ATIVIDADES COM RÉGUA NÃO GRADUADA E COMPASSO. QUADRATURAS, ARQUIMEDES E O NÚMERO PI.

Adilson Pedro Roveran
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
E. E. Elvira de Pardo Mêo Muraro
aproveran@yahoo.it

Resumo:
Este trabalho foi desenvolvido junto aos estudantes dos oitavos anos da E. E. Elvira de Pardo Mêo Muraro em Campinas/SP entre os anos de 2013 e 2015, tendo como enfoque a História da Matemática no Ensino de Matemática. Trata-se de um conjunto de atividades que, com o uso de régua não graduada e compasso explorando desde operações com segmentos até a quadratura de uma lúnula de Hipócrates de Chios, tem como objetivo, ao apresentar a evolução e as dificuldades pelas quais passaram os gregos na Antiguidade, reforçar a reflexão sobre essas técnicas e propiciar discussão e a apropriação dos conceitos envolvidos de forma contextualizada, conforme FAUVEL e também exposto no artigo de SWETZ (1984). A experiência logrou sucesso entre a maioria dos alunos envolvidos e proporcionou uma forma diferente de abordar o assunto, contando com a participação efetiva de cada estudante.
Palavras-chave: Atividades de ensino, Construções Geométricas, História da Matemática no ensino.

1. Introdução

O relato da experiência aqui apresentado refere-se a um conjunto de atividades de complexidade crescente com o objetivo de possibilitar aos estudantes a construção do pensamento dedutivo com o uso dos instrumentos clássicos de construções geométricas. As experiências foram idealizadas para a dissertação de mestrado profissional (PROFMAT), na Unicamp (ROVERAN) e com base no uso da História da Matemática no Ensino de Matemática (HMEM), de acordo com CORRÊA (2008).

Segundo Fauvel (1997, p. 17):

> Algumas razões que têm sido apresentadas para defender o uso da História da Matemática:
> ...
> - Mostrar aos alunos como os conceitos sse desenvolveram ajuda-os na sua compreensão
> ...
> - Comparar o antigo e o moderno valoriza as técnicas modernas
> ...
> - Os alunos sentem-se melhor ao perceberem que não são os únicos a terem dificuldades
> - Encoraja os bons alunos a irem mais longe
> ...

-
Torna a Matemática menos assustadora
- Fornece a oportunidade de realização de trabalhos intercurriculares com outros professores ou disciplinas.

Apesar da precariedade de recursos disponíveis na rede pública estadual, foi possível conseguir, junto a APM da escola, um *kit* de compassos para que cada aluno pudesse manipular seu próprio instrumento. As cópias xerográficas, no entanto, foram disponibilizadas com recursos próprios do professor.

2. Atividades de construção com régua e compasso

As preliminares do projeto situaram-se na manipulação da régua não graduada – no caso, uma régua comum de 30 centímetros, porém com a recomendação de não se considerar a escala gravada – e do compasso (que foi apresentado com um compasso de lousa comum, retirando-se a porca da articulação, para que se pudesse mostrar o funcionamento do compasso grego). Os estudantes utilizaram o compasso moderno.

As atividades iniciais trataram de transporte de segmentos com régua e compasso (a partir desse ponto, cada desenho será considerado com o uso de régua não graduada e compasso):

- Adição e subtração de segmentos, momento em que se mostrou mais necessário o acompanhamento nas carteiras, dada a dificuldade de manusei0o do compasso;

- multiplicação de segmentos por um número inteiro;

- divisão de segmentos por inteiros, a bissecção de segmentos, associada ao traçado da mediatriz não trouxeram maiores cuidados, porém é necessário mais atenção à trissecção de segmentos por envolver o traçado de paralelas. As atividades complementam-se (perpendiculares e paralelas) em diversas outras e de forma cíclica. Esse *ir e vir* das atividades propiciou aos estudantes um tempo para reflexão e apropriação dos conceitos;

- construção de circunferências, muito além do simples traçado de *bolinhas* (na linguagem dos estudantes serve para rever conceitos e fundamentar as propriedades das circunferências;

- construção de retas paralelas e perpendiculares;

- traçado de mediatrizes.

