# ARGUMENTOS E METÁFORAS SOBRE O INFINITO NO ENSINO DE CÁLCULO

*Antonio Luis Mometti*
*Ifsp-Guarulhos*
*antonio.mometti@ifsp.edu.br*

*Ednaldo José Leandro*
*Ifsp-Suzano*
*ednaldo@yahoo.com.br*

**Resumo:**

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise sobre os argumentos utilizados por professores de Cálculo no ensino e aprendizagem dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral, parte de uma pesquisa mais ampla do nosso Doutorado na PUC-SP. O Modelo da Estratégia Argumentativa (FRANT e CASTRO, 2002) e a Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF e JOHNSON, 1980; LAKOFF e NÚÑEZ, 2000) compõem o aporte teórico-metodológico. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo gênero adotado é o da investigação sobre a própria prática (PONTE, 2004). Os argumentos foram gravados em vídeo, a partir das discussões de cinco professores de Cálculo, num grupo colaborativo durante um ano. Verificou-se a partir dos argumentos e das metáforas utilizadas pelos professores, ao discutir a prática, uma forte tensão entre intuição e rigor no Ensino de Cálculo e apresentou-se uma análise a partir do referencial teórico.

**Palavras-chave:** Argumentos, Metáforas, Infinito, Integral, Ensino de Cálculo

## 1. Introdução

No Brasil e no mundo, são muitas as pesquisas já realizadas acerca do Ensino e Aprendizagem do Cálculo e, mesmo olhando especificamente para o conceito de Integral, encontramos várias pesquisas das quais destacamos: Czarnocha (1997, 2001), Turégano (1997), Hong e Thomas (1997), Bezuidenhout (2000, 2002), Melo (2002), Robutti (2003), Tall (1991), Baldino (1998) e Silva (2004). Em síntese, essas pesquisas enfatizam dois resultados: o primeiro é a utilização do computador, apontada como um recurso auxiliar na construção do conceito, permitindo visualizações, animações, simulações que podem desenvolver a intuição dos alunos; o segundo, é que os alunos, em geral, concebem a Integral como uma série de procedimentos e algoritmos, não conseguindo articular sistemas de diferentes representações, conectar e relacionar esse conhecimento com outros precedentes.

Buscamos, com essa pesquisa, avançar em relação aos resultados já obtidos, pois acreditamos ser necessário considerar e entender melhor os mecanismos que nos permitem pensar sobre um determinado conceito e como aprendemos conceitos novos. Recorremos à Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF e JONHSON, 1980, LAKOFF e NÚÑEZ, 2000) a qual traz por premissa que a forma como pensamos e aprendemos conceitos novos é estruturada por uma natureza metafórica. Este referencial, articulado com o Modelo da Estratégia Argumentativa (FRANT e CASTRO, 2002), que busca interpretar a produção de significados baseados nos argumentos utilizados ao invés das palavras, tendo o contexto da enunciação como fundamental para sedimentar os acordos que são a base para a ação de argumentar, nos trouxeram elementos para a análise do discurso dos professores.

Das pesquisas citadas, duas trazem o livro didático de Cálculo como objeto de pesquisa, e, as demais, têm alunos como sujeitos de pesquisa. Nós optamos por trabalhar com professores de Cálculo, numa perspectiva da reflexão sobre a prática e das contribuições dessa no desenvolvimento profissional.

A investigação sobre a própria prática profissional do professor é, segundo Ponte (2002), um processo privilegiado de construção do conhecimento sobre essa mesma prática, sendo uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional.

Segundo Tardif (2002), os professores são sujeitos do conhecimento e a prática deles não é somente um lugar de aplicação de saberes produzidos por outros, mas, também, um espaço de produção, de transformação e de mobilização de saberes que lhes são próprios.

