OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS RELATIVOS AO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

Mônica Suelen Ferreira de Moraes
Universidade Federal do Tocantins
monicamoraes@uft.edu.br

Maria José de Freitas Mendes
Universidade Federal do Pará
mjfm@orm.com.br

Resumo:
As dificuldades em Matemática no ensino superior têm sido muito discutidas em diversos estudos em Educação Matemática. Concernentes ao Cálculo, as pesquisas apontam para o fato de que o ensino e a aprendizagem das noções envolvidas apresentam muitas questões que merecem ser aprofundadas. Assim, temos como objetivo neste trabalho apresentar algumas implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de limite de função real de uma variável real. Faremos isso a partir do estudo de obstáculos epistemológicos de limite já listados por pesquisadores da área. A proposta para o ensino de limite de função real a uma variável real será apresentada em linhas temáticas, entrelaçando os pressupostos da história e da didática da matemática.
Palavras-chave: Cálculo; Limite de função; Obstáculo epistemológico; História da Matemática; Didática da Matemática.

1. Introdução

Este trabalho é fruto de uma pesquisa de dissertação de mestrado que foi desenvolvida no Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). O GEHEM desenvolve pesquisas sobre a história da Matemática, tanto no que diz respeito aos conteúdos como em relação à história de matemáticos.

Sabemos que nos cursos de Matemática do ensino superior há um alto índice de reprovação e desistência da disciplina de Cálculo, a qual está presente no currículo de cursos de graduação, tais como engenharia, física, administração, computação, entre outros (SANTOS, 2005). Sabemos ainda que muitas dessas dificuldades de aprendizagem estão relacionadas com o entendimento da noção de limite. Com isso, direcionamos a temática dessa pesquisa para o âmbito do Cálculo, particularmente para limite de função.

Assim, temos como objetivo neste trabalho apresentar algumas implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de limite de função real de uma variável real. Para isso, analisamos os obstáculos apresentados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

Para isso, optamos por apresentar os obstáculos epistemológicos trazidos pelos autores supracitados e em seguida, referimo-nos às implicações dos obstáculos epistemológicos no ensino e aprendizagem de limite de função, aludindo aos marcos teóricos adotados para esta pesquisa e os obstáculos por eles verificados. Com isso, são apresentados os desdobramentos dessa investigação, que se constituem em sugestões para o ensino de limite a partir da identificação dos obstáculos epistemológicos com o objetivo de superá-los.

Dessa forma procuramos trazer contribuições para o campo da Educação Matemática, pelo enfoque na exploração epistemológica das informações históricas do conceito de limite, apontando possibilidades de superação das dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino de limite, apoiado em princípios epistemológicos e didático-pedagógicos que envolvem relações entre pressupostos da história e da didática da Matemática na expectativa de propor uma Educação Matemática com base nessas conexões teóricas.

2. Obstáculos epistemológicos

Para Almouloud (2007), o erro é considerado necessário para: desencadear o processo de aprendizagem; o professor situar as concepções do aluno e compreender os obstáculos subjacentes; e o professor adaptar a situação didática. É então, imprescindível buscar respostas às seguintes questões: Quais obstáculos podemos evitar? Quais obstáculos não devemos evitar? Como superar os obstáculos que não devemos evitar?

Brousseau (1986) distingue origens diversas para os obstáculos identificados na didática da Matemática caracterizando-os em ontogênicos, didáticos e epistemológicos. Os obstáculos de origem ontogenênica, conforme o pesquisador, são aqueles que ocorrem por causa de limitações (neurofisiológica entre outras) em algum momento do seu crescimento, assim, não desenvolve conhecimento adequado para os seus meios e objetivos.

Quantos aos obstáculos de origem didática, Brousseau (1986) aponta que são aquelas que dependem de uma escolha ou de uma concepção do sistema de ensino. Neste trabalho iremos evidenciar apenas os obstáculos com características epistemológicas.

