

UMA ANÁLISE DE SITUAÇÕES DE CONGRUÊNCIA E DE NÃO CONGRUÊNCIA EM UMA ATIVIDADE DE REPRESENTAÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS

Renato Mendes Mineiro
PUC-SP
renatommineiro@gmail.com

Resumo:

Nesse artigo, além das conclusões globais de nossa pesquisa de mestrado, apresentaremos uma análise de atividades desenvolvidas como teste prévio, envolvendo conversões de representações de circunferências. A pesquisa, realizada em 2011, buscava verificar se uma sequência didática¹ mediada por um modelo tridimensional de representação poderia contribuir com a aprendizagem de conceitos relativos às superfícies quádricas. Considerando que um dos requisitos prévios era o conhecimento sobre circunferências, desenvolvemos e aplicamos um questionário com tarefas de conversão congruentes e não congruentes de representações. A análise dos protocolos, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1993), mostrou que a capacidade de coordenação de registros não pode ser avaliada exclusivamente por situações de congruência, mas principalmente por situações de não congruência, que apesar de não espontâneas, são inevitáveis e exigem do aluno a aplicação do conhecimento matemático em contextos diferentes daqueles em que se deu a aprendizagem.

Palavras-chave: Circunferências. Registros de Representação Semiótica. Tratamentos. Conversões.

1. Introdução

Por ocasião do curso de Licenciatura em Matemática desenvolvemos um modelo tridimensional para a representação de superfícies quádricas, composto pela sobreposição ordenada de transparências impressas com gráficos bidimensionais de circunferências, a exemplo de curvas de nível. Como as folhas são transparentes, é possível ver diferentes gráficos em duas dimensões simultaneamente. Tal efeito proporciona aos observadores a visão tridimensional das superfícies estudadas.

Após o término da graduação, esse modelo foi usado em nossa pesquisa de mestrado, auxiliando-nos na criação, aplicação e avaliação de uma sequência didática para o estudo de superfícies quádricas. Nosso objetivo, na ocasião, era verificar se uma tal sequência, mediada pelo modelo de representação tridimensional que criamos, poderia contribuir para a

¹ Sequência didática é um termo usado para definir um conjunto de atividades sequenciadas e inter-relacionadas que são propostas aos alunos com o objetivo de que desenvolvam aprendizagem sobre um conceito ou conteúdo específico.

aprendizagem de conceitos relativos a esses objetos, por meio da interação entre seus aspectos intuitivos, algorítmicos e formais, de acordo com as ideias de Fischbein (1993), além de verificar se atividades que contemplassem tratamentos e conversões de representações entre diferentes registros poderiam favorecer a *visualização*. Para Duval (1999) a *visão* é imediatamente acessível ao primeiro olhar, porém incapaz de desenvolver as funções cognitivas fundamentais, sendo a *visualização* a responsável pela organização das informações obtidas pela visão.

Participaram como sujeitos da pesquisa quatorze alunos do último ano de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade particular da cidade de São Paulo. Tendo em vista que a sequência didática envolvia representações tridimensionais feitas a partir de cortes planos paralelos aos planos ortogonais, e que em nosso caso esses cortes seriam representados por circunferências, consideramos a necessidade de avaliar quais eram os conhecimentos que os participantes tinham sobre esse assunto. Essa necessidade nos levou a considerar a aplicação de um questionário envolvendo representações de circunferências como tarefa prévia à sequência didática para o estudo das quádricas.

Nesse artigo apresentaremos, além das conclusões globais da pesquisa, uma análise das respostas dos sujeitos ao questionário, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993).

2. As superfícies quádricas

Uma superfície quádrica, ou simplesmente quádrica, é a representação gráfica dos pontos que satisfazem uma equação polinomial do segundo grau com três variáveis: x , y e z . A equação mais geral de uma quádrica pode ser escrita na forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, em que A , B , ..., J são constantes. Esferas, cilindros, elipsoides, paraboloides, hiperboloides e cones são exemplos mais comuns de superfícies quádricas.

