DIFERENTES ENCAMINHAMENTOS MATEMÁTICOS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Milene Aparecida Malaquias Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
milenecmatematica@gmail.com

Íria Bonfim Gaviolli
Universidade Estadual do Paraná, Campus Apucarana – UNESPAR
iriagaviolli@gmail.com

Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
rodolfovertuan@yahoo.com.br

Resumo:
Utilizando a Modelagem Matemática para analisar situações que fazem parte da vida do aluno, via uma abordagem investigativa e matemática, o estudante pode conhecer criticamente estas situações. Neste texto, num primeiro momento, apresenta-se a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Em seguida buscamos abordar o assunto "Pessoa de referência na família" evidenciando que um grupo de alunos, dependendo de seus conhecimentos prévios, bem como do nível escolar em que estão, podem realizar diferentes encaminhamentos de resolução. Este artigo intenta, portanto, mostrar que uma atividade de Modelagem Matemática pode ser desenvolvida via diferentes encaminhamentos. Embora os encaminhamentos apresentados no texto não sejam espelhados em experiências vivenciadas em sala de aula, fazemos o exercício de apresentar alguns possíveis encaminhamentos. Para isso, figuram no texto conteúdos Função do primeiro grau, Método dos Mínimos Quadrados, ajuste de curvas utilizando o programa Excel, Função exponencial e integral.
Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Diferentes níveis de ensino.

1. Introdução

A Modelagem Matemática é uma tendência que possibilita ao aluno usar de sua criatividade uma vez que ao se deparar com uma situação e com um problema relacionado a ela, o aluno não sabe inicialmente como resolver tal problema, nem mesmo que conteúdo matemático utilizar para *matematizar* a situação, mas precisa ter ideias de como fazer isso. Nesse sentido é que no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática o aluno é levado a usar de sua criatividade, característica essa que deve ser valorizada (MACHADO JUNIOR, 2005, p. 19). Desse modo, é possível que uma mesma situação e um mesmo problema, levem os alunos a abordagens distintas.

Este artigo é fruto de um trabalho realizado em uma disciplina de Modelagem Matemática em um curso de pós-graduação em Educação Matemática que considera esse aspectos das atividades de Modelagem. Durante o desenvolvimento da situação, diferentes resoluções foram apresentadas para turma.

Portanto, temos o objetivo, nesse trabalho, de *mostrar que uma atividade de Modelagem Matemática pode ser desenvolvida via diferentes encaminhamentos*. De acordo com Barbosa (2001), utilizar uma mesma situação mostra como a Modelagem[1] pode contribuir para uma aula com foco na valorização do pensamento do aluno e, por isso, com possibilidade de diferentes encaminhamentos. Até porque discutir tais encaminhamentos em uma plenária, pode possibilitar, dentre outras coisas, a discussão de diferentes conteúdos matemáticos, o entendimento de que diferentes representações podem ser utilizadas para um mesmo conteúdo e/ou ainda, que o fazer matemática também está relacionado ao pensar sobre situações cotidianas.

A situação utilizada no texto, *Pessoa de referência na família*, trata do aumento do número de mulheres exercendo a função de *chefe de família*, sendo ela responsável pelo sustento e pelas obrigações que antes eram somente do homem.

2. Sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática

Conforme Barbosa (2001), a necessidade do uso de *novas alternativas pedagógicas* em sala de aula já vem sendo discutida há muito tempo e já existem muitos professores utilizando-as na tentativa de motivar os alunos e de criar um ambiente em que os mesmos possam refletir e construir o conhecimento. Bittencourt (2001, apud NÉRI, 2004) destaca que vivemos num contexto em que não é mais possível usar os antigos moldes de ensino na educação, pois são extremamente estáticos, o que inibe, por sua vez, a interação que deve existir entre professor e aluno e entre aluno e aluno. Faz-se necessário também que os educadores possibilite estabelecimento de conexões entre a matemática escolar, a matemática do dia a dia e as situações extra matemáticas, de modo que possam desenvolver capacidades para além daquelas desenvolvidas no âmbito das *aulas tradicionais*.

[1] Neste texto, toda vez que utilizarmos o termo Modelagem estaremos nos referindo à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

No entanto, o que predomina no cenário escolar, ainda é o tipo de aula em que o professor fica em cima do *palco*, fala e escreve no quadro negro, enquanto os alunos apenas copiam para que depois, seguindo um exemplo dado, resolver os exercícios propostos de forma muitas vezes mecânica, sem nem fazer relações. De modo a superar tais aulas, a literatura sugere algumas alternativas pedagógicas, tais como: As novas tecnologias da informação e comunicação o (TIC), a História da Matemática, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática, a Investigação Matemática e a Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi (2002, p. 16) "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Bassanezi (2002, p. 24) afirma ainda que "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências".

