A FRAÇÃO REPRESENTADA COMO MEDIDA DE COMPRIMENTO DE RETA

Lucas dos Santos Araujo
Universidade do Estado do Para - UEPA
lucas.sa15@gmail.com

Resumo:
Este trabalho apresenta um recorte do meu trabalho de conclusão de curso, resultado de uma pesquisa bibliográfica, buscando encontrar possibilidades de melhor compreensão acerca do tema fração, com o objetivo de mostrar como a fração pode ser representada como medida de comprimento de reta. Desta forma, busco mostrar algumas dificuldades quanto ao ensino de fração e como o seu significado tem variações, bem como a sua representação, dando ênfase em como fazer a representação de fração como medida de comprimento, buscando dar apoio para que o aluno possa vencer suas dificuldades na passagem do campo aritmético para o campo algébrico, fazendo que o ensino de fração possa ser mais eficiente e natural, pois ao inserir uma fração na reta numérica, o aluno poderá visualizar melhor a fração como um número qualquer, o que pode ser fundamental para o ensino de frações, assim como a equivalência de frações.
Palavras-chave: Matemática; Ensino de Fração; Representação de fração como medida de comprimento de reta.

1. Introdução

O presente artigo é um recorte do meu trabalho de conclusão de curso, resultado de pesquisas bibliográficas realizada com o objetivo de analisar a representação do número fracionário, através de revisões de literaturas, que teve por fim propor um referencial teórico-analítico para o ensino de fração como medida de comprimento de reta. Tomei como base os trabalhos do matemático americano Hung-Hsi Wu (2009 e 2012, apud REVISTA CALCULO, 2012, p. 13-15) e Sant' Anna (2008).

As frações constituem um dos mais importantes e mais desafiadores tópicos do currículo de Matemática. Visto que ele dá inicio ao ensino de funções e álgebra. Além disso, seu ensino vem envolvendo, há muitas décadas, educadores e pesquisadores do mundo todo no sentido de obter resultados concretos junto aos estudantes.

Geralmente a concepção de fração pode estar ligada à ideia de dividirmos uma unidade (partes iguais) em subunidades e conferirmos quantas dessas partes caberão naquilo que se quer medir. Com relação à história da matemática, podemos destacar que este significado de fração é bastante representativo para a justificativa do desenvolvimento histórico dos números fracionários e pode ser explorado inicialmente de modo informal com os alunos, na introdução ao estudo de frações, e depois ser formalizado. Neste sentido Silva (2005), propala que as tarefas que envolvem a medição de comprimento são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, com resultados de medições, e da necessidade de "novos números" para a quantificação adequada de comprimento. Em sua tese de doutorado, Silva (2005), aborda o significado de fração como medida nos mostrando algumas tarefas que, segundo a autora, são necessárias para introduzir os conceitos referentes ao número fracionário e suas propriedades, o que segundo ela: "(...) auxiliará, mais tarde, na concepção do conjunto dos números racionais" (Silva, 2005, p. 120). Assim, precisamos mostrar como se dar o significado de fração.

2. O significado de fração

É comum aprendermos nas escolas que um número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $(a, b \in \mathbb{N} \; e \; b \neq 0)$, onde *a* é denominado numerador e *b* denominador, e esse número é mais conhecido como fração, possuindo variações de significados e aplicações muito importantes.

Evidentemente, esta definição não é suficiente porque não se define antes o que é uma fração. A simbologia $\frac{a}{b}$ pode significar, por exemplo, que repartimos um todo – contínuo ou discreto – em *b* partes iguais das quais tomamos *a* partes. Essa mesma simbologia pode significar também o resultado da divisão do número natural *a* pelo número natural não nulo *b* – *a,* como laranjas divididas para *b* crianças, desta forma, estabelecendo outro significado para frações. Isto é, seria o resultado da divisão do numerador pelo denominador, ou seja, o quociente da divisão entre dois naturais.

Ainda é possível representar analogias entre duas grandezas, de mesma espécie ou não, desta forma, atribuímos ao termo fração à ideia de razão entre duas grandezas. Tal conhecimento matemático é de extrema importância para o estudo das proporções, diretas ou inversas, presentes em diversas situações de nosso cotidiano nos problemas em que envolvem regra de três. No campo da Física, por exemplo, pode ser utilizada ao estudarmos os conceitos de velocidade e aceleração de um móvel, na Química ao estudarmos cálculo estequiométrico, cinética química, dentre outras coisas.