A curva de intersecção entre uma superfície quádrica e um dos três planos coordenados (ou planos paralelos a esses) é uma cônica. Na Figura 1 - **Representação de uma esfera com corte plano** apresentamos a representação de uma esfera com um corte paralelo ao plano xz , obtida por meio do programa *Geogebra*. É possível observar na figura que a intersecção (em vermelho) é dada por uma circunferência.

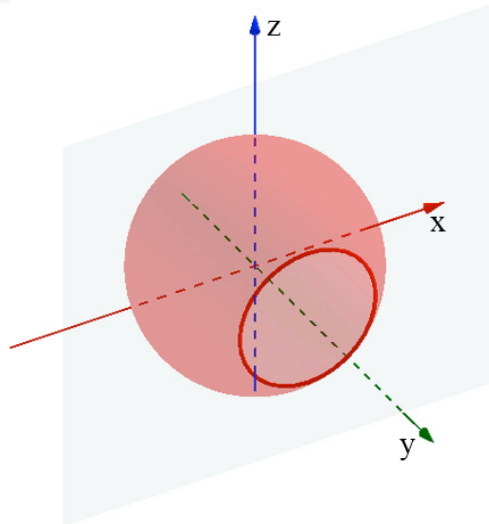


Figura 1 - Representação de uma esfera com corte plano

Uma das variáveis didáticas com a qual tivemos que nos preocupar relacionava-se com a decisão a respeito de quais seriam as seções cônicas utilizadas na sequência que desenvolveríamos. Após análises em que consideramos o tempo disponível para a realização das atividades, a quantidade de participantes, a diversidade de modelos que seriam necessários e a eventual necessidade de que os alunos dominassem os conceitos relativos às cônicas, optamos por utilizar exclusivamente as quádricas obtidas pela revolução em torno de um eixo, ou seja, aquelas que podem ser representadas pela sobreposição de circunferências.

Na Figura 2 - **Representação tridimensional de uma esfera** ilustramos a representação de uma dessas quádricas: uma esfera formada a partir da sobreposição de gráficos bidimensionais de circunferências.

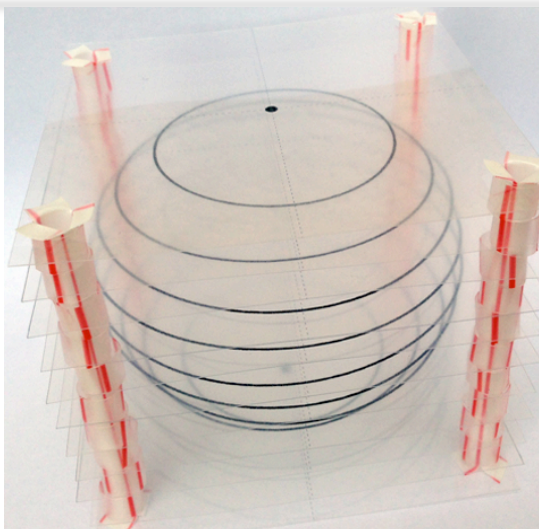


Figura 2 - Representação tridimensional de uma esfera

3. Um questionário sobre circunferências

Considerando que optamos por desenvolver uma sequência didática envolvendo as quádricas cujos cortes são representados por circunferências, precisávamos verificar como parte das análises prévias qual era o nível de familiaridade dos sujeitos com esses conceitos. Saberiam eles identificar a representação algébrica de uma circunferência a partir de sua representação gráfica e vice-versa? Conseguiriam, a partir da expressão algébrica, ou a partir da representação gráfica de uma circunferência, associá-la a sua descrição em língua natural?