Em todos os seus aspectos a Modelagem Matemática perpassa um processo que une teoria e prática. Sobre teoria e prática D'Ambrosio (1996, p. 81) nos diz: "nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não se pode desuni-las*"*. A prática de Modelagem Matemática pode ser entendida como as ações que os alunos desenvolvem com vistas a empreender a abordagem de um fenômeno pertencente ao dia-a-dia ou a outras áreas do conhecimento. De acordo com Sadovsky (2010), a Modelagem possibilita que os alunos participem ativamente na construção de seu conhecimento uma vez que o tema investigado por meio da Modelagem deve ser escolhido pelos alunos que se sentem responsáveis pela atividade e interessados em investigá-la.

Na tentativa de compreender a realidade que o cerca, o indivíduo se motiva com relação à busca de meios para atingi-la e transformá-la. Pode-se assumir que a Modelagem Matemática, nesse sentido, tem um papel na formação do cidadão (BASSA NESI, 2002).

A Modelagem permite que o aluno tenha certa compreensão do papel sociocultural da Matemática. Isso atua diretamente na sua formação, pois muitas vezes, é devido à aprendizagens advindas do ambiente de Modelagem que os alunos passem a atuar ativamente na sociedade, tornando-se capazes de analisar a forma como a Matemática é usada nos debates sociais (BARBOSA, 2001). A Matemática, quando usada em debates sociais e/ou até mesmo nos meios de comunicação, exerce influência sobre as pessoas com relação à veracidade e confiabilidade dos resultados. A Modelagem desafia a "ideologia da certeza", esta última que dificulta a inserção das pessoas nos debates sociais (BORBA e SKOVSMOSE, 1994, apud BARBOSA, 2002). Exemplificando, Barbosa (2003, p. 4) apresenta:

> O leitor, por certo, recorda-se das discussões públicas em torno do aumento salarial. Em geral, argumentos matemáticos expressos em orçamentos são apresentados para justificar os baixos índices de reajuste. Se o trabalhador não tem condições de analisar matematicamente o que são esses orçamentos, acreditando sem questionamento nos argumentos matemáticos postos, terá que aceitar a posição do outro. Isso pode comprometer ou limitar a participação das pessoas nos debates públicos.

A Modelagem, segundo o mesmo autor, pode contribuir para a formação de cidadãos *desconfiados* e com visão crítica sobre as aplicações da matemática, à medida que leva os alunos a interpretarem, refletirem e discutirem assuntos presentes em seu cotidiano. Diante disso:

> Se estamos interessados em educar matematicamente os nossos alunos para agir na sociedade e exercer a cidadania – e esse é o objetivo da educação básica-, podemos tomar as atividades de Modelagem como uma forma de desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática (BARBOSA, 2003, p. 4).

Com tal visão da Modelagem Matemática podemos dizer que ela pode fortificar a intervenção das pessoas em decisões sociais que envolvam aplicações da Matemática, e isso de certa forma nos permite dizer que contribuímos para criação de uma sociedade mais democrática (BARBOSA, 2003).

> O ambiente possibilitado pela modelagem está vinculado a problematização e a investigação. Na problematização os alunos criam perguntas e/ ou problemas. Na investigação eles buscam os dados e informações, fazem à seleção dos dados relevantes e organizam de forma clara e manipulam tais informações para a partir daí fazerem uma reflexão mais profunda sobre elas. Essas duas atividades não são separadas, elas atuam no processo de envolvimento do aluno para abordar a atividade proposta (BARBOSA, 2003, p. 64).

O autor exemplifica através de uma atividade o quão responsáveis se tornam os alunos para construção do modelo. Barbosa (2003) define, então, a Modelagem como sendo um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.

Partindo da ideia de que a Modelagem pode ser considerada um ambiente de aprendizagem, apresentamos uma atividade em que diferentes encaminhamentos de resolução podem ser desenvolvidos na sala de aula, utilizando diferentes conteúdos matemáticos.

3. Descrição da situação

O número de mulheres chefes de famílias em todo o Brasil cresceu significativamente entre 1993 e 2006. Os números evidenciam uma nova realidade nas famílias brasileiras: as mulheres estão, cada vez mais, se tornando chefes de família. Este fato é apontado pelos dados do censo do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) – Tabela 1.