Uma vez que, neste contexto matemático estão inseridos outros significados, tais como: parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo. Além disso, as

ISSN 2178-034X

diferentes representatividades dos termos razão, proporção, fração, e números decimais confundem-se constantemente nas abordagens destes temas nas variadas situações cotidianas.

Assim, acrescento a concepção do educador matemático Wu, sobre a representação de fração como medida de comprimento, pois é muito pouco explorada. Segundo Wu (2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), a criança desde cedo deve desenhar a linha dos números e deve redesenha-lá sempre que descobrir um número "novo". Como por exemplo $\sqrt{2}$. Desta forma, a criança vai se acostumando com a ideia de que todos os números têm seu lugar, e de que não há números normais, como 5, e números esquisitos como $\frac{1}{5}$. Desta forma, o objetivo geral deste trabalho é mostrar como representar uma fração como medida de comprimento de reta.

3. A representação de fração como medida de comprimento de reta

Neste artigo analisarei os trabalhos do educador matemático americano Hung-Hsi Wu (2009 e 2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), que propõe o ensino de fração como medida de comprimento de reta. Como também, utilizarei o trabalho de Sant' Anna (2008), na qual ela se baseia fortemente nos trabalhos deste renomado matemático, visto que a ideia central de sua tese foi trabalhar o conceito de fração, identificando a fração como número, representando na reta numérica.

Conforme as pesquisas de Sant'Anna (2008) e Silva (2005), verificou-se que os alunos apresentam enorme dificuldade durante o processo de aprendizagem dos números racionais. Neste sentido, em sua tese de doutorado, a pesquisadora Sant'Anna (2008) nos diz que: "não têm faltado tentativas da comunidade de educação matemática para melhorar o ensino de frações" (p.25), ela procurou oferecer indícios ou pistas de tal forma que, por meio de uma nova abordagem do ensino de frações, que toma como referência a reta numérica, o aluno possa vencer suas dificuldades na passagem do campo aritmético para o campo algébrico.

Citando o educador matemático Hung-Hsi Wu (no qual chamarei durante o texto muitas vezes somente como Wu) como sua principal fundamentação teórica, Sant'Anna (2008) coloca que esse pesquisador propôs trabalhar a representação de fração como medida de segmento de reta, bem como identificar fração como um número e fazer sua representação na reta numérica. Sant'Anna (2008) nos propala que, para Wu existem dois gargalos na educação matemática no Ensino Fundamental: o ensino de frações e a introdução à álgebra.

Wu (*apud* Sant'Anna, 2008, p. 25-26) aponta, áreas problemáticas tanto na teoria como na prática do ensino de frações, que podem ser descritas como:

(1) O conceito de fração nunca é definido claramente e sua afinidade com os números inteiros não é enfatizada suficientemente.

(2) As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico.

(3) As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade.

(4) Em geral, explicações matemáticas de quase todos os aspectos essenciais do conceito de fração ficam faltando.

Sant'Anna (2008) descreve brevemente as áreas problemáticas tanto na teoria como na prática do ensino de frações apontados por Wu, das quais destacamos duas: a primeira é o fato do conceito de fração nunca ser definido claramente e sua afinidade com os números inteiros não é enfatizada suficientemente; e a segunda é que, em geral, explicações matemáticas de quase todos os aspectos essenciais do conceito de fração ficam faltando.

Sant'Anna (2008) enfatiza o fato de Wu ser favorável à introdução da álgebra mais cedo aos alunos, visto que, ao ser introduzido no campo algébrico, por meio do ensino de frações no 7º ano, o aluno consiga abstrair-se a ponto de conseguir superar as dificuldades que, de um modo geral, atingem os alunos nessa etapa do processo de aprendizagem. Assim, Sant'Anna também concorda que a capacidade de se abstrair deve ser desenvolvida tão cedo quanto possível ao longo do currículo escolar, ressaltando que o ensino de frações constitui oportunidade especialmente adequada para esse fim e ainda vai além, acrescentando que esse fator dá ao aluno uma vantagem na etapa correspondente à introdução à álgebra.