Os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados ao longo da história da Matemática, quando se observa as dificuldades que os matemáticos encontraram, para a compreensão e utilização desses conceitos. Esse tipo de obstáculo é, na realidade, constitutivo do próprio conhecimento e não se pode nem se deve evitá-lo (BROUSSEAU, 1986).

ISSN 2178-034X

A tese de Cornu (1983) – Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles – tratou de obstáculos epistemológicos para a aprendizagem do conceito de limite. Para o autor, a noção de limite é fundamental para a análise, e esta é uma das noções fundamentais da Matemática. Além dos pré-requisitos para o aprendizado, a noção de limite em si contém muitas dificuldades, pois, é um novo tipo de conceito para os alunos, que até então encontravam raciocínios e cálculos prontos e acabados.

Com sua pesquisa, Cornu (1983) objetiva compreender quais são as reais dificuldades na aquisição da noção de limite, e ainda, enfatiza que seu objetivo é de natureza didática, isto é, estudar o ensino e aprendizagem do conceito de limite, a fim de melhorá-los. O autor salienta que antes de propor soluções educacionais, necessitamos compreender os fenômenos que ocorrem ao se aprender o conceito de limite.

Para Cornu (1983), o objeto matemático que constitui a noção de limite não é, nem deve ser, a definição do limite. Uma definição é matematicamente suficiente para restaurar um conceito, mas em termos de conhecimento, não captura todos os aspectos do conceito. Para uma ideia completa do que é o conceito de limite, devem ser examinadas em detalhe as várias maneiras em que o usamos em todas as subáreas da Matemática, considerando o cálculo de limites, as demonstrações da "passagem para o limite”, os resultados que podem ser aproximações etc.

Com isso, o autor identificou obstáculos epistemológicos, obstáculos estes que explicam alguns atrasos, alguns erros, mas sem apresentar um aspecto negativo. Para Cornu (1983), eles foram, muitas vezes, fatores de progresso, levando-se em conta que os esforços para superá-los nos levaram ao desenvolvimento da análise.

O primeiro obstáculo epistemológico identificado foi a transposição numérica. Para o pesquisador, uma das grandes dificuldades da história do conceito de limite era de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números.

Cornu (1983) afirma que o conceito unificado de limite tem sido possível no domínio numérico depois de termos sucesso na tradução dos diferentes problemas numéricos que podem surgir. A interpretação geométrica dos fenômenos tem sido abrandada pela transposição numérica. Podemos pensar que o método da exaustão dos gregos é muito próximo à nossa noção de limite, e poderia então ser surpresa a demora de tantos séculos para a noção de limite ser especificada, enquanto os gregos pareciam tão perto. Isto se identificou para o autor como sendo a transposição numérica que constitui a diferença entre esses dois marcos, o obstáculo que foi tão difícil de atravessar.

O segundo obstáculo elencado pelo pesquisador foi o aspecto metafísico da noção de limite. Cornu (1983) ressalta que a utilização da noção de limite no raciocínio matemático marca uma mudança significativa de nível, pois introduzimos raciocínios, objetos, modos de um novo tipo de pensamento que já não são apenas os cálculos ou deduções lógicas habituais. O autor afirma também que o infinito não faz parte do campo da Matemática clássica. O infinito e a noção de limite surgiram como sendo mais da metafísica ou filosofia que da Matemática. Isso causou entre os matemáticos extrema relutância para aceitação desses conceitos, o que levou os gregos a evitar o infinito no raciocínio matemático.

