RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA DA CATEGORIA ISOMORFISMO DE MEDIDAS, POR ALUNOS DE 4º E 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL: REFLEXÃO E ANÁLISE.

Esther Maria Freixedelo Martins
Universidade Cruzeiro do Sul
martinsesther@terra.com.br

Resumo:
Este artigo faz uma análise crítica sobre o desempenho e as estratégias mais utilizadas por crianças de 4º e 5º anos na resolução de situações-problema do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Acreditamos que a presente pesquisa possa colaborar com a reflexão da práxis pedagógica dos professores que trabalham com o ensino das ideias multiplicativas, em situações-problema da categoria isomorfismo de medidas. O estudo é fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e consistiu da aplicação de um instrumento de investigação, composto por 5 questões, centradas em duas classes de situações: a correspondência de um a muitos e a correspondência de muitos a muitos. Os resultados apontam para a dificuldade que os alunos encontram nesta segunda classe e evidenciam a necessidade de se repensar como são apresentados e trabalhados os conceitos de multiplicação e divisão, ao longo da primeira etapa do Ensino Fundamental.
Palavras-chave: Ensino Fundamental; Estrutura Multiplicativa; Procedimentos de resolução de problemas.

1. Introdução

Em seus estudos, Vergnaud (2009) *apud* Magina, Santos e Merlini (2014) destaca, na Matemática, dois campos conceituais especialmente importantes, por alicerçarem todos os demais conceitos matemáticos: o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

O *Campo Conceitual das Estruturas Aditivas* engloba um conjunto de situações-problema caracterizadas pela *relação parte-todo*, onde, quando as partes são conhecidas, pode-se determinar o todo, ou, se o todo e uma das partes são conhecidos, pode-se determinar a outra parte; utilizando-se, para isso, de uma operação de adição, de subtração, ou ainda, da combinação das duas.

Sobre o *Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas*, os mesmos autores afirmam:

> [...] nas situações envolvendo o raciocínio multiplicativo o que está em jogo é uma relação fixa (invariante operatório) entre duas quantidades, ou seja, toda situação multiplicativa envolve duas quantidades (de naturezas iguais ou distintas) e uma relação constante entre elas. (MAGINA et al., 2010, p. 519)

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas engloba, portanto, vários conceitos e categorias de situações-problema. Para efeito deste artigo, a discussão está centrada em duas categorias: a correspondência "de um a muitos" e a correspondência "de muitos a muitos", denominadas por Vergnaud, como *isomorfismo de medidas*.

A escolha desse tema se justifica porque vários estudos demonstram que um dos possíveis obstáculos didáticos à aprendizagem do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas refere-se à concepção, ainda vigente no ambiente escolar, de que a multiplicação corresponde *apenas* à soma de parcelas iguais e, por consequência, a divisão remete *apenas* a várias subtrações sucessivas; pois é dessa forma que os conceitos são normalmente apresentados aos alunos. Cabe ressaltar que um obstáculo didático é uma barreira à aprendizagem que decorre da própria ação de ensinar e da formação dos professores.

2. A proporção simples e suas duas classes de situações-problema

A partir da teoria de Vergnaud, sobre o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, Magina, Santos e Merlini (2014) sintetizam as ideias centrais desse campo.

Apesar dos problemas do grupo isomorfismo de medidas, em que ocorre a correspondência "de um a muitos", poderem ser resolvidos por procedimentos aditivos, considerando-se a relação parte-todo, não é conveniente que isso ocorra, pois, dessa forma, não se favorece a percepção, pelos alunos, das relações de proporcionalidade que caracterizam o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Tal ocorrência pode gerar obstáculos à aprendizagem e à resolução de situações-problema que "quebram" esse paradigma, como acontece, por exemplo, nas situações-problema em que ocorre a correspondência "de muitos a muitos".

A proporção simples e suas duas classes de situações-problema são o foco do presente artigo.

Quanto às relações, as situações-problema utilizadas no instrumento de investigação, apresentam relações quaternárias, ou seja, “uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de uma natureza e as outras duas, de outra natureza” (apud MAGINA et al., 2014, p. 522), por exemplo, bens e custos, pessoas e objetos, tempo e distância, entre outras.

