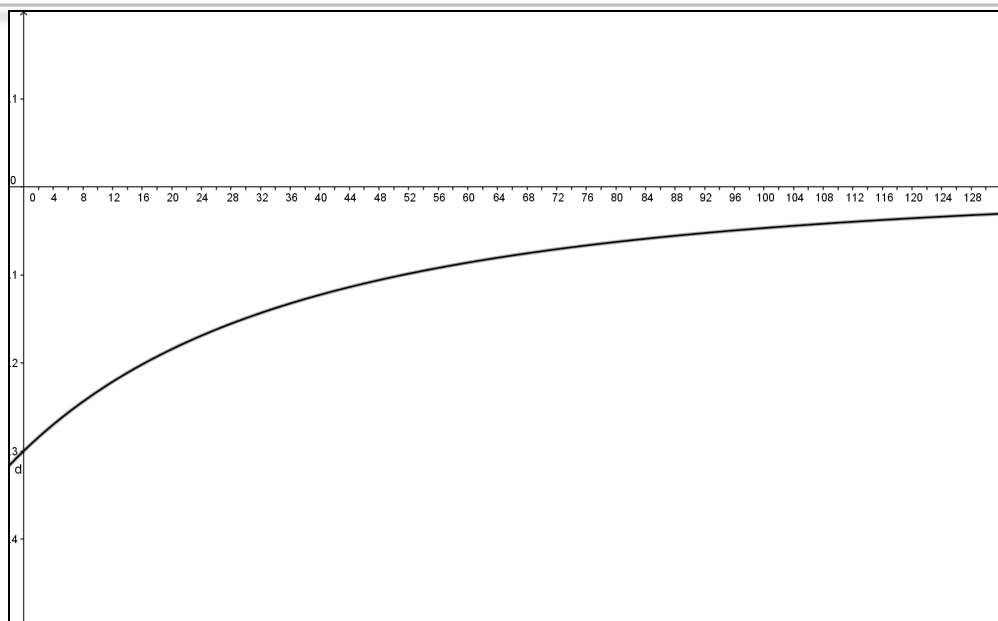
A2: Hummmm.... A derivada posso calcular no GeoGebra? (referindo-se ao uso do software Geogebra já introduzido nas aulas).

Profa: Respondam o problema.

Com a sugestão de A2, os alunos calcularam a derivada da função

$Y(x) = \frac{19}{1 - 0,46 \cdot e^{0,01 \cdot x}}$ utilizando o software GeoGebra e obtiveram a função derivada

$Y'(x) = \frac{437 \cdot e^{0,01x}}{1058(e^{0,01x})^2 - 4600e^{0,01x} + 5000}$, conforme representado na Figura 5.



Fonte: Relatório dos alunos

Figura 5- Cálculo e representação gráfica da derivada da função ajustada no GeoGebra

No entanto, um dos integrantes do grupo (A1) decide realizar procedimentos algébricos para determinar a derivada da função conforme mostra a Figura 6.

$$y'(x) = \frac{0,1 - 0,46e^{-0,01x} - 19(0 + 0,0046e^{-0,01x})}{(1 - 0,46e^{-0,01x})^2}$$

$$y'(x) = \frac{-0,0874e^{-0,01x}}{(1 - 0,46e^{-0,01x})^2}$$

$$y'(x) = \frac{-0,0874e^{-0,01x}}{1 - 0,92e^{-0,01x} + 0,2116(e^{-0,01x})^2}$$

Fonte: Relatório dos alunos

Figura 6- Cálculo algébrico da derivada da função

Com a resolução desenvolvida por A1, os alunos, com a professora, interpretaram a variação do resfriamento do interior do veículo, conforme transcrição:

Profa: E o que vocês podem concluir observando a derivada?

A1: É negativa! Nossa, é negativa.

A2: Sim, porque é resfriamento, lembra daquela situação da esfera de aço quente? [remetendo a aulas anteriores]

Profa: E observando a representação gráfica feita no GeoGebra?

A1: A função derivada é crescente. Espera... e assintótica.

Profa: E o que isso significa?

A2: Se substituirmos valores aqui para x na função derivada temos... vamos ver, para x igual a dois [calculando no GeoGebra], temos que o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função Y é menos

zero vírgula vinte e oito [escrevendo $-0,28$], que fisicamente indica que quando x é igual a dois minutos, a taxa de resfriamento no interior do veículo é de zero vírgula vinte e oito graus Celsius por minuto. Estou analisando aqui, professora. Se fizermos para outros valores teremos... [calculando no GeoGebra] x igual a quatro a taxa é menos zero vírgula vinte e sete, e fisicamente representa que a taxa de resfriamento é zero vírgula vinte e sete; x igual a seis dá uma taxa de resfriamento de zero vírgula vinte e seis. Parece que a taxa de resfriamento no interior do veículo vai diminuindo com o passar do tempo.

A4: Faz aí para x igual a quarenta e quatro minutos.