Outro obstáculo epistemológico abordado por Cornu (1983) é a noção de "infinitamente pequeno" ou de "infinitamente grande". Para o autor, a suposição da existência de quantidades infinitamente pequenos tem sido um grande obstáculo. O autor afirma que Euler usa o conceito de quantidade infinitamente pequena, que, para ele, é uma quantidade que se torna igual a zero, um número menor do que qualquer dada quantidade é zero. Para Cornu (1983, p. 59), "a quantidade é algo qualquer ou nada. Se for algo que não tenha sido cancelado, se não é nada, ela será cancelada. A suposição de que existe um estado intermediário entre os dois é uma utopia". Conforme Cornu (1983), se a presença da noção de infinitamente pequeno dificulta a noção de limite, o infinitesimal também de algum modo tem sido um fator de progresso uma vez que a noção de limite foi desenvolvida em parte na reação contra o infinitamente pequeno.

O quarto obstáculo citado por Cornu (1983) é intitulado "O limite atinge ou não?". Esta questão foi também uma fonte de obstáculos. O autor afirma que para d'Alembert, se o limite for atingido não faz parte do conceito de limite. Até Cauchy, o limite poderia ser alcançado, no entanto, na definição da palavra "limite", que exclui o tamanho variável, atinge-se o limite. O autor aponta que em sua pesquisa esse obstáculo ainda é encontrado entre os estudantes.

Por fim, o autor coloca algumas situações que podem ser caracterizadas como obstáculos. Com relação ao obstáculo anterior, a ideia de que qualquer convergência é monótona e não atinge o limite é um obstáculo. Essa ideia prevalece até Cauchy, e é encontrada em muitos estudantes.

Outro grande obstáculo mencionado pelo autor é a dificuldade em imaginar que a soma infinita pode ser finita. É também um dos obstáculos que o pesquisador encontra entre os estudantes para a noção de infinito. O autor incluiu também o problema de 0/0, no qual duas quantidades podem tender a zero, enquanto sua relação tende a uma quantidade finita. Os exemplos incluem traços desse obstáculo em Berkeley.

ISSN 2178-034X

Sierpinska (1985), em seu artigo – Obstacles Épistémologiques relatifs à la notion de limite – identifica, a partir do estudo do desenvolvimento histórico do conceito de limites e da análise de um experimento, uma lista de obstáculos relacionados com a noção de limite: 1) "Horror ao Infinito"; 2) Obstáculos relacionados com a noção de função; 3) Obstáculos geométricos; 4) Obstáculos "lógicos"; 5) Obstáculo do símbolo.

O primeiro grupo de obstáculos epistemológicos denominado de "horror ao infinito" é o que aponta para a recusa ao conjunto do infinito, a recusa do status de operação Matemática à passagem ao limite. De acordo com a autora, a passagem ao limite é um método de demonstração rigorosa seguindo um esquema que elimina o problema do infinito. Essa crença pode ser estabelecida sem impedir os alunos de cair no extremo oposto: "a aplicação de um regime rigoroso para a liberdade total de escolha de raciocínio que conduz ao resultado, desde que seja verdade" (SIERPINSKA, 1985, p.39) [tradução nossa]. Vemos manifestações deste obstáculo, por exemplo, no método da exaustão, pois, conforme a autora, nesse método o problema do infinito é eliminado.

Sierpinska (1985) encontra três formas de identificação desse obstáculo: raciocínio baseado na indução incompleta; a passagem ao limite considerando apenas aproximações; e, com o objetivo de justificar um resultado, não tentamos fazer provas rigorosas, encontramos apenas uma fórmula que descreve a situação e permite uma verificação através de um cálculo simples.

Ainda relacionado ao "horror ao infinito, a autora identifica o obstáculo físico, no qual enfatiza-se que a questão de saber se uma grandeza variável atingiu o seu limite ou não, é um sintoma desse obstáculo, sendo esta uma interpretação demasiadamente literal da expressão "dinâmica" usada sobre a noção de limite. Ainda neste grupo, "horror ao infinito", Sierpinska (1985) destaca os obstáculos algébricos em duas situações: a transferência automática dos métodos da álgebra de manipulação de grandezas finitas para grandezas infinitas; e, a transferência das propriedades dos termos de uma sequência convergente ao seu limite. A autora enfatiza que essa última situação é um obstáculo que ocorre especialmente no princípio da continuidade de Leibniz.