Se a relação entre essas quantidades está explícita, acontece a correspondência “de um a muitos”. Se essa relação está implícita, ocorre a relação “de muitos a muitos”.

3. A correspondência de um a muitos

Como exemplos de situações-problema do grupo isomorfismo de medidas, em que ocorre a relação “de um a muitos”, podemos citar:

1º) Marcelo comprou três pacotes de balas. Sabendo que cada pacote custou R$ 5,00, quanto Marcelo pagou pelos três pacotes de balas?

Esse tipo de situação-problema é muito comum na escola e pode ser considerado como protótipo da multiplicação e da ação de replicar quantidades. A proporcionalidade aqui presente é: um está para cinco, assim como três está para quinze. Para resolver a situação-problema, o estudante pode utilizar tanto o raciocínio aditivo, adicionando três parcelas iguais a cinco, quanto o raciocínio multiplicativo, indicando a quantidade três multiplicada por R$ 5,00.

2º) Regina pagou R$ 24,00 por duas camisetas. Quanto custou cada camiseta?

Esse tipo de situação-problema também é muito comum na escola e pode ser considerado como protótipo da divisão e da ação de repartir igualmente. A proporcionalidade aqui presente é: dois está para vinte e quatro, assim como um está para doze.

3º) Walter pagou R$ 36,00 por canetas que custam R$ 9,00 cada. Quantas canetas ele comprou?

Esse tipo de problema é menos comum na escola e considera a ideia de quotição ou medida, pois exige que o estudante descubra quantos “noves” cabem em trinta e seis reais. A proporcionalidade aqui presente é: nove está para um, assim como quatro está para trinta e seis.

3. A correspondência de muitos a muitos

Na categoria isomorfismo de medidas, há ainda outro tipo de situação-problema, em que não ocorre a correspondência “de um a muitos”.

São os problemas de correspondência “de muitos a muitos”, onde a relação de proporcionalidade entre as grandezas não está explícita, como podemos observar nos seguintes exemplos:

1º) Se dois abacaxis custam R$ 3,00, quanto pagarei por oito abacaxis do mesmo tipo?

De acordo com Magina et al. (2014), esse problema mantém a mesma estrutura dos problemas discutidos anteriormente, contudo, não faz sentido pensar no produto direto entre as duas quantidades, mas sim, na relação multiplicativa que existe entre elas, duas a duas.

Para resolvê-lo, o estudante pode utilizar dois procedimentos: O primeiro seria buscar a relação “de um a muitos” que existe entre as grandezas de diferente natureza (produtos e preços) para, a seguir, calcular o preço de oito abacaxis. Dessa forma, ele realizaria a divisão de R$ 3,00 por dois abacaxis, obtendo o preço da unidade (R$ 1,50) e, a seguir, faria a multiplicação do valor de R$ 1,50 por oito, obtendo R$ 12,00. O segundo seria buscar a relação de proporcionalidade que existe entre as quantidades final e inicial de abacaxis, percebendo que se oito é o quádruplo de dois, o preço de oito abacaxis corresponde ao quádruplo de três reais.

2º) Se 12 cadernos custam, ao todo, R$ 30,00, qual será o preço de 6 cadernos iguais a esses?

Como na situação anterior, o estudante também pode utilizar dois procedimentos: O primeiro seria buscar a relação “de um a muitos” que existe entre as grandezas de diferente natureza (produtos e preços) para, a seguir, calcular o preço de seis cadernos. Dessa forma, realizaria a divisão de R$ 30,00 por doze cadernos, para obter o preço da unidade (R$ 2,50) e, a seguir, faria a multiplicação de R$ 2,50 por seis, obtendo R$ 15,00.

O segundo procedimento seria buscar a relação de proporcionalidade que existe entre as quantidades final e inicial de cadernos, percebendo que doze está para trinta, assim como seis está para quinze, pois seis é a metade de doze e quinze é a metade de trinta.