A busca de respostas para essas questões nos levou a desenvolver um questionário, por nós denominado “Tarefas de Reconhecimento” aplicado duas semanas antes do início da sequência didática para o estudo de quádricas. O questionário constava de quatro partes. Na primeira parte apresentamos representações gráficas de circunferências e solicitamos aos sujeitos que apontassem quais eram as representações algébricas correspondentes. Na segunda parte apresentamos representações algébricas e solicitamos aos sujeitos que apontassem as representações gráficas correspondentes. Na terceira e quarta partes, apresentamos respectivamente representações gráficas e algébricas de circunferências, e solicitamos que apontassem qual era a definição correspondente em língua natural. A análise dos protocolos desse questionário nos ajudou a perceber qual era a compreensão que os sujeitos possuíam quanto aos conceitos envolvidos no estudo de circunferências, além de subsidiar-nos sobre como deveríamos desenvolver a atividade de institucionalização que antecedeu a sequência didática com os modelos de representação. É sobre essas análises que trataremos a seguir.

4. Análise dos protocolos

De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, representações semióticas caracterizam-se e diferenciam-se de outros tipos de representação principalmente pela dualidade das funções que executam. São capazes de trazer ao interlocutor tanto a forma (o significante) como o conteúdo (o significado). A forma refere-se ao sistema de representação (que pode se apresentar de modos diferentes para um mesmo objeto matemático) enquanto que o conteúdo refere-se ao objeto matemático em si (que pode ser representado de diferentes formas). Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais: a *formação* de uma representação identificável; o *tratamento*, que consiste na transformação da representação dentro do próprio registro onde ela foi originada; e a *conversão*, que consiste na transformação dessa em uma representação em outro registro, exterior ao registro original de origem.

De acordo com Duval (1993), o que garante a apreensão em matemática não é a quantidade de representações, mas a coordenação entre os vários registros de representação, por meio da *conversão*. Essa tarefa, além de não ser natural ou espontânea, costuma ser fonte de dificuldade para muitos alunos, como se a compreensão que eles têm de um objeto matemático estivesse limitada à forma de representação adotada. Alguns simplesmente não reconhecem o mesmo objeto após a mudança de registro.

Duval (1993) afirma que as conversões podem ser congruentes ou não congruentes. São chamadas conversões congruentes aquelas em que são atendidos os três seguintes critérios: 1) existe correspondência semântica (os símbolos têm o mesmo significado) entre as unidades significantes do registro de origem e o de destino, 2) existe a mesma ordem de apreensão das unidades significantes nas duas representações e 3) existe a univocidade semântica (cada unidade significativa do registro de origem corresponde a uma só unidade significativa no registro de destino, e vice-versa). Conversões não congruentes são aquelas que deixam de atender a pelo menos um dos critérios. O nível dos casos de não congruência pode ser classificado como maior ou menor, dependendo da quantidade de critérios que são ou não atendidos. Uma conversão de não congruência máxima é aquela em que nenhum dos três critérios é atendido.

Todas as tarefas apresentadas no questionário envolviam conversões de representações de registros. Nesse texto apresentaremos três dentre as treze que foram propostas, além da respectiva análise.

A primeira tarefa consistia em associar a representação gráfica dada na Figura 3 à sua correspondente descrição em língua natural. Todos os 14 participantes fizeram a associação de forma correta.

