

## O USO DA HISTÓRIA NA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDA: UMA ABORDAGEM NO CÁLCULO DE ÁREAS

*Jamara Lima Santos*  
*Universidade do Estado da Bahia - UNEB*  
*jamara923@gmail.com*

*Tatiane Novais Brito*  
*Universidade do Estado da Bahia - UNEB*  
*thati.novais@hotmail.com*

*Daniel de Jesus Silva*  
*Universidade do Estado da Bahia-UNEB*  
*djsilva@uneb.br*

### **Resumo:**

Nesse relato de experiência apresentamos uma sequência de atividades desenvolvidas em sala de aula, quando estudávamos a componente curricular Cálculo II, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus VI* em Caetitê-Ba. A atividade foi desenvolvida a partir da utilização da História da Matemática, em especial, no que tange o Cálculo Integral. A proposta foi auxiliar aos alunos a ressignificar o cálculo de áreas de regiões planas irregulares através de uma Atividade Investigativa utilizando a História da Matemática, onde foram proporcionadas ricas discussões sobre o método da exaustão, a soma de Riemann e a Integral Definida. Percebemos que ao inserir uma nova perspectiva metodológica, os alunos tiveram a oportunidade de associar conceitos vistos em sala de aula com o cotidiano, e que a História da Matemática contribuiu de forma significativa para a compreensão do conceito da Integral Definida.

**Palavras-chave:** História da Matemática; Cálculo de áreas; Integral Definida.

### **1. Introdução**

É notável que alguns discentes enxerguem a Matemática como uma disciplina de difícil compreensão, devido durante muito tempo o ensino ser pautado em fórmulas e conceitos de forma meramente mecânica. Mesmo os estudantes sabendo que vivenciam a Matemática constantemente, às vezes a maioria ainda não consegue assimilá-la à sua vida de forma significativa e refletir as suas diversas aplicabilidades.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) para a disciplina Matemática, apontam para benéficas mudanças no perfil profissional dos professores de Matemática. Destacam a importância de o docente ensinar aos

seus educandos a Matemática como uma ciência que assim como as outras possui uma história, que seus conteúdos surgiram das inquietações e necessidades de ordem prática para explicarem fenômenos locais e que assumiu grande importância para o avanço da sociedade. Nesse sentido, “o contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.” (BRASIL, 1997, p. 20).

Dessa forma, a História da Matemática apresenta-se como uma perspectiva metodológica para a construção do conhecimento matemático, o que possibilita ao professor uma variedade de possibilidades que contribuem positivamente no processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina. Permite ao docente trabalhar os conhecimentos desde sua origem, mudanças e transformações ao longo do tempo, promovendo uma compreensão contextualizada, contrapondo à mesmice de apenas expor de forma- às vezes- maçante axiomas, definições, teoremas e fórmulas.

Durante o semestre letivo 2015.1 foi perceptível a eficiência do uso da História da Matemática, numa turma do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus VI / Caetitê*, quando o professor da disciplina Cálculo II utilizou essa metodologia no processo de ensino do conteúdo Integral Definida. Foram desenvolvidas atividades investigativas via História da Matemática, em que os discentes puderam calcular áreas de regiões planas irregulares, utilizando técnicas que os direcionaram para a construção do conceito e definição da Integral Definida.

## 2. A História da Matemática e a Educação Matemática

O uso da História da Matemática em sala de aula apresenta-se como uma ferramenta capaz de contextualizar e estabelecer relações com a realidade dos alunos, dando-lhes a capacidade de atribuir significados a muitos conceitos matemáticos possibilitando assim a sua compreensão. Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática menciona que:

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar crítico sobre os objetos do conhecimento. (BRASIL, 1997, p.46).