Ainda em relação à álgebra e os números inteiros, segundo Wu (2005, *apud* Sant'Anna, 2008, p. 40):

> Enquanto a intuição sobre números inteiros pode ser baseada na contagem dos dedos, a aprendizagem de frações exige antes de tudo uma substituição mental para seus dedos. Precisamos de modo claro dizer o que é uma fração. Uma fração tem que ser um número, e, portanto a definição de uma fração como "parte-de-um-todo" não serve. O aluno precisa ver que as frações são a extensão natural dos números inteiros, de maneira que as operações aritméticas +, -, x, e ÷ de números inteiros podem ser estendidas de maneira natural para as frações.
>
> (WU, 2005, *apud*, SANT'ANNA, 2008, p. 39-40)

Wu (2005, *apud* Sant'Anna, 2008, p. 40) sustenta que definir uma fração (ou qualquer número racional) como um ponto de reta numérica através do processo de partição serve admiravelmente para efetuar esta transição, como por exemplo, ao dividir ao meio a metade de um segmento de reta, é fácil perceber que a metade de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. Sant'Anna (2008) ressalta que o objetivo a ser atingido no ensino de fração consiste em capacitar os alunos para realizar as quatro operações de fração com facilidade que em habilitá-los a usar estas operações para resolver problemas.

Acredito que as colocações de Sant'Anna (2008), com base nos trabalhos de Wu, se refiram a estudantes do segundo segmento do Ensino fundamental, pois sugere a utilização da reta numérica como referência para a abordagem do ensino de fração, o que não deixa de ser uma abordagem abstrata. Além disso, também acredito que as áreas problemáticas indicadas por Wu são algumas das inúmeras razões que podem esclarecer o porquê da grande maioria dos alunos que chegam ao Ensino Médio não possuir as noções básicas a respeito dos vários significados do número fracionário, mal conseguindo conceituá-los como números.

Visto a importância e as razões favoráveis do ensino de fração como medida de comprimento, agora vamos mostrar a definição de Wu (2009) para uma fração como medida de comprimento de reta.

4. Definição de WU sobre fração como medida de comprimento

Wu (2009) define fração como medida de comprimento de reta como um aperfeiçoamento do conceito usual de uma fração como uma "parte de um todo". Ele começa a explicação dessa definição da seguinte maneira: ele pede para começar com uma linha, que é geralmente tomada como uma horizontal, e fixar dois pontos sobre ela. O ponto da esquerda deve ser denotado como 0 e o direita como 1, assim, a discussão feita por ele vai se concentrar inteiramente na metade da linha à direita do 0, ou seja, os números negativos não serão usados. Agora, devemos avançar para a direita, a partir do 0, marcando pontos sucessivos distantes entre si, assim como 1 é distante de 0 (como uma régua). Identifique esses pontos por todos os números 0, 1, 2, 3, etc., conforme na figura abaixo.

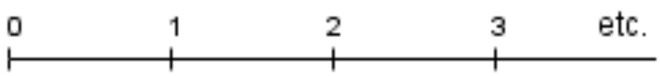

Figura 1 – Reta numérica.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo a sua explicação, Wu (2009) começa uma discussão informal, levantando a hipótese de que, se adotarmos a abordagem usual para frações, o "todo" seria tomado como segmento de 0 a 1, chamado de segmento unidade, a ser denotado por [0,1]. O número 1 é chamado de unidade. Em seguida, uma fração, como $\frac{1}{3}$ seria de comum acordo, uma parte quando todo o [0,1] é dividido em três partes iguais. Mas se tentarmos avançar com a matemática, imediatamente nós teremos problemas. Porque uma fração é um número e não uma forma ou uma figura geométrica. O segmento unidade [0,1], por conseguinte, não pode ser o todo. A linguagem de "partes iguais" também é problemática, porque em qualquer outra coisa senão segmentos de reta geralmente não é claro o que "partes iguais" significam. Por exemplo, se o todo é um pernil, fazer "partes iguais" significa peças com pesos iguais, comprimentos iguais, quantidades iguais de carne, quantidades iguais de ossos, etc. Assim, Wu se ver forçado a introduzir uma maior precisão em sua discussão, a fim de evitar mal-entendidos. O que deveria se especificar, em vez disso, é que o conjunto é o comprimento do segmento unidade [0,1], em vez do próprio segmento.