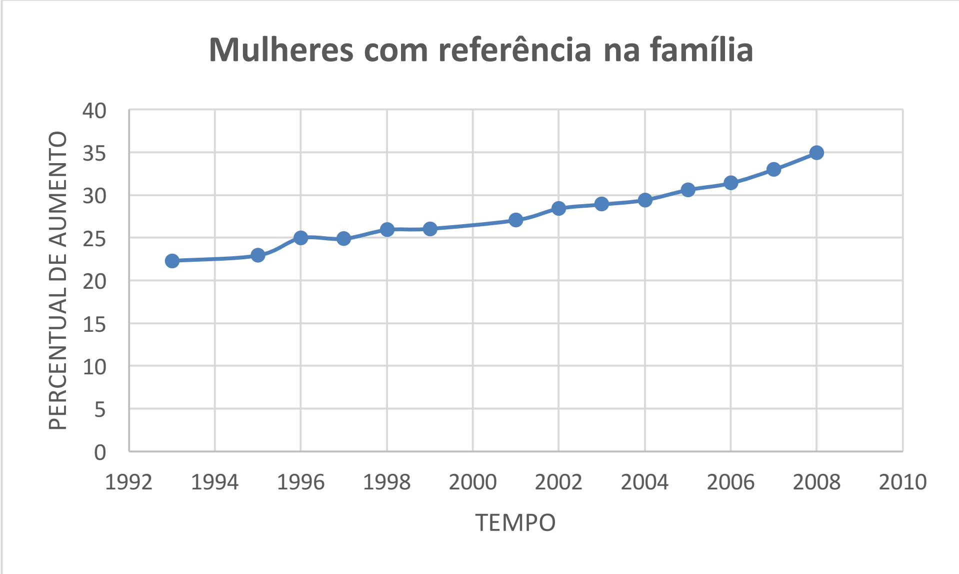
Tabela 1 – Pessoa de referência na família

Ano	Pessoa de referência da família Mulheres (Percentual)
1993	22,27
1995	22,9
1996	24,94
1997	24,86
1998	25,9
1999	26,03
2001	27,04
2002	28,4
2003	28,89
2004	29,4
2005	30,59
2006	31,39
2007	32,98
2008	34,91
2009	35,17

Fonte: IBGE(2015)

Segundos técnicos do IBGE esse aumento do número de mulheres responsáveis pelos seus domicílios é decorrente de uma séria de fatores, dentre os quais se sobressaem: mudanças demográficas, aumento da participação de mulheres mais velhas no mercado de trabalho, mudanças socioeconômicas e independência econômica cada vez maior das mulheres. Note, no gráfico 1, o crescente número de mulheres que tomam conta de suas residências:

Gráfico 1 – Mulheres com referência na família



Fonte: Dos autores, baseados em IBGE, 2015.

4. Problema

Diante dessa situação, uma questão passível de investigação pode ser: *Segundo a tendência dos dados, quando o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50%, igualando ao número de homens responsáveis pelos seus lares*?.

Para responder a questão podem ser utilizados diferentes encaminhamentos. Alguns destes encaminhamentos serão apresentados a seguir, com vistas a mostrar que uma mesma atividade pode ser utilizada, inclusive, em diferentes níveis de escolaridade, já que dependendo dos sujeitos que lidam com a situação, diferentes abordagens e conteúdos matemáticos podem figurar na resolução.

4.1 Resolução por meio de função do primeiro grau

Uma possível abordagem consiste na utilização da função polinomial do primeiro grau (resolução que pode ser utilizada por alunos do Ensino Fundamental, anos finais, ou por alunos do Ensino Médio). Considerando as variáveis t (tempo) e $P(t)$ (percentual de mulheres como referência na família em relação ao tempo) e a hipótese de que "o número de mulheres que são referência em suas famílias num dado ano com relação ao número de mulheres no ano anterior apresenta variação constante", é possível obter as informações da Tabela 2.