Nas duas situações apresentadas, consideramos que o segundo procedimento exige um maior nível de abstração dos alunos e uma maior compreensão das ideias do Campo Conceitual Multiplicativo.

Outra dificuldade a ser considerada no primeiro procedimento (o que busca a relação “de um a muitos” entre as grandezas de naturezas distintas) é que as divisões mostradas nos exemplos apresentam quocientes expressos por números decimais, o que pode vir a se configurar como um obstáculo epistemológico, ou seja, uma barreira à aprendizagem decorrente da própria Matemática e das características do sistema de numeração decimal e das operações numéricas. (BROSSEAU, 2006).

Outro possível obstáculo epistemológico está relacionado às situações em que a divisão que resolve o problema produz, para quociente, um número racional, cuja representação decimal não é exata, por exemplo, dez dividido por três, cujo resultado é 3,3333333333...

4. Método

O estudo apoiou-se nos princípios da pesquisa descritiva, já que a pesquisadora teve por objetivo conhecer e interpretar determinados fenômenos ligados à realidade sem nela intervir para modificá-la (RUDIO, 2001).

Dessa forma, a pesquisa buscou elaborar um instrumento de investigação que permitisse avaliar não só o desempenho dos estudantes, como também procurou descrever e categorizar as estratégias empregadas por eles.

5. O instrumento de investigação, sua análise e resultados

O instrumento de pesquisa foi elaborado pela própria pesquisadora, a partir dos estudos feitos, com cinco questões similares às apresentadas anteriormente. Para a análise dos resultados, serão abordados tanto os dados quantitativos, referentes à frequência de acertos e erros em cada situação-problema, como os dados qualitativos, que consideram as estratégias, representações e níveis de raciocínio apresentados pelos alunos. Os sujeitos dessa investigação são estudantes de 4º e 5º anos de uma escola de Rede Municipal de Ensino da Cidade de São Paulo, todos leitores e com idade entre 9 e 11 anos, já familiarizados com as quatro operações e seus algoritmos. Para esta pesquisa foram desconsideradas as diferenças de resultados entre os anos escolares em questão.

6. Algumas considerações sobre os problemas propostos e sua análise quantitativa

Na primeira parte, apresentaremos alguns comentários sobre a ideia de cada problema e os respectivos dados quantitativos, no que se refere aos procedimentos de resolução utilizados.

Na segunda parte, iremos desenvolver a análise qualitativa dos resultados encontrados, através da observação de alguns protocolos, avaliando os possíveis obstáculos encontrados pelos alunos na resolução das situações-problema propostas.

Problema A: Lenita comprou seis canetas. Sabendo que cada caneta custou 3 reais, quanto Lenita gastou?

Este é o problema que mais se aproxima da vivência dos alunos e da ideia vigente de que a multiplicação é a soma de parcelas iguais. Nele ocorre a correspondência "de um a muitos", onde o preço de uma caneta corresponde a três reais e há a ideia de replicar quantidades. O procedimento de resolução esperado é a multiplicação das grandezas apresentadas no problema.

Tabela 1 – Dados quantitativos – Problema A

Categorias	Frequência	Percentual
Acertam o resultado, pelo raciocínio multiplicativo.	49	81,67%
Acertam o resultado, pelo raciocínio aditivo.	2	3,33%
Acertam o resultado, utilizando representações.	3	5,00%
Identificam a operação, mas erram o resultado.	3	5,00%
Não identificam a operação.	3	5,00%
$\sum$	60	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Problema B: Paula pagou R$ 54,00 por duas mochilas iguais. Quanto custou cada mochila?

Este problema também é próximo da vivência dos alunos e apresenta a correspondência "de um a muitos", em que, se duas mochilas correspondem a 54 reais, uma mochila corresponde a 27 reais. Para resolvê-lo, o aluno deve ser capaz de calcular a metade de 54, tendo o algarismo 5 (que representa 5 dezenas no dividendo) como um elemento dificultador nesse cálculo, por não ser divisível por 2.