Assim, os estudantes desenvolvem habilidades de relacionar melhor o que aprendem com o meio que estão inseridos. Partindo do princípio que a Matemática surgiu para resolver problemas e que a resolução desses fez a humanidade evoluir significativamente, conduzindo-nos ao avanço em diversos aspectos culturais, sociais, tecnológicos e econômicos. D’Ambrósio salienta:

As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D’AMBROSIO, 1999, p. 97)

Abordar essas discussões em sala de aula contribuirá para que os estudantes fundamentem seu conhecimento matemático e estabeleçam relações com outras disciplinas e contextos, desmistificando assim que o saber matemático se faz apenas com memorização de conceitos e fórmulas, que a matemática é meramente abstrata e desconectada da realidade. D’Ambrósio (1999, p.97) reforça essa questão ao afirmar que : “acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas”. Portanto, apresentar a Matemática na sala de aula de maneira descontextualizada pode contribuir para que os discentes sintam apatia por essa disciplina, pois não conseguem estabelecer relações entre o real e o abstrato, gerando assim desmotivação, aversão, temores, que são barreiras no processo de ensino e aprendizagem, que muitas vezes é refletido pelo grande índice de reprovação dos educandos na disciplina.

Professores/pesquisadores na área de Educação Matemática, como Lara (2003) Silva (2016), apontam que o ensino de Matemática desde os Anos Iniciais até o Ensino Superior precisam ser vistos por outra vertente, apontam também a necessidade de utilizar maneiras diversificadas para ensinar a Matemática tanto para educandos do ensino básico e de curso superior. Porém, as mudanças precisam estrategicamente ser trabalhadas na formação de professores, pois só assim esses sairão melhores capacitados para lidar com o ensino de Matemática de uma maneira mais dinâmica e contextualizada.

A História da Matemática possui esse potencial, pois por meio dela se tem uma excelente forma de explicitar a relação da Matemática com o meio que estamos inseridos, desde a sua criação até os dias atuais. D’Ambrósio (1999) menciona que não se pode contestar que o professor de Matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática na Educação Matemática.

Assim, é necessário que os professores dos cursos de formação docente orientem os educandos a enxergarem a Matemática como uma criação humana que se encontra inacabada e ainda em constante desenvolvimento, que da mesma maneira que foi utilizada no passado para o avanço de muitas civilizações, ela continua contribuindo para a estruturação e desenvolvimento em diversas áreas, com aplicabilidade em diversos setores da sociedade. Dessa forma, o professor ajudará desconstruir o equívoco que muitos discentes possuem, de que Matemática se resume à fórmulas e teoremas extensos. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática reforçam que:

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1997, p.34)

Os PCN’s (1997, p.34) ressaltam ainda que a História da Matemática esclarece que a Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática, como a divisão de terras e cálculo de créditos, por problemas vinculados a outras ciências, bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

## 2. A utilização da História da Matemática e a construção do Conhecimento

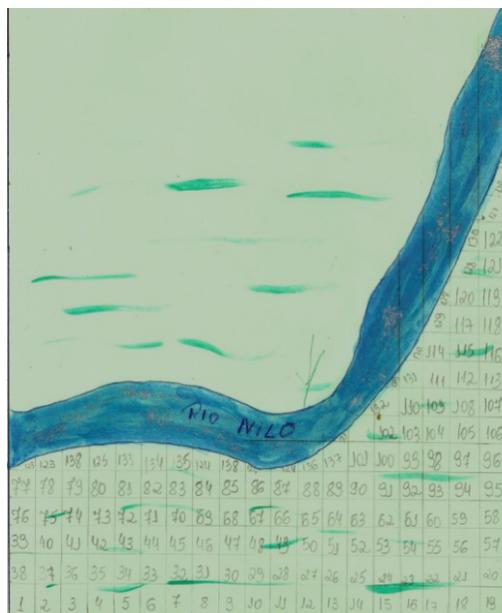
Nas atividades desenvolvidas na disciplina de Cálculo II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus VI/ Caetité*, os estudantes foram estimulados a fazerem investigação matemática via História da Matemática.

