

## A ABORDAGEM INICIAL DO CONCEITO DE DERIVADA EM DOIS LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Allan Silva Ferreira<sup>1</sup>  
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais  
professorallan@uol.com.br

### Resumo:

Neste pôster, apresentamos um recorte do nosso estudo sobre a abordagem do conceito de derivada em livros-texto de Cálculo Diferencial e Integral. Trazemos algumas considerações sobre o referido tópico presente em dois livros-texto, com grande circulação no Brasil entre professores e estudantes de Cursos de Ciências Exatas, dos autores Georg Thomas e Georg Simmons, publicados em 1987 e 2006, respectivamente. Verificamos como o conceito de derivada é apresentado nas obras, se existem abordagens históricas e qual é o teor dos exemplos e exercícios. Consideramos que a abordagem geométrica é mais explorada por Thomas, sendo constatada maior diversidade e aplicações nos exercícios. No livro de Simmons, são louváveis os aspectos históricos, porém, existem poucos exemplos e exercícios, estes são tradicionais, não se verificando uma contextualização ou interdisciplinaridade. Nenhum dos autores demonstra uma preocupação em fazer uma transição da abordagem geométrica do conceito de derivada para uma abordagem algébrica.

**Palavras-chave:** Cálculo Diferencial e Integral; derivada; livro-texto.

### 1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos ramos mais importantes da Matemática devido a sua vasta aplicação. Dividido em disciplinas, nos currículos de diversos cursos de Ciências Exatas, é fundamental para as áreas da Engenharia.

Como docente de cursos superiores, ao longo dos anos ensinando o tópico *derivada* para alunos iniciantes nos cursos de Engenharia, observo uma enorme dificuldade de muitos estudantes em relação à compreensão do conceito de derivada. Geralmente, este assunto, é introduzido com aulas expositivas, definições formais, interpretação geométrica – não necessariamente nesta ordem – regras de derivação e, em seguida, os alunos devem se debruçar sobre uma enorme lista de exercícios de fixação.

BISOGNIN & BISOGNIN (2011) recorrem a David Tall para assinalarem que as dificuldades apresentadas pelos estudantes no tocante ao conceito de derivada, pois os mesmos não estabelecem as devidas conexões entre as representações gráfica e analítica.

<sup>1</sup> Mestrando do programa de pós-graduação de Ensino em Ciências e Matemática da PUC-MG, Professor auxiliar no Centro Universitário Newton Paiva, Belo Horizonte - MG.

Estudos recentes de GARZELLA (2013) e WROBEL (2013) mostraram que o índice de reprovação e desistência na disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral I* vem aumentando ao longo dos anos. Foi possível comprovar tais estudos observando o que vinha acontecendo em minhas turmas de Cálculo Diferencial, a partir de fevereiro de 2010, quando assumi esta disciplina na instituição na qual leciono.

Tal constatação levou-me a buscar outra metodologia, deparando com o seguinte desafio: Como contribuir para que o conceito de derivada seja abordado da melhor maneira possível e que tal abordagem seja de fato significativa, levando os alunos a construir um conhecimento concreto, bem como, entender sua funcionalidade, ou seja, como e onde aplicamos a derivada? Dentro desta perspectiva, Chervel assinala:

Ensinar (enseigner) é, etimologicamente, “fazer conhecer pelos sinais”. É fazer com que a disciplina se transforme, no ato pedagógico, em um conjunto significativo que terá como valor representá-la, e por função torna-la assimilável (CHERVEL, 1990, p.192).

As palavras de Chervel, inicialmente, remeteram-me a um debate, através de conversas informais com outros colegas resolvi realizar um estudo sobre o conceito de derivada. Num primeiro momento, realizei entrevistas com professores antigos de Cálculo I (Cálculo Diferencial e Integral) na tentativa de compreender como a derivada era introduzida por eles. Posteriormente, houve também a preocupação de investigar quais livros eram utilizados por aqueles docentes na época em que lecionavam, e como era realizada a introdução do conceito de derivada pelos autores. Deste modo, o estudo aqui apresentado teve como motivação inicial os diversos questionamentos na área profissional.

## 2. Análise das obras

Dentre todos os livros pesquisados, faremos um recorte apresentando dois deles no que diz respeito à introdução do conceito de derivada, um do final da década de oitenta do século XX e, outro, do século XXI. As obras escolhidas foram:

- a. SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- b. THOMAS, George B. *Cálculo - Volume 1*. Trad. Paulo Boschov. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

A opção por apresentarmos, neste trabalho, essas duas obras se justifica pelas abordagens e ênfases distintas entre os autores.