Quando dizemos [0,1] é dividido em "partes iguais" o que devemos dizer é que [0,1] é dividido em segmentos de comprimentos iguais. A fração de $\frac{1}{3}$, portanto, seria o comprimento de todo o segmento, de modo que três segmentos com o mesmo comprimento, quando colocados juntos, formam um segmento de comprimento 1. Uma vez que todos os segmentos entre os números inteiros consecutivos têm um comprimento, quando do mesmo modo que dividem cada um dos segmentos entre os números inteiros consecutivos em três segmentos de comprimento igual, o comprimento de cada um desses segmentos curtos é também de $\frac{1}{3}$. Em particular, cada um dos seguintes segmentos engrossados na imagem abaixo tem um comprimento de $\frac{1}{3}$ e, portanto, é uma representação legítima de $\frac{1}{3}$.

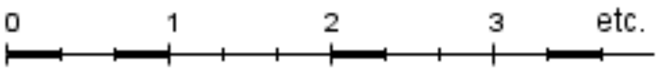

Figura 21 – Reta numérica dividida em três partes iguais.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, devemos nos concentrar no segmento engrossado na extrema esquerda, próximo ao 0. A distância de seu ponto final desde 0 é naturalmente $\frac{1}{3}$. Uma vez que o valor de cada número inteiro na linha número revela a sua distância de 0 (por exemplo, a distância do ponto rotulado 3 é exatamente 3 de 0), a lógica exige rotular o ponto final direito desse segmento pela fração $\frac{1}{3}$, e chamamos este segmento de "representação padrão" de $\frac{1}{3}$. Nós também denotamos este segmento engrossado por [0, $\frac{1}{3}$], porque a notação exibe claramente o ponto final esquerdo como 0 e o ponto de extremidade direita como $\frac{1}{3}$. Para resumir, descrevemos como a noção ingênua de $\frac{1}{3}$ como "uma parte quando o todo é dividido em 3 partes iguais" pode ser refinado por etapas sucessivas e transformado em um ponto da reta numérica, como mostrado abaixo.

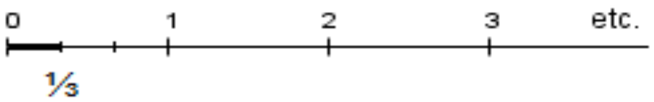

Figura 2 – Representação de $\frac{1}{3}$ na reta numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em um ambiente matemático formal, agora usamos este ponto específico como representante oficial de $\frac{1}{3}$. Em outras palavras, qualquer que seja a expressão matemática que queremos fazer sobre o valor correspondente a $\frac{1}{3}$, isso deve ser feito em termos deste ponto. Este acordo reforça a uniformidade de linguagem e dá clareza a qualquer discussão matemática referente à $\frac{1}{3}$. Ao mesmo tempo, a discussão anterior também dá a confiança de que podemos relacionar este ponto na reta numérica para nossa experiência diária com $\frac{1}{3}$, devendo surgir essa necessidade.

O que se têm feito para a representação de $\frac{1}{3}$ pode ser feito a qualquer fração com um denominador igual a 3, por exemplo, a representação padrão de $\frac{2}{3}$ seria o ponto marcado na direita de $\frac{1}{3}$, e que $\frac{3}{3}$ seria o próprio 1. De um modo geral, identificamos qualquer $\frac{m}{3}$ para qualquer número inteiro m com a sua representação padrão, e para permitir que 0 seja escrito como $\frac{0}{3}$. Aqui, então, são as primeiras frações com denominadores iguais a 3.

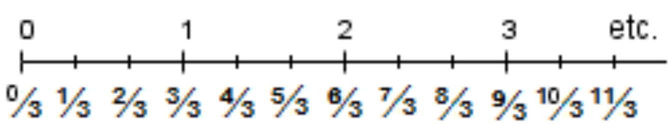

Figura 43 - Primeiras frações com denominadores iguais a três na reta numérica.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Note-se que é fácil para descrever cada uma destas frações. Por exemplo, $\frac{7}{3}$ é o 7º ponto de divisão, quando a reta numérica é dividida em três partes (em linguagem auto-explicativa). Equivalentemente, podemos também dizer que $\frac{7}{3}$ é o 7º múltiplo de $\frac{1}{3}$ (mais uma vez, em linguagem auto-explicativa).