Optamos, assim, por formar um grupo de discussão com outros professores de Cálculo, para refletirmos sobre as nossas práticas, em particular sobre as nossas aulas de Integral, buscando nesse grupo de pessoas o diálogo, a discussão e a reflexão sobre o meu caminhar e sobre a nossa própria prática enquanto grupo. Desse modo, olhamos para os professores de Cálculo não como sujeitos de pesquisa, mas como colaboradores, como participantes, como coadjuvantes na pesquisa.

A linguagem constitui elemento central desse trabalho e, consequentemente, das questões elaboradas, considerando-se, inicialmente, o referencial teórico-metodológico e, num segundo momento, tais questões são reestruturadas a partir dos direcionamentos tomados nos diálogos entre os professores. Das três questões elaboradas em nossa pesquisa de Doutorado, optamos por apresentar aqui uma discussão sobre aquela que abordou os processos infinitos da Integral:

*"Quais os argumentos utilizados pelos professores na reflexão sobre o ensino e a aprendizagem dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral?"*

## 2. O infinito potencial e o infinito atual: uma síntese da história

A noção de infinito impulsionou, durante muito tempo, o desenvolvimento da Matemática. Suposições a respeito de divisão de grandezas, como: 1. É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente? (O espaço e o tempo são infinitamente divisíveis?) 2. É válido admitir-se que uma grandeza é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis? (Existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto)?), desafiaram e dividiram o pensamento dos gregos por muito tempo.

Os paradoxos do filósofo Zenão de Eléia (450 a.C.) são registros clássicos desses pensamentos. Em dois dos paradoxos, a Dicotomia e Aquiles, Zenão argumentou que o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis e, por conseguinte, o movimento seria impossível. Com os paradoxos, A Flecha e o Estádio, Zenão argumentou o contrário, de que o tempo e o espaço não são infinitamente divisíveis, ou seja, de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço acaba em indivisíveis. A partir da complexidade dessas questões, os gregos desenvolveram o que se chamou de "horror ao infinito". Nenhum desses problemas foi resolvido na Antiguidade.

Aristóteles (384 a.C.-322 a.C) busca entender essas questões, introduzindo duas novas representações para o conceito de infinito:

> Aristóteles tratou de enfrentar o problema do infinito através de duas representações, duas concepções complementares e cuja interação dialética influenciou no próprio desenvolvimento da matemática. No terceiro livro de sua obra *Física*, Aristóteles distingue dois tipos de infinito; o infinito como processo de crescimento sem final

> ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa. O primeiro é o infinito potencial e o segundo é o infinito atual. (ORTIZ, 1994, p.61).

A primeira dessas representações é a de infinito potencial que foi, efetivamente, chamada de "potencial" por São Tomás de Aquino (1227-1274) e, a segunda, é a de infinito atual, que foi estudada e sistematizada por Cantor (1845-1918), com a teoria dos números transfinitos.

Segundo Dauben (1995), o infinito como entidade completa, ou o infinito atual, foi rejeitado desde os tempos de Aristóteles por matemáticos (incluindo Aristóteles) e filósofos, por causa, sobretudo, dos paradoxos que parecia implantar. Galileu (1564-1642), por exemplo, observou que, se em Matemática fossem admitidos conjuntos infinitos completos, haveria tantos número inteiros para quantos pares e ímpares reunidos. O teólogo São Tomás de Aquino considerava que tal noção comportava um desafio direto à natureza única, infinita e absoluta de Deus.

De acordo com Ortiz (1994), Kant, no século XIX, concordava com Aristóteles ao assinalar que nunca podemos chegar ao infinito atual. Gauss, em 1831, também enfatiza seu protesto contra o uso do infinito como algo consumado: "Protesto contra o uso de uma quantidade infinita como uma entidade atual, esta nunca se pode permitir em matemática. O infinito é só uma forma de falar, quando na realidade deveríamos falar de limites aos quais certas razões podem aproximar-se tanto quanto se deseje, enquanto outras são permitidas crescer ilimitadamente".