A fundamentação teórico-metodológica, para nosso estudo, se concentra na Análise Textual Discursiva, MORAES (2003). Nossa análise foi de cunho qualitativo e se baseou no método dedutivo, do geral para o particular, sendo construídas previamente as categorias de análise.

Objetivamos verificar como o conceito de derivada é apresentado nos livros (abordagem algébrica e/ou geométrica), se os autores incluem aspectos históricos e qual é o teor dos exemplos e exercícios, verificando o enfoque dos enunciados, a sua contextualização e interdisciplinaridade. Apresentamos, a seguir, uma descrição e análise das obras.

A obra mais antiga é *Cálculo com Geometria Analítica*, de George Simmons, edição brasileira de 1987. Já no prefácio, é possível identificar a proposta do autor: sua pretensão é que o livro seja um texto de Cálculo que pode ser utilizado em todos os cursos superiores, que tenham a disciplina, tendo como pré-requisitos conhecimentos de álgebra e geometria em nível do 2º grau, ou seja, o equivalente atualmente ao Ensino Médio.

Ainda no prefácio, Simmons garante que foi dada grande ênfase à motivação e à compreensão intuitiva, sendo negligenciados os refinamentos da teoria.

Segundo o autor, a maioria dos alunos se revela impaciente quanto à parte teórica do assunto, e seu propósito maior foi o de apresentar o Cálculo como uma arte de resolver problemas.

O objetivo principal do texto é explorar assuntos para os quais o cálculo é útil – o que ele nos possibilita fazer e compreender – e não qual é sua natureza lógica, quando encarado do ponto de vista especializado (e limitado) do matemático puro moderno (SIMMONS, 1987, p..XVI).

O tópico derivada é abordado no capítulo 2, intitulado: *A Derivada de uma Função*. O autor inicia a discussão com uma pergunta: *O que é Cálculo? O problema das tangentes*.

Simmons parte da premissa de que todas as ideias e aplicações do Cálculo giram em torno de dois grandes problemas geométricos que, segundo ele, são facilmente entendidos:

PROBLEMA 1: O problema básico do cálculo diferencial é o problema das tangentes: Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P.

PROBLEMA 2: O problema básico do cálculo integral é o problema das áreas: Calcular a área abaixo do gráfico, entre os pontos  $x = a$  e  $x = b$ .

A intenção do autor foi estabelecer relações iniciais entre o cálculo e a geometria, pois, segundo ele, esse é o contexto em que as ideias do Cálculo são mais facilmente compreendidas. Logo em seguida, existe um posicionamento, baseado em fatos históricos, a respeito do Cálculo, com a prerrogativa de que o Cálculo não foi “inventado” e, sim, que foi um produto de um longo processo evolutivo que teve início na Grécia Antiga e continuou no

século XIX. O autor cita ainda a grandeza e a importância de Newton e Leibniz e suas ricas contribuições para o Cálculo. A partir daí, concentra suas atenções no problema da reta tangente, desde sua definição até como calcular o coeficiente angular (inclinação) da mesma. Em relação aos exemplos apresentados, percebe-se um número insuficiente (apenas dois) para o entendimento de tal abordagem. Em seguida, dez exercícios sobre retas tangentes; todos bem tradicionais e sem nenhuma ilustração gráfica. Em seguida, a derivada é formalmente definida como função (SIMMONS, 1987, p. 79).

*Dada uma função  $f(x)$  qualquer, sua derivada  $f'(x)$  é a nova função cujo valor num ponto  $x$  é definido por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O autor traz dois exemplos utilizando a definição formal (resolução com limites); logo em seguida, chama a atenção quanto ao uso das diversas notações para a derivada – algo bastante pertinente – alegando que usar a notação correta pode suavizar o caminho e realizar boa parte do nosso trabalho, enquanto notações equivocadas podem nos imobilizar, ficando quase impossível uma movimentação fácil. Uma notação adequada auxilia o entendimento e o raciocínio do aluno.

O autor finaliza a compreensão de derivada relacionando-a como taxa de variação no tópico intitulado: *Velocidade e taxa de variação*. Neste ponto, Simmons inicia o assunto com uma pincelada no passado, afirmando que, problemas envolvendo velocidade instantânea foram responsáveis por tornar o Cálculo um instrumento de pensamento essencial para Newton.

A abordagem do conceito de derivada, como taxa de variação instantânea é, sem dúvida alguma, bastante rica quanto à sua aplicabilidade e infere-se que o autor não explorou tal riqueza. Verificam-se poucos exemplos de aplicação (apenas três), o mesmo pode-se dizer sobre os exercícios propostos relacionados a essa abordagem, são treze exercícios propostos, bastante tradicionais.