O aparecimento do conceito geral de função foi um ponto decisivo que permitiu no século XIX uma clara articulação da noção de limite livre da intuição geométrica e física. Para a pesquisadora, nas etapas que constituem o rigor da definição de limite aparece cada vez mais clara a noção de função, surgindo assim os obstáculos relacionados com a noção de função. Para Sierpinska (1985), estes obstáculos são próximos ao que se vê na definição de Cauchy, pois aqui se apresenta a restrição de sequências de valores e a concepção que o estudante tem de contínuo parece estar mais próximo da de Leibniz-Cauchy do que de Weierstrass. Ao dirigirmos a atenção exclusivamente no lado relacional da função surge o segundo obstáculo relacionado a função. Durante muito tempo na história, às concepções de limite aplicavam-se apenas às funções monótonas, isso se caracterizou, para Sierpinska (1985), como sendo outro obstáculo pertencente a este grupo, o de redução de funções monótonas, assim como também, a não distinção da noção de limite da noção de limite inferior ou superior. Como exemplo deste último obstáculo citado, temos a descoberta de que o limite da sequência

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ se } 10 \text{ não dividir } n \\ 1, \text{ se } 10 \text{ dividir } n \end{cases}$$

é igual a 1 ou que a série $0{,}9, 0{,}99, 0{,}999, 0{,}9999$, ... tem dois limites, 1 e 0.

Quanto aos obstáculos concernentes à concepção geométrica da noção de limite, apresentam-se obstáculos manifestos primeiramente pela ideia geométrica da diferença entre uma grandeza variável e uma grandeza constante, que é o limite. Sierpinska (1985) aponta que o desenho do círculo como um limite de polígonos inscritos ou circunscritos seria um sintoma deste obstáculo: quanto maior for o número de lados, a maior forma que o polígono pode ter é próximo à forma de círculo. Com relação aos obstáculos lógicos, Sierpinska (1985) alude ao lado lógico da definição da noção de limites correspondendo aos seguintes obstáculos: eliminação de quantificadores ou de sua ordem e o obstáculo em relação ao símbolo da operação de passagem para o limite.

Para Sierpinska (1985), muitas vezes definimos a noção de limite com a ausência de quantificadores, usando a linguagem natural e simbólica. Quanto ao símbolo da operação de passagem para o limite, Sierpinska (1985) salienta que foi introduzido apenas por Cauchy. Como a passagem ao limite não era considerada, o símbolo não foi necessário. A autora exemplifica o obstáculo do símbolo relatando um caso de sua experiência no qual uma equipe não usa nenhum símbolo específico, enquanto na outra, os alunos usaram um sinal de igual $a_p = 1$ ao invés de $\lim_{x \to 0} a_p(x) = 1$.

Sobre os obstáculos epistemológicos envolvendo o conceito de limite temos ainda a pesquisa de Rezende (1994) – Uma análise histórica-epistêmica da operação limite – que procurou determinar em sua dissertação os obstáculos epistemológicos da operação limite através do resgate histórico da construção do conceito de limite. Rezende (1994) aponta que no ensino de Matemática no curso superior destacam-se o fracasso do ensino do Cálculo

ISSN 2178-034X

Diferencial e Integral e a possível dificuldade de compreensão do conceito de números reais, seu processo de construção e suas principais propriedades. Na evolução histórica da operação limite, Rezende (1994) encontrou basicamente quatro obstáculos epistemológicos: 1) a transposição metafísica; 2) a transposição cinética; 3) a transposição numérica; e, 4) a reticência ao infinito. Para cada um dos obstáculos, o pesquisador identifica que o conceito de infinito e o paradigma sobre o conhecimento matemático são duas fontes que predominam e estão presentes em todos os obstáculos.