O primeiro matemático a fundamentar a noção de infinito atual foi Bernard Bolzano, em sua obra "Paradoxos do Infinito" (1851), defendendo a existência de um infinito atual e enfatizando que o conceito de equivalência entre dois conjuntos era aplicável tanto a conjuntos finitos como infinitos. (ORTIZ, 1994, p. 64).

No final do século XIX, Cantor desenvolve uma teoria sobre o infinito atual: a teoria dos números transfinitos. Atualmente, os números transfinitos são denotados pela primeira letra do alfabeto Hebreu - Aleph; os alephs designam a cardinalidade, o número de elementos dos conjuntos infinitos. Com essa teoria é possível, além de falar em infinito como entidade completa, realizar operações entre números transfinitos.


ISSN 2178-034X

## 3. A Teoria da Cognição Corporificada: o infinito atual e o infinito potencial

Buscamos respaldo na Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF e JONHSON, NÚÑEZ, 1980, 2000, 2005) para melhor entender os mecanismos que nos permitem pensar sobre um determinado conceito e como aprendemos conceitos novos. Desta forma, ela nos trouxe elementos para que pudéssemos melhor compreender e analisar os diálogos entre os professores de Cálculo. Este referencial parte de um paradigma em que corpo e mente estão intimamente relacionados. Lakoff e Johnson (1980), baseados, principalmente, na evidência linguística, constataram que, a maior parte de nosso sistema conceitual, em termos do qual pensamos, agimos e formamos nossos conceitos, é de natureza metafórica.

Segundo Núñez (2000), uma importante descoberta na Linguística Cognitiva é que conceitos são sistematicamente organizados por meio de uma vasta rede de mapeamentos conceituais, ocorrendo em sistemas altamente-coordenados e combinando caminhos complexos. A maior parte desses mapeamentos conceituais são usados inconscientemente e *sem esforço* na comunicação do dia-a-dia. Um importante tipo de mapeamento é a metáfora conceitual e, o outro, são as montagens conceituais. Em "*Where Mathematics Comes From*", Lakoff e Núñez (2000) concluem que muitas das ideias matemáticas fundamentais são inerentemente metafóricas, como, por exemplo: a *reta numérica, onde números são conceituados metaforicamente como pontos na reta.*

O conceito de infinito é, certamente, um dos mais abstratos e, para a compreensão da natureza cognitiva do infinito atual, Núñez (2005) defende que são necessários três importantes mecanismos: 1. *Sistema Aspectual*; 2. *Metáforas Conceituais* e 3. *Montagens Conceituais*. *Sistema Aspectual*, na semântica cognitiva, caracteriza a estrutura de eventos-conceitos. Algumas ações, por exemplo, são inerentemente iterativas, como "estalar os dedos" ou respirar. Outras são inerentemente contínuas, como movimento. Verbos como pular, segundo o autor, tem um *aspecto perfectivo*, pois cada pulo tem um ponto final e um resultado. Mas verbos como *nadar, voar, e rolar* têm *aspecto imperfectivo*, sem nenhum ponto final indicado. Processos com aspectos imperfectivos podem ser conceitualizados como processos contínuos ou iterativos, por exemplo, em frases como "A águia voou e voou e voou", a ideia de ação iterada é usada, sintaticamente, para expressar a ideia de ação contínua. (LAKOFF e NÚÑEZ, 2000).

Segundo Núñez (2005, p. 1728), "do ponto de vista do *aspecto*, o infinito potencial tem um aspecto imperfectivo". Este autor apresenta a ideia do Mapeamento Básico do Infinito via Montagens Conceituais. Dois espaços de entrada são apresentados: um é o espaço envolvendo Processos Iterativos Completos (aspecto perfectivo, na Matemática: processos finitos), o outro, envolve Processos Iterativos sem fim (aspecto imperfectivo, na Matemática: infinito potencial). Assim, com a montagem conceitual (vide Figura 1 - página seguinte), tem-se uma estrutura inferencial necessária para caracterizar processos que envolvem o infinito atual.