Numa aula introdutória o professor sugeriu aos discentes que formassem grupos com no máximo quatro integrantes, dando ao desenvolvimento das atividades um caráter de oficina, que contribuiu para que existisse uma melhor interação entre colegas e professor. Ocorreu a distribuição dum material manipulável que consistia em uma cartolina verde com uma figura que representava um rio, régua e um texto intitulado Panorama Histórico: Sistematização e formalização do cálculo de áreas. Posteriormente, foi apresentado outra parte do material concreto: um sistema cartesiano plotado e impresso num papel transparência. A atividade investigativa via História da Matemática ocorreu da seguinte forma: após a turma formarem grupos, que variou de dois a quatro integrantes, o professor distribuiu o texto que versava sobre necessidades práticas que impulsionaram a sistematização e formalização do cálculo de áreas. Dentre algumas civilizações antigas, destacou as ricas contribuições do Antigo Egito. Esclareceu que anualmente o rio Nilo sofria inundações e que após baixarem suas águas, deixavam as terras junto à suas margens com nutrientes propícias ao plantio. O fato das inundações destruírem as demarcações daquela região fazia com que os “esticadores de corda”, homens treinados que usavam cordas com nós como unidades de medida de comprimento fizessem novas demarcações, restabelecendo as áreas que os agricultores cultivavam.

Após discutirmos e refletirmos acerca da história, a atividade prosseguiu: o professor entregou para cada grupo uma cartolina que representava uma região fictícia, com um desenho de um rio, denominado rio Nilo (Figura 1). Sentindo-nos como aqueles esticadores de corda, fomos estimulados a calcular a área abaixo da margem “inferior”, da maneira que achássemos conveniente.

Como se tratava de uma figura irregular, nossos grupo usando régua, lápis e borracha desenharam quadradinhos de 1cm x 1cm, enumeramos e fizemos compensações da área daquelas regiões que estavam incompletas, ou seja, que estavam junto à margem do rio Nilo, conforme podemos ver retratado na Figura 1.

Figura 1- Calculando a área abaixo do Rio Nilo com a utilização de quadrados.



Fonte: Atividade do grupo de trabalho

Ao final, a quantidade de quadradinhos de  $1 \text{ cm}^2$  encontrada, deveria ser o valor aproximado da área que ficava abaixo do Rio. No entanto, nosso grupo estava consciente que não se tratava de um valor com uma boa aproximação, pois as figuras geométricas próximas à linha das margens do rio eram irregulares.

Nesse estágio, foi levantado pelo professor uma discussão conduzido pelos trilhos da História da Matemática sobre o método da Exaustão de Eudoxo (408-355 a.C.) e muito bem empregado por Arquimedes (287 – 212 a.C.) desde o século IV a.C. Matemáticos gregos sabiam que:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1996, p.63).

Essa constatação dos gregos é a base de um método, que é denominado de método de exaustão. Nesse momento, o professor apresentou o sistema cartesiano no papel transparência e sugeriu aos discentes que com a ajuda do plano cartesiano, sobrepondo-o na cartolina, observassem a margem do rio e criassem um modelo matemático para aquela linha. Como se tratava de uma curva, era necessário encontrar uma equação que a definissem bem. Dessa

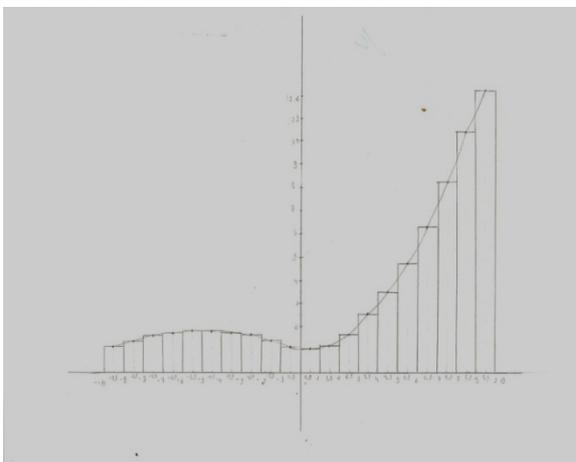
forma, escolhemos alguns pontos coordenados e por interpolação polinomial, percebemos que aquela curva representava o seguinte “modelo matemático”:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{25} - \frac{2}{5}x + 1 & \text{se } -10 \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2}{8} + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