O que temos de frações com denominadores iguais a 3 pode ser feito a qualquer fração. Desta forma, podemos transformar o conceito ingênuo de uma fração como parte de um todo para o conceito claramente definido de uma fração como um ponto na reta numérica.

Partindo destes princípios de definição de fração como medida de comprimento da reta numérica, Wu (2009) já nos confirmava que há muitas vantagens indispensáveis dessa transformação, mas que há três que devem ser levados para fora imediatamente:

> Na reta numérica, todos os pontos estão em pé de igualdade, de modo que, como mostrando na imagem anterior, por exemplo, não há diferença conceitual entre ${}^{2}/_{3}$ e ${}^{11}/_{3}$, pois ambos os números são igualmente de fácil acesso. A essência desta mensagem é que, quando uma fração é claramente definida como um ponto da reta numérica, a diferença conceitual entre as chamadas frações próprias e impróprias desaparece completamente.
>
> (WU, 2009)

Assim, a primeira grande vantagem de compreender frações como um ponto na reta numérica é que todas as frações são criadas iguais. Agora podemos discutir todas as frações de uma só vez com facilidade, se adequado ou inadequado. Nesta pequena maneira, o conceito de fração começa a simplificar, e aprender sobre fração fica mais fácil.

A segunda principal vantagem é que tal conceito de frações é inerentemente flexível. Uma vez que nós especificarmos o que a unidade 1 representa, todas as frações podem ser interpretadas em termos da unidade. Exemplificando, conforme Wu (2009):

> Agora estamos prontos para que o pernil citado no início do texto. Se deixarmos que um suporte para o peso do pernil, em seguida, ${}^{1}/_{3}$ representaria uma peça do pernil que é um terço de todo o pernil em peso. Se, por outro lado, deixar um suporte para o volume do presunto, em seguida, a mesma fração irá agora ser uma peça do pernil que é um terço de todo o presunto em volume, por exemplo, em centímetros cúbicos.
>
> (WU, 2009)

Isso nos leva a terceira grande vantagem: o aumento da flexibilidade exige um aumento na precisão. Assim, se vão às referências à solta de "partes iguais".

5. Operações com frações segundo Wu

Segundo Wu (2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), quase todos os problemas com frações surgem porque o docente não persiste em duas ideias fundamentais para o ensino de frações: a de equivalência de frações e a de que uma fração é um número como outro qualquer, que pode e deve ser anotado na reta dos números.

A ideia de fração equivalente é simples: ao multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número (a seguir, esse número é w), obteremos uma fração equivalente à primeira fração, pois as duas, feitas as contas com a calculadora, resultam no mesmo quociente.

$$\frac{a}{b} = \frac{w \times a}{w \times b}$$

Segundo Wu (2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), depois que a criança assimila essa ideia, o autor lhe pede que marque o lugar das frações na linha dos números. Para marcar $\frac{1}{3}$, por exemplo, a criança simplesmente divide a unidade em três partes iguais, e marca a primeira parte, bem junto ao 0, como $\frac{1}{3}$, e a partir daí $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ (que coincide com 1), $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{3}$(que coincide com 2), e assim por diante para várias frações, conforme já fora mostrado anteriormente na definição de fração com medida de comprimento de reta.

Feito isso, Wu (2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 15), faz o seguinte questionamento, que deve ser feito aos alunos: como somar $\frac{3}{2}$ com $\frac{4}{3}$?

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$$

Figura 54 – Adição de Frações na Reta.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com as frações na linha dos números, os alunos percebem que somar frações é igual a somar outros números. Isto é, ela deve somar o comprimento de 0 até $\frac{3}{2}$ com o comprimento de 0 até $\frac{4}{3}$, do mesmo maneira que usa ela para somar 5 com 3, somando do comprimento de 0 até 5 com o comprimento de 0 até 3. E como fazer isso? É neste momento que segundo wu (2012, *apud.,*Revista Cálculo), a criança recorres à ideia de fração equivalente para deixar as duas frações com o mesmo denominador, e facilitar as contas. Depois de pensar e de conversar com os colegas, a criança multiplica a primeira fração por *k=3* e a segunda fração por *k=2*:

$$\frac{3\times 3}{2\times 3}+\frac{4\times 2}{3\times 2}=\frac{9}{6}+\frac{8}{6}=\frac{17}{6}=2+\frac{5}{6}$$