O capítulo 2 desta obra não cumpre o objetivo da compreensão imediata do conceito de derivada. Os exemplos e exercícios, além de serem insuficientes, são bastante tradicionais, há pouca diversidade no quesito aplicação da derivada. Não se percebe, por parte do autor, uma preocupação com a contextualização e, muito menos, com a interdisciplinaridade, também não há uma exploração gráfica satisfatória que proporcione um maior auxílio à percepção geométrica da derivada. A grande parte dos exercícios são mecânicos e repetitivos.

Consideramos que o autor não conseguiu atingir seu principal objetivo que era o entendimento do *conceito* de derivada e sua aplicabilidade.

Na segunda obra analisada, *Cálculo - Volume 1*, escrita por George Thomas, edição brasileira do ano de 2009, em seu segundo prefácio, constata-se que a intenção do autor foi buscar captar o estilo e os pontos fortes das edições anteriores. Seu objetivo esteve amparado em dois aspectos: recuperar as melhores características das edições clássicas da obra e, ao mesmo tempo, ouvir cuidadosamente as sugestões de inúmeros usuários e revisores, adequando-a para o currículo das universidades. O autor destaca, ainda, que tentou escrever o livro da *maneira mais clara e precisa possível*.

Thomas inicia o tópico derivada no final do primeiro capítulo intitulado *Limites e Continuidade*, mais precisamente, em seu último tópico nomeado: *Reta tangente e derivadas*. O autor nos mostra o que é uma reta tangente a uma curva, derrubando alguns mitos sobre retas tangentes, chamando a atenção para o fato de que a maioria das curvas não tem centro; e uma reta, que talvez quiséssemos chamar de “tangente”, pode interceptar o gráfico de uma função em outros pontos ou apenas no ponto de tangência. Após a definição de tangência passa-se ao estudo do coeficiente angular, através de definição, seguido de alguns exemplos.

Encerrando a unidade 2, destaca-se a razão incremental  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  vista no cálculo do coeficiente angular da reta tangente; argumenta-se que se a razão incremental tem limite com  $h$  tendendo a zero, esse limite será denominado *derivada* de  $f$  em  $x_0$ . É aqui que a palavra *derivada* surge pela primeira vez na obra de George Thomas.

No capítulo 3, intitulado *Derivação*, inicia-se por um breve resumo do que será tratado no capítulo. O autor remete à vasta aplicabilidade das derivadas, destacando as diversas áreas de conhecimento em que as derivadas são utilizadas. É possível inferir que o propósito do autor, ao trazer as informações iniciais, seja despertar uma curiosidade pelo assunto.

O posicionamento histórico da derivada é disponibilizado como material adicional no *site* da editora, isso é mostrado apenas como um destaque no canto superior esquerdo da página, denominado: *Companion Website (Ensaio histórico)*. A análise desse material mostra que o mesmo é didaticamente organizado e estruturado. O fato de estar disponibilizado apenas como material adicional e na WEB, leva-nos a concluir que o mesmo pode não ser consultado por alguns estudantes, pois, apesar dos avanços tecnológicos, nem todos têm acesso à Internet.

Em seguida a derivada é formalmente definida como função (THOMAS, 2006, p.145).

A derivada de uma função  $f(x)$  em relação à variável  $x$  é a função  $f'$  cujo valor em  $x$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Verifica-se, neste tópico, a presença de seis exemplos resolvidos de derivadas a partir da definição formal. As diferentes notações de derivada são tratadas logo a seguir, assim como a representação geométrica da derivada. Percebe-se, neste tópico, uma preocupação com a qualidade e diversidade dos exemplos, um cuidado com a contextualização também pode ser constatado. Isso também é verificado nos exercícios propostos para este tópico, um total de sessenta e seis exercícios. A partir daí, são tratadas as regras de derivação, com certo rigor matemático, uma vez que todas as regras são demonstradas e existe uma quantidade satisfatória de exemplos resolvidos, graduados em diferentes níveis de dificuldade.

O tópico seguinte, intitulado *A derivada como taxa de variação*, contempla diferentes áreas de conhecimento em que as derivadas são aplicadas, começando pela Física, com o conceito de velocidade instantânea, em seguida, a aceleração. Outras áreas de conhecimento também são tratadas como, por exemplo, Ciências Econômicas, introduzindo o conceito de funções marginais e são apresentados diversos exemplos de aplicação, de diferentes níveis de dificuldade. O mesmo pode dizer dos exercícios propostos ao final deste tópico.

Uma lista considerável, trezentos e vinte exercícios, é proposta ao final do capítulo, incluindo exercícios mecânicos, problemas contextualizados, interdisciplinares, com gradação de nível de dificuldade. Estes são relacionados a diversas áreas e trazem aplicações que despertam a curiosidade como, por exemplo: estimando altura de um prédio, estimando volumes de sólidos geométricos, cunhando moedas, efeito das manobras de voo sobre o coração e medindo a aceleração da gravidade.