A partir dessas observações, passamos a construir retângulos com base no eixo dos  $x$  e altura sendo  $\frac{f(x_{i-1}+x_i)}{2}$  e utilizar a soma das áreas dos retângulos desenhados abaixo da curva. Quanto maior a quantidade de retângulos desenhados, mais próximo se chegava da área desejada. Fizemos com 10, 20 e 40 retângulos, (Figuras 2 e 3) e o professor usando planilhas eletrônicas confirmaram nossos cálculos e ainda fez com 200 retângulos.

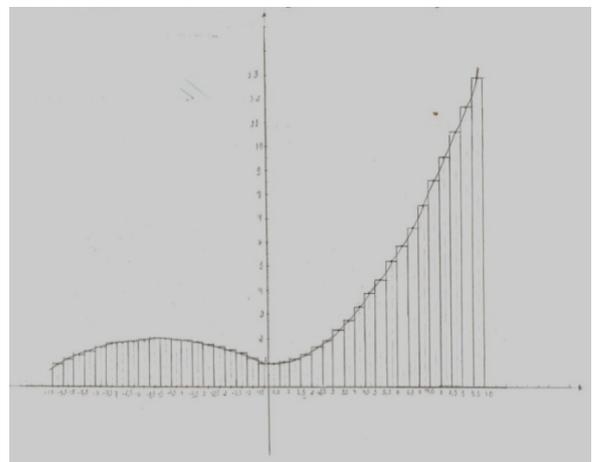
Nesse estágio da atividade investigativa, fomos impulsionados como novas discussões nos trilhos da História da Matemática rumo à soma de Riemann que é uma aproximação obtida pela expressão  $\sum f(x) \cdot \Delta x$ , onde  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ .

Figura 2: Calculando a área utilizando 20 retângulos



Fonte: Atividade do grupo de trabalho

Figura 3: Calculando a área utilizando 40 retângulos



Fonte: Atividade do grupo de trabalho

Percebemos que à medida que aumentava indefinidamente a quantidade de retângulos, o valor da área sob a curva do rio variava cada vez com valores insignificantes. Assim, para aperfeiçoar aqueles cálculos aplicamos o conceito de limite e após novas discussões chegamos a formalização da definição da Integral Definida para calcular áreas de regiões planas sob curvas, limitadas lateralmente por retas, conforme podemos notar:

Desde os tempos mais antigos os matemáticos se preocupam com o problema de determinar a área de uma figura plana. O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas. A integral definida está associada ao limite. Ela nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas... Temos a seguinte definição:

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[a, b]$  e seja  $P$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . A integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ é dada por}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} f(c_i)\Delta x_i$$

Desde que o limite do 2º membro exista. (FLEMMING; GONÇALVES, 1992, p.356).

Com o algoritmo da Integral Definida já rigorosamente definido, recalculamos a área da região sob a mesma curva do rio Nilo e por fim comparamos os resultados com os anteriores encontrados, percebemos que os valores que os grupos encontraram se aproximaram do valor que encontramos resolvendo por Integral Definida.

Diante dos resultados, não apenas nosso grupo, mas todos os discentes ficaram entusiasmados e, dentre vários aspectos positivos, destacamos que conseguimos ver real sentido naquele conteúdo.

Por fim, os discentes ainda tiveram a oportunidade de aplicar esses conceitos dentro de um contexto real. A fim de culminar aquela sequência de atividades, o professor propôs a seguinte atividade avaliativa: convidou todos os estudantes para irem ao jardim do *Campus* da Universidade, onde tem diversas formas geométricas irregulares e orientou que cada grupo escolhesse uma daquelas regiões. A atividade consistia em tomar conhecimento das medidas da região escolhida usando uma fita métrica, fazer uma foto dessa região, projetar na imagem um sistema de eixos coordenados considerando as linhas de contorno da figura, e elaborar uma questão que seria resolvida aplicando a Integral Definida. As Figuras 4 e 5 retratam o trabalho do nosso grupo. A foto da Figura 4 está apresentada lateralmente, afim do observador vê toda a região em questão.