ISSN 2178-034X

Tabela 2 – Percentual de pessoa de referência na família (mulheres)

Anos	Tempo (t)	Pessoa de referência da família – mulheres (Percentual)	$K=P_{n+1}$-P_n
2001	0	27,04	
2002	1	28,4	1,36
2003	2	28,89	0,49
2004	3	29,4	0,51
2005	4	30,59	1,19
2006	5	31,39	0,8
2007	6	33	1,61
2008	7	34,91	1,91
2009	8	35,17	0,26

Fonte: Dos autores, 2016

Considerando que essa variação ($P_{n+1} \quad P_n = k$) na tabela acima é relativamente válida e tomando uma média dos valores de $K \quad 1{,}02$, fazemos:

$$P_{n+1} \quad P_n = k \qquad P_{n+1} = P_n + k \qquad P_{n+1} = P_n + 1{,}02 \qquad P_1 = P_0 + 1{,}02$$

$$P_2 = P_1 + 1{,}02 = (P_0 + 1{,}02) + 1{,}02 = P_0 + 2\,.\,1{,}02$$

$$P_3 = P_2 + 1{,}02 = (P_0 + 2\,.\,1{,}02) + 1{,}02 = P_0 + 3\,.\,1{,}02$$

Generalizando

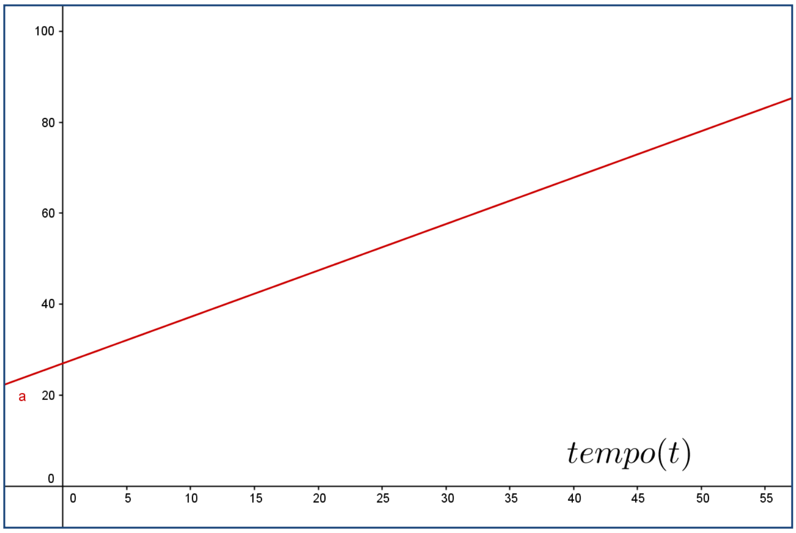
$$P_n = P_0 + n\,.\,1{,}02$$

E admitindo a continuidade das variáveis envolvidas,

$$P(n) = 27{,}04 + 1{,}02\,.\,n$$

Sendo sua representação gráfica:

Gráfico 2 – Mulheres com referência na família



Fonte: Dos autores, 2016

Segundo esse modelo, quando o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50%, igualando ao número de homens responsáveis pelos seus lares?

Temos, neste caso, que investigar quando P_n será 50%? Logo:

$$P_n = 27{,}04 + 1{,}02\,.\,n \qquad 50 = 27{,}04 + 1{,}02\,.\,n \qquad n = 22{,}5$$

Segundo o modelo, em aproximadamente 2023, o número de mulheres com referência em suas famílias chegará a 50%.

4.2 Resolução por meio do Método dos Mínimos quadrados

O método de mínimos quadrados não é, em geral, apresentado no ensino médio, pois demandaria o uso de derivada parcial, que é, normalmente, um assunto destinado ao curso superior. Porém, esta abordagem poderia, dada a utilização de tabelas, apenas duas variáveis e a viabilidade de uso de planilhas eletrônicas ser, por exemplo, empreendida em turmas do Ensino Médio.Desse modo, seriam utilizados os dados da tabela abaixo.

Tabela 4 – Pessoas com referência na família (mulheres)

Anos A	Tempo (t)	Pessoa de referenciada família – Mulheres (Percentual)
2001	0	27,04
2002	1	28,4
2003	2	28,89
2004	3	29,4
2005	4	30,59
2006	5	31,39
2007	6	33
2008	7	34,91
2009	8	35,17

Fonte: Dos autores, 2016.

Bem como as informações observadas no tratamento da tabela 4 (Tabela 5).