Com o método dos indivisíveis, a noção de limite foi desenvolvida ora como um método heurístico, ora como álgebra dos indivisíveis. Muitos matemáticos utilizaram e tentaram explicar sobre o infinitamente pequeno, como: Fermat; Newton; Leibniz, entre outros. Rezende (1994) cita que foi Berkeley, no entanto, o primeiro a questionar sobre a natureza destas quantidades infinitamente pequenas, dando ênfase principalmente à característica metafísica que estas apresentavam.

Contudo, Rezende (1994) informa que só com o desenvolvimento do conceito de função no século XVIII é que as questões de Berkeley sobre as quantidades infinitamente pequenas começam a ser esclarecidas. Para Cauchy uma quantidade torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico tende a zero. Rezende (1994) destaca, para Cauchy, a noção de infinitamente pequena é derivada da noção de limite, mas para os seus antecessores era o elemento metafísico necessário para que o processo limite se realizasse.

Assim, conforme Rezende (1994), com Cauchy o limite se dissocia da ideia, até então metafísica, de quantidades infinitamente pequenas, como também fornece os elementos necessários para que essas quantidades se separem do aspecto metafísico. No entanto, esta mesma noção de limite, encontra-se associado ainda a ideias intuitivas, como: 1) valores sucessivos; 2) aproximar-se indefinidamente; e, 3) diferença tão pequena quanto se queira. Rezende (1994) ressalta que nos termos destacados anteriormente verificamos a presença de ideias de movimento, o que caracteriza a presença dos obstáculos cinéticos na definição de limite de Cauchy.

O segundo tipo de obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é a transposição cinética. Conforme Rezende (1994), Galileu questionava, por exemplo, que uma soma infinita poderia ser finita fundamentado no fato de podermos realizar uma tarefa infinita em um tempo finito. James Jurin e Benjamim Robins, críticos da nova análise proposta por Newton e Leibniz, chegam inclusive a discutir se a variável atinge ou não o seu limite. Para d'Alembert, o caso onde o limite é atingido não faz parte do conceito de limite. E para Cauchy um limite não pode ser atingido e a grandeza permanece constante. Pelo conceito de limite de Cauchy uma grandeza constante não varia e por isso não podemos calcular o seu limite. Rezende (1994) explica que todas essas interpretações cinéticas da operação de limite são fundamentadas na concepção de infinito potencial de Aristóteles.

Rezende (1994) salienta que é quase uma unanimidade entre os alunos que 0,999... é menor que 1, elaborando argumentação em geral parecidas com a que Galileu desenvolveu em seu paradoxo, sendo assim compreendido que o modelo potencialista de limite é, com efeito, o modelo mais difundido entre os educandos.

O terceiro obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é da transposição numérica. Uma das dificuldades que os matemáticos encontraram foi a de abstrair do contexto geométrico e cinemático os elementos necessários para trabalhar sobre os números. O pesquisador cita que os obstáculos para que a transposição numérica fosse efetivada foram: 1) a interpretação geométrica das grandezas; 2) a interpretação dinâmica do conceito de variável; 3) o aspecto temporal presente na construção das sequências e séries; e, 4) as interpretações metafísicas dos conceitos de continuidade.

O quarto obstáculo epistemológico envolvendo o conceito de limite, para Rezende (1994), é da reticência ao infinito. Para o pesquisador, esse obstáculo se subdivide basicamente em duas etapas epistemológicas: 1) os matemáticos são reticentes a qualquer concepção de infinito; e, 2) a concepção de infinito potencial de Aristóteles é incorporada a prática da Matemática, ou como uma entidade metafísica ou como um elemento de um procedimento heurístico.