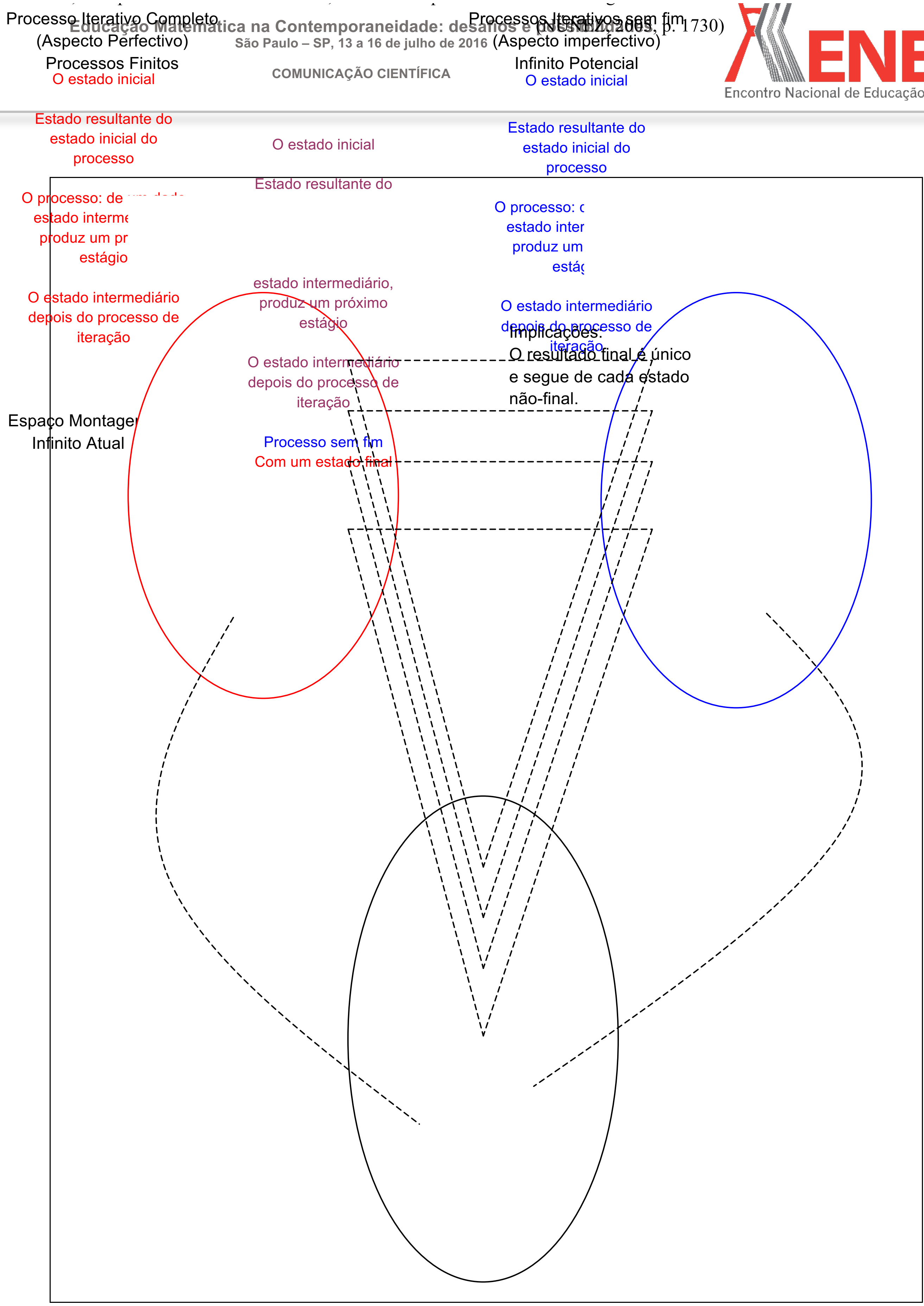
## 4. Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Na perspectiva da investigação sobre a própria prática de Ponte (2004), juntamente com a ideia de grupo focal de Gaskell (2002), eu e mais quatro professores de uma mesma Universidade particular do Estado de São Paulo, criamos um grupo de discussão e reflexão sobre as nossas práticas enquanto professores de Cálculo com debates abertos. Foram, ao todo, 18 encontros nos anos de 2004 e 2005, 12 presenciais e 6 via Internet. Os encontros presenciais foram gravados em vídeo, os diálogos entre os professores foram transcritos e analisados em episódios conforme o Modelo da Estratégia Argumentativa. Nossa análise parte do que os professores de Cálculo do grupo efetivamente falam sobre suas aulas de Integral, sobre registros dos alunos, sobre vídeos das aulas, dentre outros aspectos. A tabela abaixo salienta o perfil dos participantes/sujeitos da pesquisa.