Tais atividades envolveram contato com a manipulação e as enormes dificuldades que os estudantes apresentam, exigindo do professor um constante circular entre as carteiras. Uma vez orientados, sempre há uma quantidade de estudantes que têm mais facilidade no manuseio e são aproveitados como monitores dos demais.

A primeira atividade, propriamente dita, foi a construção de um triângulo, dados três segmentos. A exposição foi feita na lousa, seguindo o roteiro disponibilizado na folha de atividade. Duas atividades adicionais, contidas na folha, exploraram a construção de um triângulo isósceles e dados três segmentos, uma construção em que os estudantes deduzem a desigualdade triangular na prática, ao não conseguir construir o triângulo proposto (ver REZENDE E QUEIROZ, 2008). A discussão em duplas (ou trios) propiciou uma forma de justificar a situação encontrada. Foi, também, realizada a construção de triângulos equiláteros, conforme EUCLIDES, Livro I, Proposição I.

A partir da segunda atividade, construção de um quadrado dado seu lado, os estudantes foram desafiados a fazer a construção seguindo as orientações da folha de atividade antes da correção na lousa. Novamente a atuação dos monitores foi muito importante. Adequando a atividade ao currículo oficial do Estado de São Paulo, foi proposta a construção de um quadrado cujo lado é a soma de dois segmentos dados, obtendo-se como subproduto o desenvolvimento do quadrado do binômio a + b (Caderno do Aluno, 8º ano, p. 53).

As atividades seguintes cumprem o roteiro:

- Construção de um retângulo equivalente a um triângulo dado.

- Quadratura de um retângulo dado. Esta atividade explorou o conceito de média geométrica, associando-a à expressão $h^2 = m \cdot n$.

- Quadratura de um triângulo dado. Todas as atividades anteriores foram concebidas com o intuito de fornecer subsídios para esta construção, que é intermediária no processo todo. A reflexão feita com os estudantes esclareceu o processo em que dado um triângulo, encontra-se um retângulo equivalente e faz-se sua quadratura, o que será explorado conceitualmente na atividade seguinte.

- Construção de um triângulo equivalente a um quadrilátero qualquer. Esta construção é a base para a compreensão de que qualquer polígono pode ser equivalente a um triângulo, por construção, assim, conclui-se que qualquer polígono pode ser *quadrável*. Em uma das classes (8º ano B), foi possível, dado o interesse dos alunos, fazer a quadratura de um pentágono.

- Quadratura de uma lúnula construída a partir de um triângulo retângulo isósceles. Primeira quadratura de uma figura não poligonal, feita a partir dos conceitos explorados por Hipócrates de Chios. A equivalência por áreas explora o teorema de Pitágoras de forma elegante, como demonstrado por GALVÃO E SOUZA (2013). Há duas representações desse mesmo exercício: uma considerando uma lúnula entre a semicircunferência sobre a hipotenusa e o arco com centro no ponto simétrico ao vértice do triângulo em relação à hipotenusa e outra, com duas lúnulas construídas sobre os catetos do triângulo isósceles.

- Quadratura das lúnulas construídas sobre os catetos de um triângulo retângulo escaleno, explorando e expandindo a atividade constante no Banco de Questões para a OBMEP - 2014.

Uma questão incentivadora inicial voltou a ser formulada: *E a quadratura do círculo?* Não havendo elementos, dentro da faixa etária em que as atividades foram propostas, que possibilitem uma exploração analítica, recorreu-se a dados históricos e pesquisas extra-classe. Os dados obtidos foram discutidos em classe, podendo assim dar continuidade ao assunto com a exposição do método desenvolvido por Arquimedes para aproximação do número pi, à luz do trabalho desenvolvido por HEATH (1897). Outro momento relevante foi a exposição da irracionalidade do número pi e impossibilidade de sua construção com régua e compasso, conforme FERREIRA, (2010)

Antes, porém, duas atividades ilustram uma visão intuitiva da irracionalidade de pi e sua obtenção experimental com a utilização de recursos simples, como tampas de potes em formato circular, barbante (ou fita métrica) e calculadora, segundo KATZ (2004). A segunda, com uso de barbante e estilete, mostrou uma visão aproximada da área de um círculo equivalente a um triângulo conforme relato de experiência contido no trabalho de LUZETTI (2013).