Elaboramos o seguinte quadro sintetizando os obstáculos pelos autores supracitados:

Quadro 1 – Obstáculos epistemológicos de limite

Cornu (1983)	Sierpinska (1985)	Rezende (1994)
- Aspecto metafísico da noção de limite; - A noção de "infinitamente pequeno" ou de "infinitamente grande".	- "Horror ao infinito" (I.1, I.2, I.3, I.4).	- Transposição metafísica.
- "O limite atinge ou não?".	- "Horror ao infinito" (I.5) – Obstáculo físico. - Obstáculos geométricos;	- Transposição cinética.
- A transposição numérica.	- Obstáculos relativos à noção de função.	- Transposição numérica.
	- "Horror ao infinito" (I.6. I.7) – Obstáculos algébricos.	- Reticência ao infinito.
	Obstáculos lógicos.	
	Obstáculo do símbolo.	

Fonte: Elaboração nossa.

Tomamos como organização temporal os obstáculos evidenciados por Rezende (1994). Os elementos metafísicos básicos da Matemática e filosofia grega, segundo Rezende (1994), eram os indivisíveis e as quantidades infinitamente pequenas, que também foram evidenciadas no aspecto metafísico da noção de limite descrito por Cornu (1983), assim como as noções de infinitamente pequeno ou de infinitamente grande. No grupo de obstáculos "horror ao infinito" trazido por Sierpinska (1985), observamos que a recusa do status de operação ao limite estava intimamente ligada aos aspectos metafísicos da noção de limite.

Com a superação dos obstáculos metafísicos de limite, temos o segundo grupo de obstáculos agrupado no quadro 1, os que tratam do aspecto dinâmico muito presente no conceito de limite. Essa característica não se apresentava anteriormente pelo aspecto estático da Matemática grega, entretanto, se deve a aproximação dos conceitos matemáticos com outras áreas do conhecimento. A Matemática passa então a ser utilizada como ferramenta de interpretação de fenômenos, permanecendo, até Cauchy, a questão de saber se uma grandeza variável atingiu o seu limite ou não. Esse dinamismo também está fundamentado no infinito potencial de Aristóteles.

Em seguida, temos os obstáculos relacionados à transposição numérica. Tratam da dificuldade de abstrair da geometria e da cinemática os elementos necessários para se trabalhar com números (CORNU, 1983; REZENDE, 1994). Os obstáculos presentes nesse grupo estavam ligados à a interpretação geométrica das grandezas, à interpretação dinâmica do conceito de variável, e, às interpretações metafísicas dos conceitos de continuidade. Imbricado a esses, estão os obstáculos relativos à noção de função, categorizados assim por Sierpinska (1985), que enfatiza a concepção de contínuo, nesse contexto, de Leibniz até Cauchy.

No grupo de reticência ao infinito proposto por Rezende (1994), temos os matemáticos reticentes a concepção de infinito, pela influência da Matemática grega, e o obstáculo do infinito potencial incorporada a prática Matemática, gerado pela falta de um conceito bem formado de números reais. Nesse viés relacionam-se os obstáculos algébricos, propostos por Sierpinska (1985), que trata da transferência de propriedades de manipulação de grandezas finitas à grandezas infinitas. Nos obstáculos lógicos e do símbolo, contidos na listagem de Sierpinska (1985), não observamos elementos que estabeleçam relação com os demais obstáculos. Essas foram as possíveis conexões observadas entre os obstáculos epistemológicos de limite evidenciados nos trabalhos de Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

3. Implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de limite

Na tentativa de superar os obstáculo epistemológicos do conceito de limite evidenciados anteriormente, por meio da articulação conectiva entre os estudos históricos relacionados aos obstáculos epistemológicos situados no desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, focados nas ideias de limite, a análise desses obstáculos nos permitiu inferir sobre algumas implicações didático-pedagógicas importantes para a construção do conceito de limite de função de uma variável, fazendo o entrelaçamento dos pressupostos da história e da didática da Matemática.

Observando os obstáculos evidenciados neste trabalho, propomos, paralelamente ao ensino tradicional de limite, que se faça um estudo histórico do desenvolvimento desse conceito. Este estudo, orientado pelo professor, possibilita ao aluno uma visão mais ampla e localizada em termos sócio-histórico-cultural da construção do conceito de limite e dos entraves encontrados em seu desenvolvimento.