Tabela 2 – Dados quantitativos – Problema B		
Categorias	**Frequência**	**Percentual**
Acertam o resultado, usando a divisão 54 ÷ 2.	37	61,67%
Acertam o resultado, usando a adição 27 + 27.	1	1,67%
Acertam o resultado, usando representações.	2	3,33%
Identificam a operação, mas erram o resultado.	6	10,00%
Identificam a operação, mas não resolvem.	2	3,33%
Erram, fazendo a operação inversa (2 x 54 ou 54 + 54).	7	11,67%
Erram, usando cálculos indevidos.	4	6,66%
Erram, utilizando representações pictóricas.	1	1,67%
∑	60	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Problema C: Caio pagou R$ 17,00 em 3 cadernos de mesmo preço. Quanto ele gastaria se comprasse 9 cadernos iguais a esses?

Este tipo de problema não é apresentado com frequência aos alunos e nele ocorre a correspondência "de muitos a muitos", onde três cadernos estão para 17 reais, na mesma proporção que nove cadernos estão para 51 reais. Para resolver o problema, não há a necessidade de saber o preço unitário do caderno e, por essa razão, foi escolhido propositadamente o número 17, que não é divisível por três.

Espera-se que o aluno perceba a relação implícita entre a quantidade inicial (3 cadernos) e a quantidade procurada (9 cadernos), observando que 9 é o triplo de 3 e que realize a multiplicação de 3 por 17, ou seja 3 x 17.

Tabela 3 – Dados quantitativos – Problema C		
Categorias	**Frequência**	**Percentual**
Acertam o resultado, pela multiplicação.	7	11,67%
Acertam o resultado, usando uma tabela.	3	5,00%
Acertam o resultado, adicionando 17 + 17 + 17.	3	5,00%
Acertam, apenas colocando a resposta.	1	1,67%
Identificam a operação, mas erram o resultado.	4	6,66%
Erram, multiplicando 17 por 9.	18	30,00%
Erram, realizando operações indevidas.	14	23,34%
Erram, usando uma tabela como apoio.	8	13,33%
Não resolvem.	2	3,33%
∑	60	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Problema D: Danilo pagou R$36,00 por estojos que custam R$9,00 cada. Quantos estojos Danilo comprou?

Novamente, aparece a correspondência "de um a muitos", onde R$ 36,00 estão para quatro estojos na mesma proporção que R$ 9,00 estão para um estojo. Para vários alunos é uma situação-problema difícil, porque eles precisam verificar quantos estojos de 9 reais "cabem" em 36 reais, o que significa pensar a divisão como uma medida ou quotição.

Tabela 4 – Dados quantitativos – Problema D		
Categorias	**Frequência**	**Percentual**
Acertam o resultado, pela divisão de 36 por 9 .	21	35,00%
Acertam o resultado, usando a multiplicação 4 x 9.	4	6,67%
Acertam o resultado, pela contagem, usando uma tabela, adicionando ou colocando apenas a resposta.	10	16,66%
Identificam a operação, mas erram o resultado.	3	5,00%
Não identificam a operação, multiplicando 36 por 9.	6	10,00%
Não identificam a operação.	12	20,00%
Não resolvem.	4	6,67%
∑	60	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Problema E: Sabendo que 12 tesouras custam R$ 30,00, quanto custarão 6 tesouras iguais a essas?

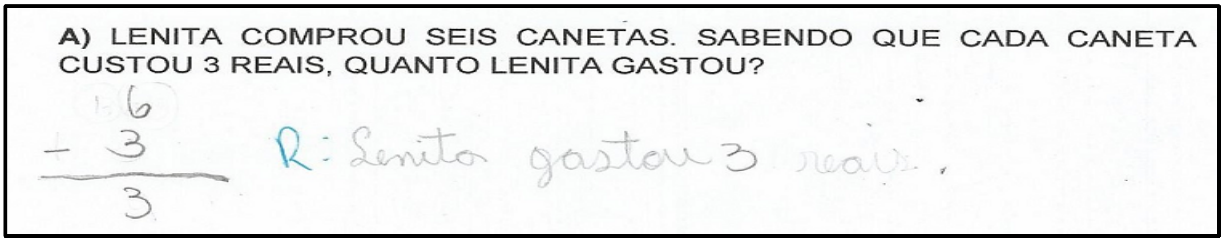
Novamente ocorre a correspondência "de muitos a muitos", onde 12 tesouras estão para 30 reais na mesma proporção que 6 tesouras estão para 15 reais. Para sua resolução, não há a necessidade de saber o preço unitário e os alunos deveriam perceber que se seis é a metade de 12, o preço de seis tesouras é a metade de 30 reais; realizando a divisão por 2.