Tabela 5 – Método dos Mínimos Quadrados

x_i	y_i (Milhões de pessoas)	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
0	27,04	0	0
1	28,4	28,4	1
2	28,89	57,78	4
3	29,4	88,20	9
4	30,59	122,36	16
5	31,39	156,95	25
6	33	198	36
7	34,91	244,37	49
8	35,17	281,36	64
=36	=278,43	=1177,06	=204

Fonte: Dos autores, 2016

Utilizando o método dos mínimos quadrados, fazemos:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \sum_{i\ 1}^{n} xi \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad a = \frac{9 \cdot 1177,06 \quad 36 \cdot 278,43}{9 \cdot 204 \quad 1296} \qquad a = \frac{570,06}{540} \qquad \begin{matrix} a = 1,0555 \\ a \quad 1,06 \end{matrix}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \quad a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad b = \frac{278,43 \quad (1,06 \cdot 36)}{9} \qquad b \quad 26,70$$

E portanto, obtemos o ajuste linear:

$$f(x) = ax + b \qquad f(x) = 1,06x + 26,70$$

Segundo esse modelo o ano em que o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50% será no ano de 2022.

4.3 Resolução por meio do Programa Excel

A resolução com a utilização do computador pode ser viabilizada devido ao fato de que muitas escolas da rede pública tem salas com computadores. Além disso, essa abordagem pode ser realizada paralelamente ao encaminhamento apresentado anteriormente,já que o Excel, por exemplo, utiliza do mesmo método. Desse modo, de posse da Tabela 4 e realizando um ajuste aos dados, obtêm-se o modelo linear, ou exponencial, como segue:

$$f(x) = 1{,}0377x + 26{,}83 \text{ e } f(x) = 27{,}003.e^{0{,}033x}$$

Segundo esses modelos, na função linear o ano será em aproximadamente 2022 e na exponencial o ano será em 2019 em que o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50%.

4.4 Resolução por meio de Função exponencial

Uma vez que o Excel sugeriu a função exponencial para ajuste dos dados na abordagem anterior, pensamos na possibilidade de recorrer ao ajuste exponencial sem auxílio do computador, como outro encaminhamento que os alunos poderiam realizar no âmbito do Ensino Médio. Partimos de uma função exponencial do tipo $f(x) = K.a^x$. Para isso e tomando alguns pontos presentes da Tabela 4:

$$f(x) = K.a^x \qquad 27{,}04 = K.a^0 \qquad k = 27{,}04$$

Substituindo $f(x) = 28{,}89$ e $x = 2$ encontramos o valor de a.

$$f(x) = 27{,}04.a^x \qquad \frac{28{,}89}{27{,}04} = a^2 \qquad \sqrt{a^2} = \sqrt{1{,}0684} \qquad a = 1{,}0336$$

Obtendo, assim, o modelo $f(x) = 27{,}04 \cdot 1{,}0336^x$.

Segundo esse modelo o ano em que o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50% será no ano de 2019.

4.5 Resolução por meio de Equações Diferenciais

O mesmo problema, no Ensino Superior, pode resultar o seguinte encaminhamento via Equações Diferenciais:

ISSN 2178-034X

$$\frac{dP}{dt} = k.p \qquad \frac{dP}{dt} = \quad kdt \qquad \ln P = k.T + c.e \qquad P = C.e^{k.T}$$

$$T = o \qquad 27{,}04 = C.e^{k.0} \qquad C = 27{,}04$$

$$P = 27{,}04.e^{k.T}$$

$$T = 2 \qquad P = 28{,}89$$

$$28{,}89 = 27{,}04.e^{k.2} \qquad \frac{28{,}89}{27{,}04} = e^{k.2} \qquad função = P = 27{,}04.e^{0{,}033089T}$$