A2: Taxa de resfriamento é de zero vírgula onze. Diminuiu.

A1: Pensei que seria mais próximo de zero.

Profa: Quando seria próximo de zero?

A3: Com essa função? Quando fosse perto de dezenove graus Celsius. Mas isso não vai acontecer no nosso problema. Quando chega à temperatura do ambiente não tem mais variação... a taxa de variação é praticamente nula. Vou anotar isso aqui. (Figura 7).

O cálculo da derivada da função e sua representação gráfica possibilitaram aos alunos estabelecer relações entre esse conteúdo matemático e o resfriamento do interior do veículo, conforme indica a transcrição e anotações feitas por A3 (Figura 7).

A taxa de variação inicial, é maior do que a final, pois o carro resfria-se até que atinja a temperatura de seu equilíbrio com o ambiente, e não esfria mais, ou seja, mantém-se constante.

Fonte: Relatório dos alunos

Figura 7- Considerações sobre derivada e a situação em estudo

5- Discussão

A análise da relação entre signos produzidos e/ou mobilizados em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos nos permite afirmar que os encaminhamentos no desenvolvimento da atividade são amparados nos conhecimentos acerca da situação e dos objetos matemáticos utilizados para encontrar uma solução para o problema definido.

Assim, os signos, produzidos e/ou mobilizados pelos alunos, têm relação, ora com a situação, ora com o problema em estudo, ora com os objetos matemáticos e ora com a resposta reconhecida como uma solução para o problema. Ou seja, os signos se configuram

como meios pelos quais os alunos manifestam seus pensamentos e conhecimentos enquanto buscam encontrar uma solução para o problema advindo da situação.

Os alunos, inicialmente, usando um termômetro digital, produziram uma primeira anotação (tabular) para, a partir dessa, acionar a produção de um conjunto de representações que viabilizassem a obtenção do tempo para a temperatura no interior do veículo chegar à temperatura ambiente. Em certo sentido, esta definição do problema (um signo produzido) reflete um conhecimento fundamental dos alunos: a temperatura vai se aproximar da temperatura do ambiente (27°C , no momento da coleta dos dados).

Este conhecimento viria a ser colocado ‘em xeque’ quando da obtenção do modelo matemático. De fato, a função indicada pelo software, não faz nenhuma indicação ao valor 27 e, ao invés disso, apresenta outro valor, 19.

Nesse sentido, a interação entre conhecimento matemático e conhecimento com relação ao problema era indispensável para o entendimento, indicando que conhecimento sobre o fenômeno e conhecimento matemático são indissociáveis em uma atividade de modelagem matemática.

Outro aspecto indicativo dessa interação diz respeito ao uso e à interpretação da derivada na análise da taxa de variação da temperatura realizada pelos alunos. Neste caso, associaram o sinal da derivada, que é negativa, ao resfriamento do interior do veículo. Além disso, o decréscimo da taxa de variação, em módulo, foi associado pelos alunos ao resfriamento mais rápido no interior do veículo nos instantes iniciais da coleta de dados, conforme indicam os dados da tabela 1.

O que a atividade também indica é que aulas de Cálculo Diferencial e Integral mediadas por atividades de modelagem matemática, em grande medida, requerem a articulação com conhecimento tecnológico, em particular, com o uso de softwares projetados com propósitos educativos. De fato, nesta atividade diversos signos produzidos pelos alunos foram mediados pelo uso de software. Seja para ajustar a função (Curve Expert) seja para fazer as representações gráficas e calcular a derivada (GeoGebra), os softwares proporcionaram a compreensão de diferentes características do fenômeno em estudo. Neste caso, o uso do software promoveu uma reorganização da atividade intelectual dos estudantes uma vez que a compreensão do problema foi apoiada também nas representações produzidas.

Em termos gerais, podemos afirmar que nessa atividade, a relação entre signos e conhecimento dos alunos parece se configurar como uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento e também geram novo conhecimento. Nesta rede, podemos caracterizar uma estrutura que associa conhecimento matemático, conhecimento sobre o problema em estudo e conhecimento tecnológico (no caso dessa atividade o uso e a interpretação de determinados signos produzidos com o apoio computacional).

Estes três ‘conhecimentos’ são interdependentes na medida em que matemática e tecnologia auxiliam na compreensão de situações da realidade, favorecendo a elaboração de respostas para determinadas questões associadas a estas situações. Ao mesmo tempo, a compreensão do problema favorece a compreensão da matemática, como é o caso, por exemplo, da interpretação da derivada de uma função.

Atividades de modelagem matemática, pela sua caracterização conforme considerada nesse texto, viabilizam esta articulação de ‘conhecimentos’. O olhar semiótico, isto é, o olhar sobre a produção e o uso de signos, para as representações dos alunos viabiliza perceber essas articulações.

5. Referências

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. . Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação matemática. In: BICUDO, Maria A. V. BORBA, M. C. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 92-120.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos).

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SILVA, K. A. P. Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.