**Tabela 2: Perfil dos participantes da pesquisa**

| Participantes | Formação | Disciplinas que Leciona | Tempo docência ensino superior |
|---|---|---|---|
| P1 | Licenciatura em Matemática, Mestrado em Matemática e Doutorando em Educação Matemática. | Análise, Cálculo Diferencial e Integral I, Álgebra Linear e Projetos de Ensino. | 10 anos |
| P2 | Licenciatura Matemática e Mestrado em Matemática | Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra. | 10anos |
| P3 | Licenciatura em Matemática, Mestrado em Matemática. | Cálculo Diferencial e Integral I, Geometria Analítica e Álgebra. | 4 anos |
| P4 | Bacharelado em matemática, Mestrado em Matemática e Doutorado em Matemática | Cálculo Diferencial e Integral, Variáveis Complexas e Geometria. | 34 anos |
| P5 | Bacharelado em Matemática Mestrado em Matemática Doutorando em Matemática | Matemática I (Cálculo I) Matemática II (Cálculo II) | 3 anos |

(NÚÑEZ, 2005, p. 1730)



$P_n$

$\text{Área } P_n < \text{Área } P_{n+1} < \text{Área Círculo}$

$P_{n+1}$

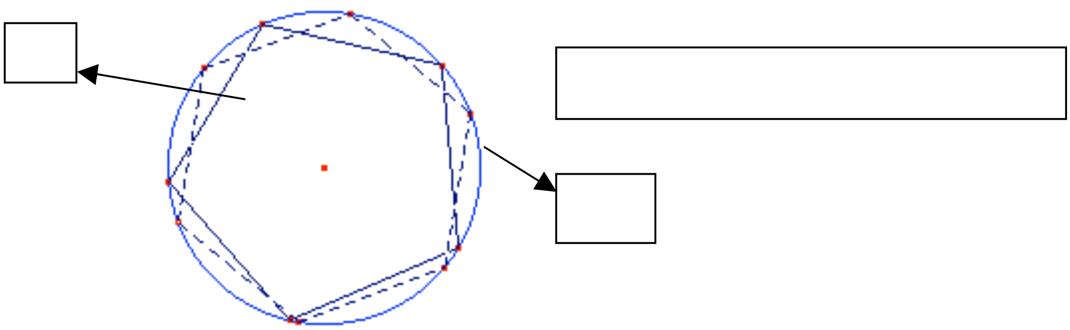
## 5. Uma análise dos argumentos dos professores

A análise foi realizada a partir de observações dos vídeos na íntegra e de transcrições das falas dos professores durante os encontros, destacando as seqüências de diálogos relevantes para a questão de pesquisa. O episódio apresentado a seguir, emergiu das análises dos argumentos e metáforas levantados nos diálogos dos professores ao discutir uma das atividades elaboradas com o objetivo de explorar as concepções dos alunos a respeito do cálculo da área do círculo por aproximação das áreas de polígonos inscritos e instigar a discussão sobre o infinito atual e o infinito potencial.