O estudo histórico vetorizado pedagogicamente aqui proposto pode ser realizado pela apresentação inicial de uma síntese da evolução do conceito de limite, para que os estudantes tenham uma visão geral do desenvolvimento desse conceito. Após essa apresentação, deve ser dada a tarefa para os estudantes de uma pesquisa mais minuciosa quanto ao desenvolvimento do conceito de limite. Essa tarefa pode ser dividida entre grupos de alunos, de modo que cada grupo receba um tema. São sugestões: primeiros conceitos que permeiam a noção de limite e do Cálculo, antecipações ao Cálculo, invenção do Cálculo, formalização do conceito de limite. Podendo estes temas serem subdivididos.

Quando os estudantes estabelecerem contato (nas aulas tradicionais) com a definição formal de limite de função, proporíamos o estudo das definições de alguns matemáticos quanto ao conceito de limite com o objetivo de haver uma identificação/aproximação entre os conceitos estudados e os conceitos até então compreendidos pelos alunos, podendo ser mantidos os mesmos grupos formados anteriormente.

A partir de então, sugerimos uma discussão das dificuldades que os matemáticos tiveram para se chegar a definição formal de limite, se essas dificuldades são as mesmas que os alunos encontram nas definições construídas por eles, observando os obstáculos que precisavam ser transpostos.

As possíveis dificuldades que podem emergir dos diálogos propostos podem ser associadas aos obstáculos identificados em nossa investigação. Podemos assim estabelecer 5

ISSN 2178-034X

(cinco) linhas temáticas para discussão em sala de aula, no ensino de limite de função de uma variável, associadas ao quadro 1.

Quadro 2 – Relação dos eixos temáticos com os obstáculos epistemológicos de limite de função.

	Cornu (1983)	Sierpinska (1985)	Rezende (1994)
(1)	- Aspecto metafísico da noção de limite; - A noção de "infinitamente pequeno" ou de "infinitamente grande".	- "Horror ao infinito" (I.1, I.2, I.3, I.4). - Obstáculos geométricos;	- Transposição metafísica.
(2)	- "O limite atinge ou não?".	- "Horror ao infinito" (I.5) – Obstáculo físico.	- Transposição cinética.
(3)	- A transposição numérica.	- Obstáculos relativos à noção de função.	- Transposição numérica.
(4)		- "Horror ao infinito" (I.6. I.7) – Obstáculos algébricos.	- Reticência ao infinito.
(5)		- Obstáculos lógicos. - Obstáculo do símbolo.	

Fonte: Elaboração nossa.

Linha temática (1) – "Horror ao infinito": Nesta linha, sugerimos a discussão das dificuldades concernentes ao conceito de infinito e das grandezas infinitamente grandes e infinitamente pequenas, associadas ao contexto histórico do surgimento do Cálculo. Questões de investigação relacionadas a temática: a) O que é infinito? b) Quais os motivos de os gregos não aceitarem a noção de infinito?

Linha temática (2) – Aspecto dinâmico do conceito de limite: Nesta linha, sugerimos a discussão das características de movimento presente na noção intuitiva de limite a partir do contexto histórico do qual se originou, estabelecendo também uma discussão quanto as grandezas atingirem ou não o seu limite. Ressaltamos ainda a importância de se ater no ensino de Cálculo o método geométrico aliado ao método aritmético/algébrico, por cada um proporcionar as interpretações necessárias para a apreensão do conceito de limite. Questão de investigação relacionada a temática: a) A partir da quadratura do círculo, como calcular a vizinhança que mais se aproxima do círculo? b) Considerando: $\lim_{x \to a} f(x) = L$. O limite de $f(x)$ quando x tende a a se aproxima ou é igual a L?