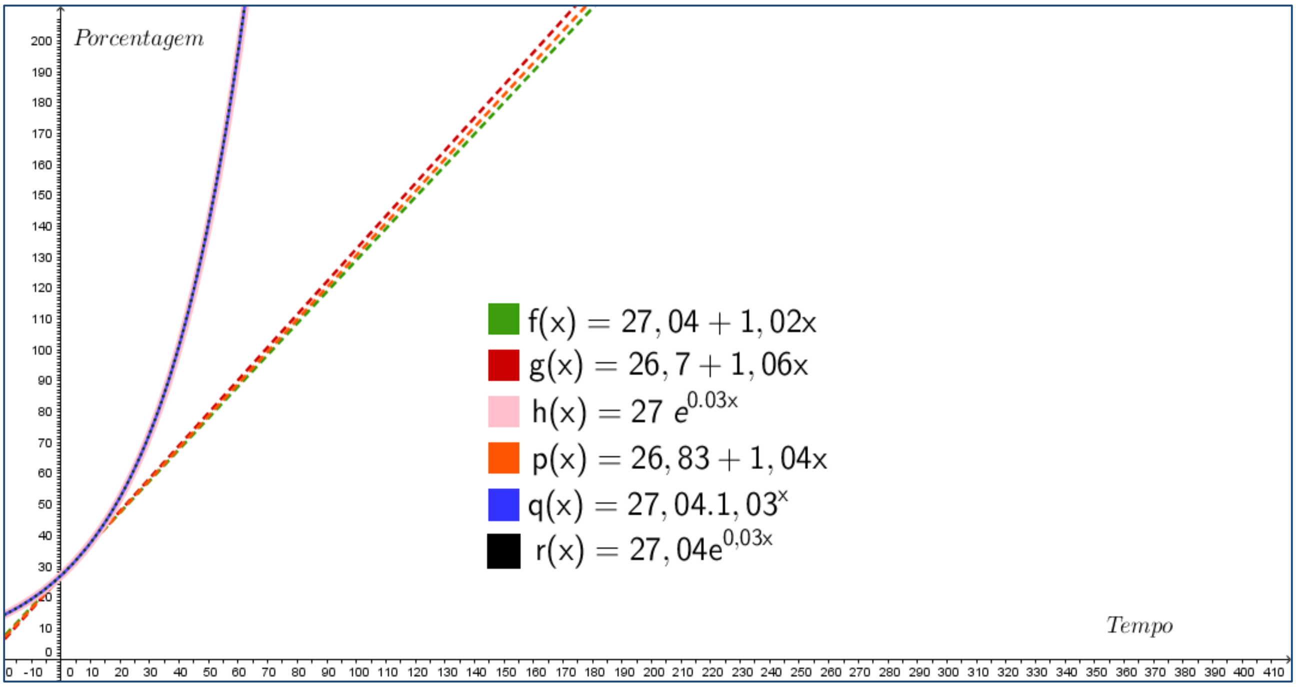
$$\ln 1{,}068417 = e^{k.2} \qquad k = \frac{0{,}066178}{2} \qquad k = 0{,}033089$$

Obtendo, assim, o modelo $P(T) = 27{,}04.e^{0{,}033089.T}$.

Segundo esse modelo o ano em que o número mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50% será no ano de 2019.

5. Os diferentes modelos

Gráfico 3: Diferentes representações para o problema



Fonte: Dos autores, 2016

A representação gráfica evidencia, ainda, que a resposta para a questão inicial – em que ano o número de mulheres com referência pelas suas famílias chegará a 50% –, tomando como referência as abordagens apresentadas neste trabalho, varia entre os anos de 2019 e 2023.

6. Considerações Finais

Utilizando uma mesma situação alunos podem realizar distintas resoluções e, portanto, discutir diferentes conteúdos matemáticos (Função do primeiro grau, Função exponencial, Equações Diferenciais). Isso denota uma das contribuições da Modelagem Matemática no ambiente escolar, já que diferentes encaminhamentos também indicam que uma mesma situação possa ser utilizada em turmas de diferentes níveis de escolaridade. Segundo Burak (1992), cabe ao professor oportunizar e mediar as discussões de modo que os alunos considerem outras formas de pensar e resolver um problema.

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma atividade de Modelagem Matemática que pode ser desenvolvida em diferentes turmas regulares, nas aulas de Matemática, de modo a discutir Matemática e a condição social de mulheres que assumem a responsabilidade pelos seus lares. No entanto, a utilização dessa situação em sala de aula ainda não foi desenvolvida, permanecendo em aberto para um posterior trabalho de investigação.

7. Referências

BARBOSA, J. C.**Modelagem matemática na sala de aula**. Perspectiva, Erechim (RS), v.27, n.98, p.65-74, junho/2003

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática:Contribuições para o debate teórico. In: **Reunião anual da ANPED**: Caxambu- RJ. Anais... Rio Janeiro: Caxambu, 2001.

BASSANEZI, R. C.**Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de Ensino-Aprendizagem**. Dissertação de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1992.

IBGE. **Séries estatísticas**. Disponível em: www.ibge.gov.br/seriesestatisticas/exibedados.php. Acessado em: 22 de dezembro de 2015.

MACHADO JÚNIOR, A.G. **Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem:**ação e resultados. 2005.132 p. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais,Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

NERI, C. Z. **Competências em avaliação na aprendizagem**. Capturado do site http://www.unisa.br. 20 de dezembro 2015.

SADOVSKY, P.**O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. –1. ed. - São Paulo: Ática, 2010

ISSN 2178-034X