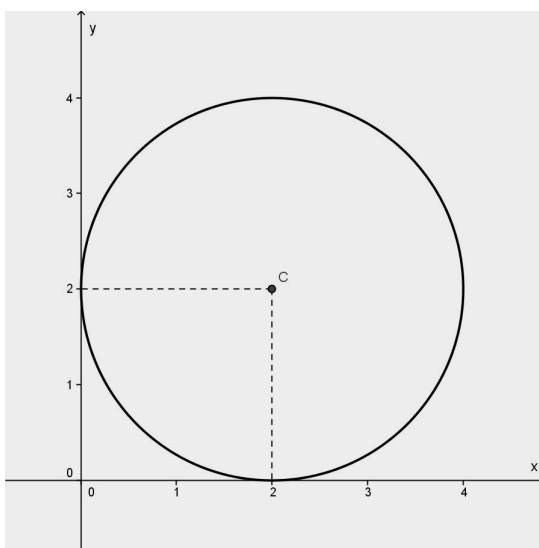


Figura 3 - Circunferência com centro em (2,2) e raio de comprimento 2

A análise dessa tarefa, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, implica discriminar as unidades significativas (cada componente unitária do conjunto de informações disponíveis que temos sobre o registro) na origem e no destino, e observar a correspondência que eventualmente se estabelece entre elas. No registro de origem, que nesse caso é o registro gráfico, podemos identificar a forma da figura, a indicação do centro, os segmentos pontilhados que indicam a distância do centro em relação aos eixos das abscissas e das ordenadas e a posição da figura, tangente aos eixos. No registro de destino, temos a descrição em língua natural por meio de palavras que descrevem a forma da figura, sua localização e sua dimensão. No **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresentamos a correspondência entre essas unidades. Verifica-se, particularmente nesse caso, que são atendidos todos os três critérios que caracterizam as conversões congruentes.

Quadro 1 - Correspondência entre unidades significantes no registro de origem e no registro de destino

Registro de origem (gráfico)	Registro de destino (língua natural)
Desenho da circunferência (a forma).	Descrição da figura como “circunferência”.
Desenho do ponto C indicando o centro, ligado por segmentos pontilhados, respectivamente à abscissa e à ordenada, ambas de valor igual a 2.	Descrição “com centro em (2,2)”.
A medida do comprimento de qualquer um dos dois segmentos pontilhados é de 2 unidades.	Descrição “raio de comprimento 2”.

A segunda tarefa era similar à primeira, a não ser pela mudança da representação gráfica, ilustrada na Figura 4. Nessa questão, 5 dos sujeitos que haviam realizado a tarefa anterior com sucesso, falharam quanto à identificação do comprimento do raio da circunferência.

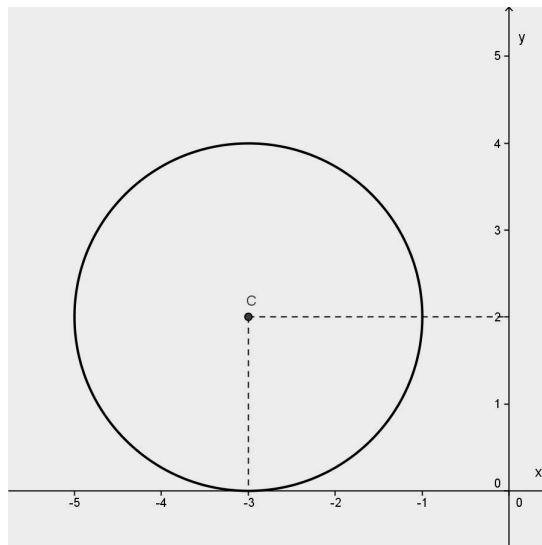


Figura 4 - Circunferência com centro em (-3,2) e raio de comprimento 2

Ao analisar essa tarefa podemos observar que alguns dos critérios de congruência são observados, mas não todos. Os segmentos que ligam o ponto central da circunferência aos eixos coordenados têm comprimentos vertical de duas unidades e horizontal de três unidades. Em outras palavras, não há correspondência semântica entre um desses comprimentos (3 unidades) e o comprimento do raio (2 unidades), como há na figura anterior. Esse pode ter

sido o motivo pelo qual os sujeitos que não tiveram êxito nessa tarefa responderam que o comprimento do raio era de três unidades.

Na terceira tarefa que analisaremos, apresentamos a equação $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ e pedimos aos sujeitos que associassem-na à representação gráfica correspondente. Apenas 6 dos 14 participantes fizeram a associação correta. Os demais, ou indicaram o comprimento do raio igual a nove unidades, ou indicaram as coordenadas do centro como $(3, 2)$ ou ambas as coisas. O Quadro 2 aponta a correspondência entre as unidades significantes no registro de origem e de destino. É possível observar que não há, nesse caso, correspondência semântica entre essas unidades, ou seja, as unidades significantes no registro de origem significam coisas diferentes no registro de destino. Embora alguns critérios de congruência sejam atendidos (a ordem de apreensão e a univocidade semântica), podemos classificar a conversão como não congruente.