Linha temática (3) – Transposição numérica: Sugerimos nessa etapa a discussão quanto às dificuldades encontradas historicamente de abstrair do contexto geométrico a cinemática, não para trabalhar a "grandeza", mas sim os números, chegando assim, na definição formal de limite. Questões de investigação relacionadas a temática: a) O que ε significa na definição de limite de função? b) O que δ significa na definição de limite de função? c) Qual o significado da relação entre ε e δ na definição formal de limite de função? Por que devemos buscá-la?

Linha temática (4) – "Algebrização do infinito": nessa etapa, se propõe a discussão quanto as formas de se trabalhar com o infinito e quanto as situações de indeterminações que surgem ao buscarmos o limite de determinadas funções, imbricadas ao contexto histórico. Questões de investigação relacionadas a temática: a) O ∞ é um símbolo ou é um número? O que é uma indeterminação?

Linha temática (5) – O símbolo lim: nesse eixo temático, sugerimos a discussão quanto à eliminação de quantificadores no desenvolvimento do conceito de limite e a necessidade da criação de um símbolo para a operação de limite. Questões de investigação relacionadas a temática: a) Por que foi necessária a criação do símbolo lim para a operação de limite?

Devemos ressaltar que não esperamos com as inferências propostas que o professor em sala de aula esgote todos os temas propostos, mas sim, que sejam discutidas a origem das dificuldades enfatizadas pelos próprios estudantes durante as aulas. Entendemos que os apontamentos dados possibilitam seguir as orientações de Sad (1998) considerado o ensino de limite a partir de "onde o aluno está", por via do diálogo dos estudantes entre os mesmos e com o professor, permitindo que as compreensões do aluno não se transformem em obstáculos para sua aprendizagem, mas sim, o propulsor para a construção de uma nova compreensão mais sólida mediada pelo professor.

Em termos de aprofundamento teórico, é pertinente aos professores que ministram a disciplina Cálculo I compreender a diferença ente o infinito potencial e atual e, até certo ponto, expressar essa diferença dentro dos eixos temáticos propostos para discussão com os estudantes, com o objetivo de minimizar os obstáculos que o uso potencialista do infinito causa no ensino do conceito de limite de função de uma variável.

4. Considerações

Neste trabalho evidenciamos um estudo descritivo com enfoque na exploração epistemológica das informações históricas do conceito de limite. Apresentamos os obstáculos epistemológicos presentes no processo de construção do conceito de limite de função listados por Cornu (1983), Sierpinska (1985) e Rezende (1994).

Observando os obstáculos evidenciados, propomos, paralelamente ao ensino tradicional de limite, que se faça um estudo histórico do desenvolvimento desse conceito e fizemos, assim, alguns apontamentos para o ensino de limite de função de uma variável através do entrelaçamento dos pressupostos da história e da didática da Matemática.

Concluímos que os estudo dos obstáculos epistemológicos presentes no desenvolvimento do conceito de limite é um dos caminhos para que o ensino e a aprendizagem deste conceito se tornem cada vez menos traumáticos em nosso alunado atual.

Reconhecendo as limitações do presente trabalho e refletindo sobre as questões aqui discutidas, sugerimos para futuras pesquisas: colocar em prática, com maior fundamentação teórica, os apontamentos oferecidos no último item de nossa análise quanto ao ensino de limite de função de uma variável; estender o estudo de identificação dos obstáculos epistemológicos aos demais conceitos do Cálculo (derivada e integral) assim como suas implicações didático-pedagógicas.

5. Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.7.2, 33-116, 1986.

CORNU, Bernard. *Apprentissage de la notion de limite:* conceptions et obstacles. Tese (Doutorado em Matemática). Universite Scientifique et Medicale de Grenoble. Grenoble, 1983.

REZENDE, Wanderley Moura. *Uma análise histórica-epistêmica da operação limite.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1994.

SAD, Lígia Arantes. Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese (Doutorado em Educação em Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SANTOS, Milena Gonçalves. *Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SIERPINSKA, Anka. Obstacles Épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.6.1, p.5-67, 1985.