Duas atividades fechariam os trabalhos, porém não houve tempo hábil para sua execução dentro do ano letivo, ficando para o nono ano (acompanho essas classes em 2016).

A primeira, uma adaptação de atividade proposta por KATZ (2004) “Encontrando o valor do número pi” por meio de polígonos inscritos em uma circunferência de raio unitário, inspirado no pensamento de Arquimedes. Foram usados os polígonos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados.

A segunda, desenvolvida pelo autor, inspirada na atividade anterior, explora as aproximações para o número pi por meio de polígonos circunscritos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados a uma circunferência de raio unitário.

Estas duas experiências já haviam sido desenvolvidas em 2012, junto aos alunos de nono ano (oitava série, então) da profa. Kelly Cristina de Faria. O uso da calculadora foi uma necessidade e uma facilidade modernas, dada a dificuldade de se trabalhar com o sistema grego de numeração.

Exemplo da atividade desenvolvida, inspirada em KATZ (2004).

Escola ____

nº ____ Nome ____ __º ano ___

data: / /

ATIVIDADE XII
EM BUSCA DO NÚMERO π – 1ª ATIVIDADE

Objetivo: Encontrar, usando calculadora e com auxílio do teorema de Pitágoras, aproximações do número π, seguindo o raciocínio de Arquimedes, usando polígonos inscritos em uma circunferência de raio unitário.

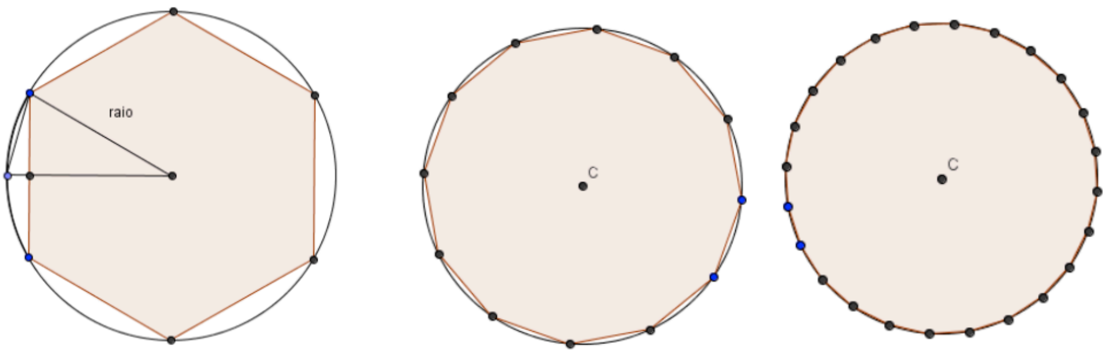
Para esta atividade você precisará de lápis ou caneta e calculadora.

Leia atentamente as instruções e peça auxílio sempre que necessitar de algum esclarecimento.

Entre as mais originais realizações de Arquimedes, está seu método para encontrar uma aproximação numérica para o comprimento de uma circunferência, que é muito elegante e fácil de acompanhar.

Arquimedes escolheu inscrever e circunscrever polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados em uma circunferência de raio unitário.

Como você pode notar, na figura abaixo, os perímetros dos polígonos inscritos regulares de 12 e de 24 lados estão muito próximos do comprimento da circunferência do círculo.

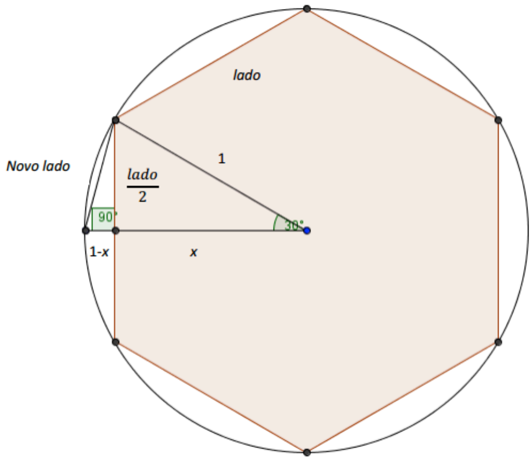


Hexágono inscrito no círculo. Dodecágono inscrito no círculo. Polígono de 24 lados inscrito no círculo.