“Olhando a linha dos números”, diz Wu (2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), a operação acima fica simples. O segmento de $\frac{3}{2}$ de comprimento é a concatenação de 9 segmentos de $\frac{1}{6}$ de comprimento, e o segmento $\frac{4}{3}$ é a concatenação de 8 segmentos de $\frac{1}{6}$, e tudo isso vai dar um segmento de $\frac{17}{6}$ é a mesma coisa que dois segmentos inteiros, mais 5 segmentos de $\frac{1}{6}$.

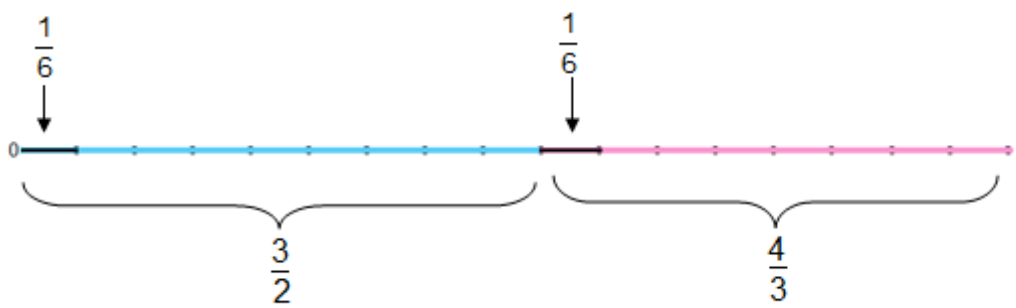

Figura 6 – Adição de Fração (concatenação de segmentos).
Fonte: Elaborada pelo autor.

“Desse jeito, o aluno passa a ver as frações como uma extensão natural dos números inteiros, e não como uma coisa extra e confusa” (Wu, 2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15).

6. Considerações Finais

Devido à necessidade e importância do ensino de frações, durante este trabalho foi mostrado o significado do número fracionário com o intuito de evidenciar quais significados e representações de frações existem e são usados.

Acredito que o grande gerador das dificuldades de aprendizagem de frações está nas formas de aplicações diferenciadas da mesma, ou seja, na variedade de ideias, conceitos ou significados que podem ser representados por frações. Assim, esses diversos significados de fração geralmente não ficam totalmente claro para o aluno, fato que gera as dúvidas e dificuldades para os alunos.

Desta forma, acredito que ao dar ênfase aos estudos de Wu (2009 e 2012, *apud* REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15), sobre representação de fração como medida de comprimento de reta, o ensino de fração se dar de forma mais eficiente e natural, fazendo com que o aluno reconheça o que está fazendo, não apenas repetindo o que o professor já fez, visto que, ao inserir uma fração na reta numérica, o aluno consegue visualizar melhor a fração como um número qualquer, fato que Wu define como fundamental para o ensino de frações, assim como a equivalência de frações.

7. Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu amigo José Wilkyson, pela sua paciência, esforço, compreensão, dedicação e apoio que ele compartilhou comigo durante o desenvolvimento deste trabalho, ao Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral, meu orientador, pela incomensurável compreensão e dedicação na orientação deste trabalho e pela presença na minha vida acadêmica desde o início até o fim, sempre contribuindo com seu conhecimento de forma maestral e, por fim, a Universidade do Estado do Pará – UEPA, por me garantir ensino gratuito e de qualidade.

8. Referências

A muito complicada matemática elementar. *Revista Cálculo*. Ed. especial 1, ano 2. São Paulo: Editora Segmento, 2012, p. 13-15

SANT'ANNA, N. F. P. *Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra*. 2008. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ, Brasil.

SILVA, M. J. F. *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* Tese de Doutorado – PUC, São Paulo, 2005. 302f.

WU, H. *What's sophisticated about elementary mathematics?* American Educator, Vol. 33, Número 3, p. 4–14. 2009. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/wu2009.pdf>. Acesso em 11 de mar. 2015.