Nosso grupo elaborou a seguinte questão: O jardineiro pretende cobrir com grama tipo Esmeralda uma determinada parte do jardim do *Campus* VI da UNEB, que pode ser vista na imagem a seguir (Figura 4). Sabendo-se que essa grama é vendida por peças (tapetes) de dimensões 40 cm X 60 cm, e que cada 1 m<sup>2</sup> dessa grama custa R\$ 15,00, qual será a

quantidade de peças que devem ser compradas para cobrir toda a área desejada? E qual será o custo da grama?

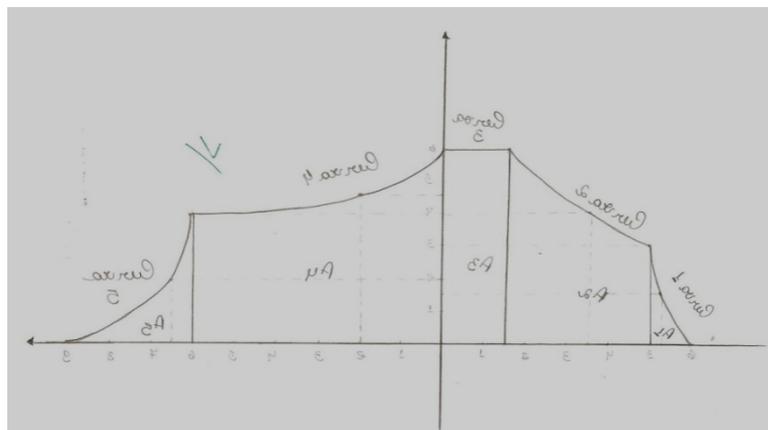
Figura 4- Área jardim que foi calculada.



Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Na resolução, dividimos aquela região em 5 sub-regiões e após encontrar as equações para as curvas que limitavam superiormente cada sub-região, aplicamos a Integral Definida de acordo da intervalo correspondente. Por fim, calculamos a área total de região dado por:  $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ . Para saber quantas peças deveriam ser compradas, nós dividimos a área total ( $A_T$ ) pela área da cada peça, ou seja,  $0,24 \text{ m}^2$ . Como o valor não foi exato, a resposta desejada era o primeiro número inteiro maior do que o valor encontrado na divisão. Por fim, multiplicamos a quantidade de peça que deveria ser comprada pela área de cada peça e por R\$ 15,00, totalizando o custo da grama. A Figura 4 expressa o esboço do desenho usado na resolução da questão.

Figura 5- Esboço do gráfico da área do jardim.



Fonte: Atividade do grupo de trabalho

#### 4. A importância da História da Matemática na sala de aula

Podemos perceber que a prática em sala de aula utilizando a História da Matemática é uma maneira eficaz de estabelecer relações entre a disciplina e a construção do conhecimento pelo próprio estudante. Ela pode ser usada desde o primeiro contato que uma criança tem com a Matemática até à universidade, especialmente nos cursos de formação de professores, para que esses compreendam como é fundamental o contexto histórico para chegar às especificidades da disciplina. Cada conteúdo matemático teve uma evolução histórica, surgidos em diversas partes do mundo, desenvolvidos por diferentes culturas e sociedades, e esses aspectos não deveriam ser passados despercebidos, pois além de retratar a estruturação da matemática, evidenciam principalmente a evolução da humanidade. Assim, a História da Matemática aparece como um:

Campo de possibilidade de constituição das situações, contextos e circunstâncias culturais engendradoras do conhecimento matemático e de suas transformações, bem como, é claro, das significações semióticas intra e interculturais produzidas e negociadas nos processos de circulação, recepção e transformação desse conhecimento em diferentes contextos e épocas. É por essa razão que, para os proponentes dessas perspectivas, a história da Matemática, constituída segundo essa orientação teórico-epistemológica, é uma fonte inspiradora de sequências didáticas para o ensino-aprendizagem dessa disciplina. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p.129)

Diante do que foi mencionado é perceptível que se faz necessário que os educadores comecem, desde a sua formação, a trabalharem com maneiras de tornar o ensino de Matemática mais dinâmico e instigante. A História da Matemática apresenta-se com rico

potencial para proporcionar aulas diferenciadas e contextualizadas, gerando um ambiente motivador e dinamizado, que favorece tanto ao docente como ao discente.

As atividades relatadas mudaram a rotina da turma e promoveram maior interação entre colegas e professor. Os discentes em cada grupo desenhavam, calculavam e apresentavam soluções das atividades propostas sem saber que já estavam usando fundamentos para chegar ao conceito de Integral Definida. Através dessa sequência de atividades investigativas, os discentes tiveram a oportunidade de serem sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem, ao mesmo tempo em que aprenderam o conteúdo Integral Definida de modo diferente ao que ela é normalmente ensinada. Portanto, podemos perceber que a História da Matemática, mais precisamente do cálculo de áreas irregulares por Integral, foi de grande importância para a construção de conhecimento e serviu para refletirmos nossas possíveis ações docentes no futuro, uma vez que estamos em formação para o exercício da docência em Matemática,

## 5. Considerações Finais

A investigação realizada nas aulas da disciplina Cálculo II foi de fundamental importância tanto para assimilar o conceito de Cálculo Integral, quanto para percebermos como a História da Matemática pode ser utilizada como uma excelente ferramenta metodológica, pois foram aulas dinâmicas e interessantes.

Construir o conceito da Integral Definida através de atividades investigativa via História da Matemática, contribuiu para conhecermos um pouco sobre uma situação-problema que os povos antigos tiveram, um dos caminhos percorridos para solucionar e as contribuições de alguns personagens envolvidos no contexto da sistematização e formalização do conteúdo estudado, deixado evidente que a Matemática é de criação humana.

O desenvolvimento das atividades também favoreceu uma melhor interação na classe e melhor admiração pela iniciativa do professor, além de servi de inspiração para aprofundarmos os estudos nessa vertente, direcionando nossos trabalhos de conclusão de curso para o tema do uso da História da Matemática para ensinar Matemática na educação básica, a fim de fortalecer o processo de formação de professores de modo interativo e interdisciplinar.

## 6. Agradecimentos

Agradecemos ao docente Daniel de Jesus Silva que durante o período letivo 2015.1 lecionou a disciplina Cálculo II no *Campus VI/Caetitê* da Universidade do Estado da Bahia, por ter nos proporcionado uma aula diferenciada, dinâmica e prazerosa, ressaltando a importância e eficiência do uso da História da Matemática para ensinar Matemática. E à Universidade do Estado da Bahia por conceder um espaço de desenvolvimento e crescimento profissional.

## 7. Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC; Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>> Acesso em: 06 de mar. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**.. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática**: questões historiográficas, políticas e reflexos na educação matemática; pesquisa em educação matemática. São Paulo: UNESP, 1999.

D'AMBROSIO, U. **A Interface entre a História e a Matemática**. Disponível em: <<http://webcache.googleusercontent.com>>. Acesso em: 06 de mar 2016

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**: funções, limites, derivadas, integral. 5 ed. São Paulo: Pearson Makron, 1992.

LARA, I.C.M. de. **Jogando com a matemática na educação de 5ª a 8ª séries**. 3 ed. Catanduva, SP: Editora Rêspel, 2003.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

SILVA, D.J. **A utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas**: estudos de áreas de regiões planas regulares e irregulares. 2016. 103f. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) - Universidade Estadual do sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2016.