A atividade, resumidamente, constava da construção no *software Cabri Géomètre,* de uma sequência de polígonos regulares inscritos numa circunferência, chegando ao máximo a um polígono de 30 lados. A partir daí, lança-se a possibilidade de continuar calculando a área dos polígonos regulares inscritos pela fórmula $A(n) = n.r^2.\text{sen}\,\frac{}{n}.\cos\frac{}{n}$ e pergunta-se: Podemos continuar aumentando indefinidamente o número de lados do polígono e esse processo jamais esgotaria a área do círculo? Você concorda com esse argumento? Duas respostas hipotéticas são apresentadas:

*A justificativa do aluno hipotético João:*

*Sim, concordo, pois, independente do número de lados, sempre haverá espaços entre o polígono regular inscrito e a circunferência. Para qualquer polígono regular inscrito* $P_n$ *com* $n$ *lados sempre existirá um polígono regular inscrito* $P_{n+1}$ *com* $n+1$ *lados, que terá área maior que a área de* $P_n$ *e menor que a área do círculo.*




ISSN 2178-034X

*A justificativa da aluna hipotética Beatriz:*

*Não, não concordo, pois vimos que a área dos polígonos regulares inscritos pode ser calculada pela fórmula* $A(n) = n.r^2.\text{sen}\,\frac{}{n}.\cos\frac{}{n}$ *e calculando* $\lim_{n} A(n) = \ .r^2$, *ou seja, dá exatamente a área do círculo.*

Optamos por apresentar, aqui, parte de um dos episódios intitulado "*No limite coincide*". No primeiro encontro, os professores P2 e P3 teceram seus comentários sobre as justificativas dadas pelos alunos hipotéticos João e Beatriz na Tarefa.

> **P2 -** O problema está nesse *aumentando indefinidamente*, se fosse um *número finito*, pode ser um número *muito próximo*, mas não é a área, agora quando *você manda para o infinito* o número de lados do polígono, ai *no limite coincide*. (p.3, L44).
> **P3 -** A justificativa de Beatriz é matemática, são as regras de limite e acaba sendo a demonstração de que de fato alcança a área do círculo; agora a justificativa de João é plausível, *é difícil de você argumentar* com ele, você *acaba falando de limite* que vai tender ao infinito, mas não é isso que ele está argumentando, ele tá argumentando que entre um e outro sempre existe um, de fato também ocorre. (p.3, L49).
> **P2** - Eu ia tentar *convencer*. (p.4, L7).
> **P3** - Você ia tentar *enganar* não é [risos dos três] (p.4, L8).
> **P2** - O problema é como dizer pra ele que não, que *no infinito vai coincidir sim*, essa é a coisa mais complicada, conseguir convencer o aluno. (p.4, L9).
> **P3** - O *problema todo* é como sempre *o infinito*. (p.3, L12). (ENCONTRO 1)

Observamos que, para P2, o problema reside no "aumentando indefinidamente". De fato, se nos pautarmos pela noção de processo iterativo sem fim que pode ser mapeado por frases que utilizamos no cotidiano como "o pássaro voou e voou e voou", ou pela ideia de acrescentar mais um, mais um e, assim por diante, ambos processos sem fim, não podemos ter um estado final, um fim para esses processos e isso pode gerar conflitos cognitivos na aceitação do infinito atual, ou seja, da famosa frase "no limite coincide."

Assim, o professor P2 tem dificuldade em argumentar com o aluno; é como se o professor tivesse que argumentar contra um pensamento que é, de certa forma, o mais sedimentado e incorporado por nós desde criança, que é o do infinito como algo que não tem fim.

Com a fala "manda pro infinito" de P2, que é acompanhada de gestos com a mão como se, de fato, algo fosse arremessado para longe, temos implícita a ideia de movimento fictivo – o número de lados que é estático ganha atributos de um objeto com possibilidade de locomover-se e ser enviado ou mandado para um lugar muito longe – o infinito – que seria o lugar de destino e aí "no limite coincide", ou seja, o infinito em ato ou atual.