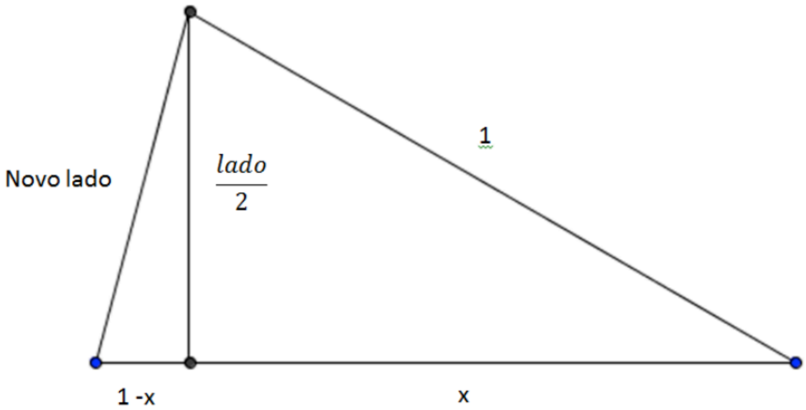
Observe os diagramas abaixo e siga a técnica que Arquimedes aplicou. Vamos começar relembrando que na atividade 9 você aprendeu que a razão C/D é constante, onde C é o comprimento da circunferência e D é seu diâmetro. Esta constante foi denominada de π.

Nesta atividade você vai encontrar aproximações para o número π, através de aproximações para C, seguindo o raciocínio de Arquimedes e usando o teorema de Pitágoras. Nós já admitimos que o raio da circunferência é 1.

O hexágono regular inscrito na circunferência determina o ângulo central de 60º. Arquimedes bisseccionou este ângulo central, obtendo 30º e, consequentemente, bisseccionando o lado do hexágono e o arco correspondentes, assim obtendo o lado do dodecágono. Veja a figura abaixo (nesta figura *Novo lado* é um lado do dodecágono obtido).



Veja a ampliação do diagrama acima, para encontrar a medida do lado do dodecágono.



Siga o roteiro abaixo para, com o uso do teorema de Pitágoras, encontrar a medida do lado do dodecágono. Use uma calculadora para executar os cálculos e utilize todas as casas decimais encontradas no visor.

a) Sabemos que a medida do raio da circunferência é 1, então a medida do lado do hexágono é 1.
b) Ao dividir o ângulo central da circunferência, determinado pelo hexágono, por dois, o lado do hexágono também fica dividido por dois. Calcule $\frac{lado}{2} =$
c) Diferente do que Arquimedes fez, use o teorema de Pitágoras para encontrar o valor do cateto cuja medida é x. Complete: x =
d) Calcule, agora, o valor de 1 – x. Compete: 1 – x = m
e) Com os valores já calculados: $\frac{lado}{2}$ e 1 – x, use, novamente o teorema de Pitágoras e calcule o valor *Novo lado*. Complete: *Novo lado* =

ISSN 2178-034X

Assim você obteve a medida do lado do dodecágono. Encontre, então, a razão $\frac{Perímetro\ do\ codecágono}{2}$ e coloque na tabela abaixo.

Repita o mesmo processo, trocando o item (a), convenientemente em cada etapa, para os polígonos regulares de 12, 24 e 48 lados.

Número De lados	Comprimento do lado	Perímetro (P)	Diâmetro (D)	$\frac{P}{D}$
6			2	
12			2	
24			2	
48			2	
96			2	

Observe, então, na última coluna da tabela, aproximações crescentes para o número π, menores que ele.

Importante ressaltar que no processo, a participação dos estudantes é imprescindível e que o contato com os instrumentos de construção forneceu outra maneira de encarar e abordar os problemas matemáticos. O uso da História da Matemática no Ensino de Matemática também favorece pesquisas e discussões em classe a respeito da evolução do pensamento e do engenho humanos.

3. Considerações Finais

Iniciadas em 2012, as atividades aqui apresentadas com o uso da régua não graduada e compasso mostraram-se realmente muito trabalhosas. Há uma dificuldade a ser superada: o medo que os estudantes têm da Geometria. No entanto é necessário considerar que por ser dificuldade, pode e deve ser superada. Após contatos iniciais com os instrumentos, cada estudante passa a familiarizar-se com eles pelo contato constante. As aulas seguiram um roteiro de uma aula dupla por semana, tempo para *digerir* as informações e praticar em casa (aqueles que possuem o compasso).