Tabela 5 – Dados quantitativos – Problema E		
Categorias	**Frequência**	**Percentual**
Acertam o resultado, pela divisão de 30 por 2 .	6	10,00%
Acertam o resultado, usando esquemas ou tabelas.	15	25,00%
Acertam o resultado, pela adição ou subtração ou apenas colocam a resposta correta.	4	6,68%
Identificam a operação, mas erram o resultado.	1	1,67%
Não identificam a operação.	29	48,33%
Não resolvem.	5	8,33%
∑	60	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

7. Análise dos protocolos

Problema A: Foi a situação-problema com maior índice de acerto (90%). Dos sessenta alunos investigados, apenas 5% não identificaram a operação que resolve o problema, como mostra o protocolo 1, e outros 5%, apesar de identificarem a operação, erraram o resultado.

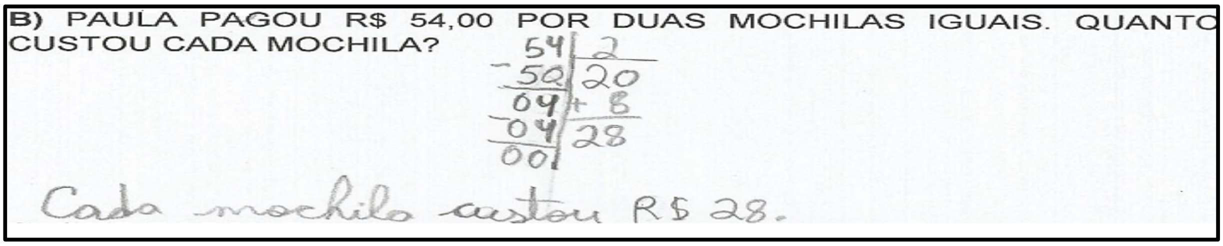

A) LENITA COMPROU SEIS CANETAS. SABENDO QUE CADA CANETA CUSTOU 3 REAIS, QUANTO LENITA GASTOU?

6
− 3
3

R: Lenita gastou 3 reais.

Figura 1 – Problema A – Protocolo 1

Problema B: Esta situação-problema também apresentou considerável índice de acertos, 66,67%. Entre os alunos que não obtiveram êxito, 13,33% foram capazes de interpretar o problema e de identificar a operação que o resolve, no entanto, erraram o resultado da divisão (figura 2) ou apenas indicaram o cálculo. Temos por hipótese que esses alunos ainda não dominam totalmente os procedimentos de divisão (nem mesmo por representações pessoais) ou o seu algoritmo.


B) PAULA PAGOU R$ 54,00 POR DUAS MOCHILAS IGUAIS. QUANTO CUSTOU CADA MOCHILA?

54 | 2
−50 | 20
04 | + 8
−04 | 28
00

Cada mochila custou R$ 28.

Figura 2 – Problema B – Protocolo 2

Dos alunos investigados, 11,67% erraram por utilizar a operação inversa, calculando o dobro de 54 ou adicionando duas parcelas iguais a 54 e apenas 8,33% dos alunos utilizaram indevidamente operações de adição, de subtração ou representações pictóricas.

Problema C: Foi o problema que apresentou maior variedade de procedimentos e menor índice de acertos (23,34%), pois, para resolvê-lo, o aluno precisa perceber a relação implícita entre as quantidades final e inicial de cadernos, multiplicando 17 por 3. Na análise dos erros cometidos, destacamos que 30% dos alunos realizaram a multiplicação de 17 por 9, considerando que o preço de cada caderno corresponde a 17 reais, como nas situações-problema em que ocorre a correspondência “de um a muitos”, como representado na figura 3.