Quadro 2 - Comparação entre as unidades significantes nos registros de origem e de destino

Registro de origem (algébrico)	Registro de destino (gráfico)
Número 3, do lado esquerdo da equação.	A abscissa do centro é igual à -3 (oposto ao que aparece no registro de origem).
Número 2 acompanhado do sinal negativo (-), do lado esquerdo da equação.	A ordenada do centro é igual à 2 (oposto ao que aparece no registro de origem).
Número 9, do lado direito da equação.	O comprimento do raio é igual à 3.

Nas demais atividades propostas, observou-se que a taxa de sucesso manteve essa regularidade, ou seja, quanto maior o nível de não congruência, menor a quantidade de acertos. Analogamente, quanto mais congruentes eram as conversões de representação entre diferentes registros, maior o número de acertos.

5. Conclusão

A análise da sequência didática em que utilizamos o modelo de representação tridimensional mostrou que, para a maioria dos alunos, os aspectos intuitivos, frutos de aprendizagens anteriores fortemente enraizadas, sobrepuseram-se aos aspectos formais dos objetos estudados, limitando suas aprendizagens. Apesar disso, também pudemos observar que, para alguns alunos, as atividades despertaram a necessidade de que avançassem além da simples visão do objeto, levando-os a buscar informações adicionais presentes nas

representações. Para esses alunos, o modelo de representação foi capaz de contribuir em seu processo de aprendizagem das superfícies quádricas, ao trazer cortes imperceptíveis à primeira visão que vão além da representação icônica da figura (MINEIRO, 2011).

No presente texto, entretanto, procuramos ir além das respostas obtidas em 2011, concentrando-nos mais especificamente na análise do questionário sobre as circunferências. A partir dessa abordagem, verificamos que os problemas e situações propostas em sala de aula são mais rápida e eficientemente resolvidos nos casos que apresentam conversões congruentes, ao passo que os casos de não congruência máxima (quando nenhum dos critérios de congruência é atendido) são os que correspondem às menores taxas de sucesso observadas.

Isso parece levar os professores a evitar atividades que impliquem situações de não congruência, como se de alguma forma o fato de propor apenas conversões congruentes fosse suficiente para garantir a aprendizagem. O que ocorre, no entanto, é que situações de não congruência são praticamente impossíveis de serem evitadas, principalmente quando o conhecimento matemático é necessário em um contexto diferente daquele em que se deu a aprendizagem.

Temos observado em nossa prática docente como que uma aversão por parte de alguns alunos quanto às tarefas que envolvam conversões não congruentes de representações. A nosso ver a fuga dessas situações é compreensível, principalmente quando nos deparamos com os baixos índices de sucesso nessas atividades, conforme apontamos nesse artigo, conforme aponta Duval (2009) e conforme têm apontado outros estudiosos em pesquisas sobre esse tema, como Damm (2003).

Para Duval (1993), com quem concordamos, “toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis”, o que significa dizer que aqueles conhecimentos que não são mobilizados em contextos diferentes do qual se deu aprendizagem, cedo ou tarde são esquecidos. É em defesa dessa mobilização que nos colocamos, esperando ter contribuído para a compreensão de que a conversão de representações não congruentes, embora não seja natural, automática ou espontânea, é inevitável se se pretende que os alunos possam desenvolver aprendizagem em matemática.

6. Referências

DAMM, R. F. Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2003. p.35-48.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I)**. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: PME-NA, 21,1999, Cuernavaca. **Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education**. Cuernavaca, Mexico. PME-NA, 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. p. 37- 64

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In. BIEHLER, R. et al. (Org.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publisher, 1993. p. 231-245.

MINEIRO, R.M. **Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional**. 2011. 174p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNIBAN, São Paulo, 2011.