**Figura 2:** A Montagem do Infinito Atual com os argumentos do professor

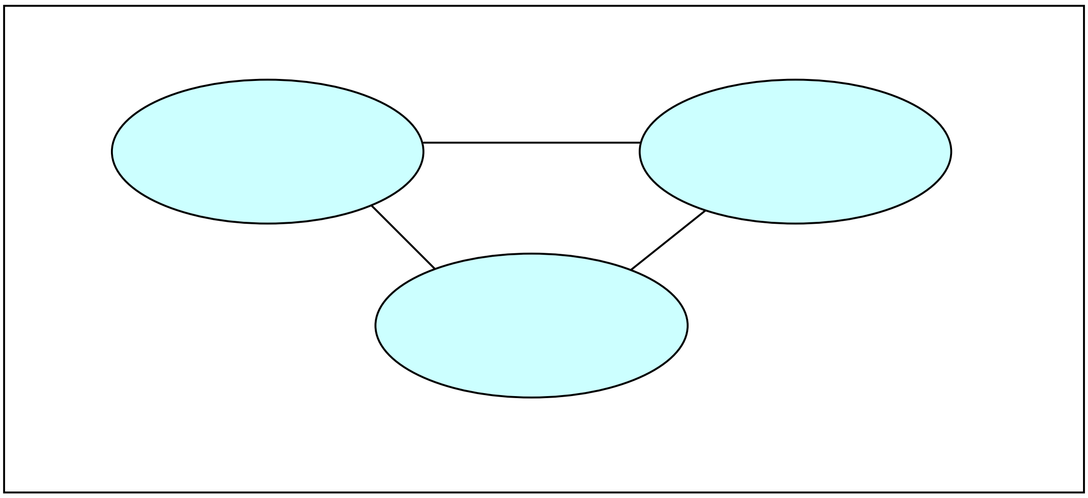
Entrada 1
Processo Finito
“Número finito”

Espaço Montagem
Infinito Atual
“No limite coincide”

Entrada 2
Infinito Potencial
“Aumentando indefinidamente”

Analisando o argumento utilizado por P2, na perspectiva da Montagem Conceitual do Infinito de Núñez (2005), observamos os três espaços da montagem:

1. “*o problema está nesse aumentando indefinidamente*” – espaço dos processos iterativos sem fim ou o infinito potencial;
2. “*se fosse um número finito, pode ser um número muito próximo, mas não é a área” –* espaço dos processos iterativos completos ou processo finito.
3. “quando você manda para o infinito o número de lados do polígono, aí no limite coincide” – espaço montagem – infinito atual.



O infinito é um “lugar misterioso” onde a coincidência ocorre, contudo, não conseguimos enxergá-lo, pois é uma construção puramente linguística. Não temos como chegar a esse lugar misterioso, não temos como “ver” o que ocorre lá e, muito menos, nos apoiar em situações reais que nos permitam fazer inferências diretas por mapeamentos primários como as metáforas básicas. É, simplesmente, um lugar novo e diferente, onde só o pensamento em processos finitos não dão conta e nem só os pensamentos em processos iterativos sem fim. Acreditamos que, somente quando o sujeito realizar uma montagem conceitual a partir de inferências desses dois tipos de pensamentos e conseguir operar nesse lugar misterioso, sem ficar preso a nenhum deles, ou seja, operar com uma construção mental nova, ou num *Espaço Mental* novo, sobre o infinito, é que ele aceitará, sem maiores dificuldades, o infinito atual ou o infinito em ato.

No décimo primeiro encontro, a discussão sobre essa atividade é retomada e o professor P5 diz: *No fundo você está fazendo um exercício de limites aqui, não é? A*


ISSN 2178-034X

*seqüência* $\frac{1}{n}$ *se aproxima de zero, mas nunca é zero [gesto com as mãos: uma mão se aproxima da outra até a colisão dando a ideia de que a seqüência está chegando ao seu limite]; essa é a coisa, não é, esse é um ponto, o aluno que entende isso cara!* (L13)

Essa fala é comum quando ensinamos limites de seqüências ou de funções; então o aluno é submetido a uma enunciação que reforça que a seqüência nunca é zero, contudo, no limite é zero, ou seja, a própria fala do professor parece dificultar ainda mais a compreensão do infinito atual, em ato.