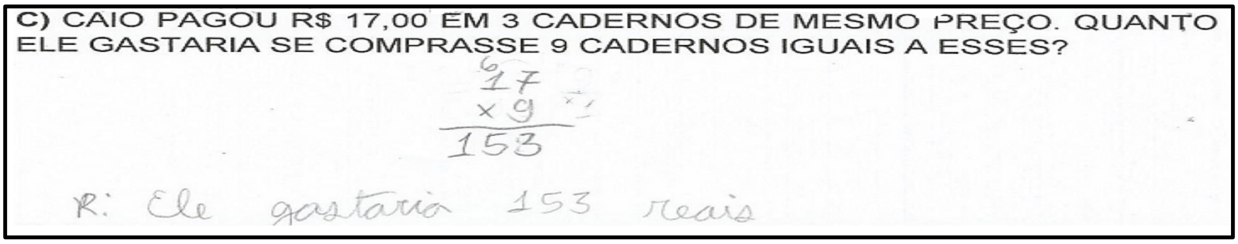


Figura 3 – Problema C – Protocolo 3

Dentre os alunos que não obtiveram êxito, 23,34% realizaram duas operações numéricas. Acreditamos, por considerarem necessário utilizar todos os números que aparecem no enunciado. Do total de alunos, 13,33% erraram ao tentar utilizar uma tabela numérica; 6,66% dos alunos não acertaram o resultado, mesmo identificando a operação e os 3,33% restantes não registraram qualquer procedimento de resolução.

Problema D: Esta situação-problema teve considerável índice de acerto (58,33%) e para resolvê-la, os alunos utilizaram diversos procedimentos. Dentre os alunos que erraram, 5% identificaram a operação de divisão, mas não acertaram o algoritmo e 10% utilizaram indevidamente a operação inversa, multiplicando 36 por 9, como identificado na figura 4.

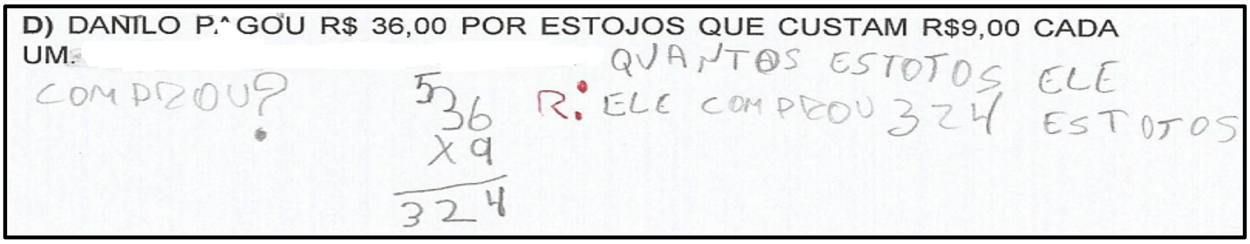
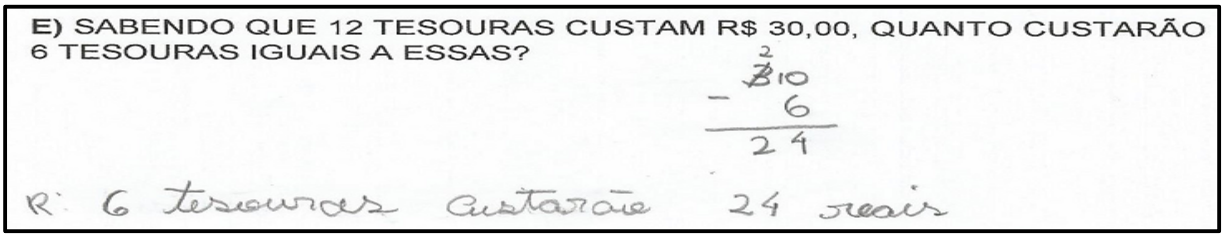


Figura 4 – Problema D – Protocolo 4

Um elevado número de alunos (20%) não identificou a operação que resolve o problema e 6,67% não realizaram qualquer procedimento de resolução.