### 3. Considerações Finais

A abordagem geométrica do conceito de derivada é tratada de forma muito mais contundente na obra de Thomas, percebe-se uma forte preocupação em relação à ilustração, o que, sem dúvida alguma, complementa o entendimento da interpretação geométrica da derivada dado a partir da visualização. O mesmo pode-se dizer em relação à abordagem algébrica, a obra de Thomas se destaca mais uma vez, principalmente no quesito diversidade e aplicabilidade. A obra de Simmons tem como aspecto positivo a preocupação com o posicionamento histórico da derivada.

As diferenças em relação à abordagem inicial do conceito de derivada, dos tipos de exemplos e exercícios, da forma de contextualização entre as duas obras analisadas, são frutos da concepção de cada autor sobre como se deve conduzir o referido tópico. Lembramos que Thomas, no prefácio do seu livro, deixa claro a sua pretensão em recuperar as melhores características das edições clássicas da sua obra e atentar para as sugestões de leitores e revisores, fazendo as devidas adaptações para o currículo das universidades. Considerando estes aspectos, Thomas se esforçou por conduzir alterações em seu livro, buscando outros objetivos em relação aos programas curriculares mais atuais dos cursos de Ciências Exatas e primando por um maior nível de excelência em relação às edições anteriores.

Não foi observada, em nenhuma das obras, a preocupação com a transição das abordagens, geométrica para algébrica. O que se põe em questão e justifica-se uma discussão sobre o ordenamento de tais abordagens.

Constata-se, pela análise das obras selecionadas, que o conceito de derivada é iniciado pela abordagem geométrica, especificamente sobre retas tangentes e sua inclinação. Essa forma de abordagem, segundo os autores, traz uma maior clareza para o estudante, uma vez que a visualização auxilia o entendimento do conceito.

Ao mesmo tempo, essa abordagem pode trazer empecilhos para os alunos, como bem observam Bisognin & Bisognin (2011). As autoras constataram que os alunos participantes da sua pesquisa apresentavam dificuldades em relação ao conceito de derivada de funções a partir de uma perspectiva gráfica (BISOGNIN & BISOGNIN, 2011, p. 523).

Estudos de ALMOULOU ET AL. (2004), OLIVEIRA JR & MIZIARA (2014) e COSTA & SANTOS (2015) apontam problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da geometria. É recorrente que a geometria vem sendo deixada de lado, principalmente na Educação Básica. Esta realidade já sinaliza que a abordagem inicial sendo geométrica, possivelmente não despertará interesse no aluno ou dificultará o entendimento da relação entre a geometria e o conceito de derivada num primeiro momento.

A grande ênfase dada à álgebra, com a geometria ocupando um lugar secundário nas escolas, a partir da década de 1970, com o Movimento da Matemática Moderna, ainda se faz sentir. Este fato justifica a discussão sobre o assunto, se a abordagem inicial da derivada teria ou não um melhor entendimento por parte dos alunos se fosse discutida inicialmente pela abordagem algébrica. Mas esse já é um tema para outras pesquisas.

#### 4. Agradecimentos

Agradeço à Prof. Dra. Elenice de Souza Lodron Zuin, da PUC Minas, por toda contribuição, conselhos e avaliações a mim dedicados para a realização deste trabalho.

#### 5. Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag, MARINQUE, Ana Lucia, SILVA, Maria José F., CAMPOS, Tânia M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, v. 27, p. 94-108, set/dez. 2004.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 509-526, 2011.

CHERVEL, André. Histórias das Disciplinas Escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

COSTA, André Pereira da; SANTOS, Marcelo Câmara. Aspectos do pensamento geométrico demonstrado por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACION MATEMÁTICA, 14, 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Memórias... Disponível em: <xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv\_ciaem/xiv\_ciaem/paper/view240>. Acesso em 4 mar. 2016,

GARZELLA, Fabiana A. C. **A disciplina de cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. 2013. 257f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, SP, 2013.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

OLIVEIRA JÚNIOR, Ailton Paulo de; MIZIARA, Eduardo Luiz. Concepção e prática de professores de Matemática em relação ao ensino de geometria no Ensino Fundamental. **Ensino Em Re-Vista**, v. 32, n.1, p. 175-188, jan./jun. 2014.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

THOMAS, George B. **Cálculo - Volume 1**. Trad. Paulo Boschov. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

WROBEL, J.S. *et al.* Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 41. Gramado. **Anais...** Gramado: UFRGS, 2013.