## 6. Considerações finais

Após a análise dos diálogos, concluímos que os professores têm dificuldades em argumentar com alunos que não aceitam a noção de infinito atual. A argumentação utilizada estaria, num primeiro momento, muito ligada à frase "*no limite coincide*", a qual parece ser contra-intuitiva, uma vez que ela vem precedida de "manda para o infinito" e, o significado de "limite", na linguagem corrente, é de fronteira, de fim.

Num segundo momento, a justificativa dada pelos professores viria com o formalismo das definições de limites com epsílons e deltas, sendo apontada como a única forma de provar e argumentar com os alunos sobre o assunto.

Nós propomos, aqui, que a história e a epistemologia do conceito de infinito – retomando as concepções de infinito potencial e infinito atual – podem ajudar os professores de Cálculo não só a ter subsídios para argumentar com seus alunos, mas, também, entender melhor como se constituiu esse conceito tão complexo e importante da Matemática – o conceito de infinito.

Além da história, acreditamos também, que os resultados da linguística cognitiva - sobre como pensamos cotidianamente o infinito e sobre os mapeamentos que empregamos para entender o infinito atual - ajudam os professores na compreensão das justificativas apresentadas pelos alunos, as quais podem ter sido formuladas a partir de inferências em domínios fora da Matemática.

**7. Referências**

BALDINO, R. R. Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal. **Série Reflexão em Educação Matemática.** Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BEZUIDENHOUT, J.; OLIVIER, A. Students' conceptions of the integral. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Japão, **Proceedings**…Japão: Hiroshima, 2000. v 2, p. 73-80.

CASTRO, M. R.; FRANT, J. B. **Argumentação e Educação Matemática.** Boletim GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática Boletim, Rio de Janeiro, n. 40, p. 53-68, ago. 2002.

CZARNOCHA, B. et al. Investigating the nature of students' understanding of definite integral: Wallis or Riemann's idea. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**,** 21., 1997, Finlândia, **Proceedings**… Finlândia: University of Helsinki, 1997. v 1, p. 267.

GASKELL, G. Entrevistas individuais e grupais. In: BAUER, M.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático.** Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

HONG, Y.; THOMAS, M. Using the Computer to improve Conceptual Thinking in Integration. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Finlândia, **Proceedings**…Finlândia: University of Helsinki, 1997. v 3, p. 81-88. sur l'enseignement des mathématiques, Paris: Odile Jacob, 2002.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metáforas da vida cotidiana.** Coord. da tradução Mara Sophia Zanotto, Campinas, SP: Mercado de letras; São Paulo: Educ, 2002.

________________________. **Metaphors We Live By.** Chicago: The University of Chicago, 1980.

________________________. **Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought.** NewYork: Basic Books, 1999.

___________.; NÚÑEZ, R. **Where Mathematics comes from.** New York: Basic Books, 2000.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem.** 2002. 180p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

NAJMANOVICH, D. **O Sujeito Encarnado***,* **questões para pesquisa no/do cotidiano.** Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

NÚÑEZ, R. E. et al.. **Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination.** Departamento de Ciência Cognitiva, Universidade da Califórnia, San Diego, USA. Disponível em: http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/SingaporeF.pdf. Acesso em: 05 mar. 2005.

ORTIZ, J. R. El concepto de infinito. **Boletín,** Venezuela, v1, n. 2, 1994.

PONTE, J. P, OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**. v XI, n.2, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal, 2002.

ROBUTTI, O. Real and Virtual Calculator: From Measurements to definite integral. In. CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Itália, **Proceedings**…Itália: Università di Torino, 2003.

SILVA, C. A. **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica.** 2004. 157p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

TALL, D. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. **Mathematics Teaching**, n. 137, p. 29-32, 1991.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 3 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.


ISSN 2178-034X