Interessante, notar que muitos dos estudantes procuraram adquirir o compasso e passaram a praticar em casa, o que leva à reflexão: afinal a Geometria pode ser apresentada de forma agradável, sem cair no engodo do lúdico pelo lúdico, pois conscientizados de que estudo e pesquisa exigem disciplina e dedicação. “Estudar exige disciplina. Estudar não é fácil, porque estudar pressupõe criar, recriar, e não apenas repetir o que os outros dizem...” – Paulo Freire.

Cumpre ressaltar que tais atividades situam-se dentro dos conceitos de apropriação de conhecimento, em que não cabe mensurar por meio de notas, médias ou outros dispositivos quantitativos, mas que, em termos qualitativos, adequa-se a uma nova abordagem dos temas relevantes (para os estudantes). As aulas reservadas para os desenhos tornaram-se mais interessantes e participativas. A aplicação dos estudantes na entreajuda, os *monitores*, mostrou-se muito produtiva e cumpriu um papel exposto na introdução deste trabalho, citado por Fauvel (1997, p.17): "Os obstáculos ao desenvolvimento no passado ajudam a explicar aquilo que os alunos de hoje acham difícil e torna a Matemática menos assustadora".

Uma vez iniciadas as atividades, fica difícil retornar a esquemas que prescindem de tais instrumentos. Torna-se parte integrante da filosofia e prática educacionais.

4. Agradecimentos

À minha orientadora, Profa. Dra. Otília Therezinha W. Paques, à direção da E. E. Elvira de Pardo Mêo Muraro, Profas. Zilda Aparecida Lyra e Sandra Tonini e à profa. Kelly Cristina de Faria, que auxiliou com a cessão de suas aulas na 8ª série (2012) e participação ativa na aplicação da atividade inicial "Em busca do número pi" KATZ (2004).

5. Referências

ABREU, Alex; BELTRÁN, Johel; FARFÁN, Jonathan; HILÁRIO, Marcelo e FRANCO, Tertuliano. OBMEP - Banco de Questões 2014. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

CORRÊA, Julio F. Um Estudo Histórico sobre Quadraturas. Trabalho de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, Editora UNESP, 2009.

FAUVEL, John. For the learning of Mathematics. Artigo traduzido por Isabel Cristina Dias, João Nunes e Paula Nunes. In: História da Matemática Cadernos do GTHEM - Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática, Portugal, 1997.

FERREIRA, Eduardo S. Nicomede e os Três Problemas Clássicos Gregos. In: Revista Brasileira de História da Matemáica. SBHMat, Rio Claro, v.10, n. 20, p. 193 - 213, 2010.

GALVÃO, Maria E. E. L. e SOUZA, Vera H. G. de. Luas, Áreas e Quadraturas - Um Problema e Muitos Séculos Na História Da Matemática. In: Revista Brasileira de História da Matemáica. SBHMat, Rio Claro, v.13, n. 27, p. 17 - 32, 2013.

HEATH, T. L. The Works of Archimedes. Cambridge University Press, Cambridge, 1897 (Book contributor: Osmania University).

KATZ, Victor e MICHALOWICZ, Karen D. Editors. Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics. The Mathematical Association of America, 2004.

LUZETTI, Fabiano D. da S. Figuras Circulares: Uma Atividade Envolvendo Perímetro e Área do Círculo. Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

REZENDE, Eliane Q. F. e QUEIROZ, Maria L. B. de. Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas. 2. ed. Campinas, Editora da Unicamp, 2008.

ROVERAN. Adilson P. Atividades para a Sala de Aula Usando como Recurso Pedagógico a História Matemática. Das Quadraturas ao Número Pi. Matemática na Antiga Grécia. Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2015.

SWETZ, Frank J. Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática. Artigo traduzido de Mathematics Teacher 77 (Jan. 1984) por Maria João Lagarto, com autorização do National Council of Teachers of Mathematics. in História da Matemática Cadernos do GTHEM - Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática, Portugal.