Problema E: Nesta situação-problema, apesar de ocorrer a correspondência “de muitos a muitos”, o índice de acertos foi 41,67%, superando expectativas. No entanto, dentre os que não obtiveram êxito (58,33%), chama a atenção que 48,33% não identificaram a operação que resolve o problema, como mostrado no protocolo a seguir.



Também se destaca que 8,33% dos alunos não realizaram quaisquer procedimentos de resolução e que 1,67% deles, mesmo identificando a operação, não a resolveram.

8. Considerações finais

Pela análise dos resultados obtidos, os alunos das salas de 4º e 5º anos investigadas apresentam mais facilidade na resolução de situações-problema que apresentam a correspondência “de um a muitos” do que naquelas em que ocorre a correspondência “de muitos a muitos”. Isso acontece por vários fatores já citados neste artigo.

As situações-problema em que ocorre a correspondência “de um a muitos” (problemas A, B e D) são mais próximas de suas vivências, apresentam relações de proporcionalidade explícitas e diretas entre as grandezas e são mais trabalhadas no âmbito escolar. Além disso, podem ser resolvidas tanto pelo raciocínio aditivo como pelo raciocínio multiplicativo, o que os aproxima da ideia vigente de que a multiplicação corresponde à soma de parcelas iguais e a divisão, a várias subtrações sucessivas. No entanto, não é adequado que isso ocorra, para que os alunos possam avançar na construção dos conceitos do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, cuja característica principal é a relação fixa de proporcionalidade, existente entre as grandezas apresentadas.

Nas classes em que a investigação foi realizada, os alunos apresentam boa compreensão das operações numéricas e o índice de alunos que utilizou procedimentos aditivos para a resolução dos problemas foi baixo.

Os alunos também demonstram boa compreensão dos algoritmos, pois poucos alunos recorrem a esquemas ou representações pictóricas para resolução das situações-problema.

Nessas classes, também se pode notar que o professor costuma utilizar tabelas para apoiar os cálculos de multiplicação e de divisão, o que favorece a percepção das relações de proporcionalidade que caracterizam o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

A utilização dessas tabelas, no entanto, deve ser retomada em novas situações-problema, para que os alunos possam superar possíveis dificuldades, construindo tanto os conceitos matemáticos envolvidos no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas como os relacionando aos conceitos do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas.

9. Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Edda Curi, da UNICSUL (Universidade Cruzeiro do Sul), por confiar no meu potencial, investir na minha formação continuada e estar sempre disponível para me orientar e sanar as minhas dúvidas.

Ao Professor José Fernando Fernandes Pereira, orientador do meu Trabalho de Conclusão de Curso, por me ensinar sobre os trajetos de aprendizagem e suas muitas idas e vindas.

A todos os meus colegas do Projeto Grupo Focal e do Observatório da Matemática, especialmente as amigas Simone Oliveira dos Santos Silva, Grace Zaggia Utimura e Susan Quiles Quisbert, por me auxiliarem na realização desse artigo.

10. Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997, 142 p.

BROSSEAU, G. **Epistemologia e didattica della matematica. La matematica e la sua Didattica**, Bologna, n. 4, p. 621-655, 2006.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A; MERLINI, V. L. **O raciocínio de Estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas.** Ciências Educacionais, Bauru, n. 2, p. 517 – 533, 2014.

RUDIO, F. V. **Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica**. Petrópolis: Vozes, 32ª ed, 2001.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da Matemática na escola Elementar. Trad. Maria Lucia Faria Moro; Curitiba, PR: UFPR, 2009.

ZARAN, M. L. O. ; SANTOS, C. A. B. **Problemas de estruturas multiplicativas em um quinto ano do Ensino Fundamental** - Programa observatório da educação: pesquisas desenvolvidas e contribuições para o ensino de Matemática nos anos iniciais / Organização de Edda Curi – São Paulo , Terracota Editora, 2014.