MODELO MATEMÁTICO DA CURVA DE REVOLUÇÃO DE UMA TAÇA

Paulo Beserra de Araújo Júnior
Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia-IFBA
Paulojunior-1@live.com

Eliana Gomes de Oliveira
Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia-IFBA
Elianac4@yahoo.com.br

Resumo:
O ensino de Cálculo tem sido objeto de pesquisa devido sua complexidade em função das dificuldades apresentadas pelos graduandos de diversos cursos, bem como pela alta evasão. Este relato apresenta resultado de pesquisa sobre modelagem no ensino do Cálculo Diferencial e Integral II, desenvolvida em uma turma de quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação da Bahia-IFBA. Trata-se de modelar objetos a funções integrais, onde se possa calcular área de superfície, comprimento e volume desse sólido. Neste sentido acreditamos que a modelagem matemática contribui para desenvolver no aluno esse espírito investigativo. O que se pode concluir é que pensar nas atividades das aulas de Cálculo como algo que envolvem ideias e tem sentido para os alunos parece ser fator fundamental para a aprendizagem e deste modo, pode contribuir para amenizar os problemas que se percebem em relação ao ensino e à aprendizagem nesta disciplina.
Palavras-chave: Modelagem matemática; Ensino de Cálculo; Licenciatura e Matemática.

1 Introdução

O Cálculo Diferencial Integral constitui um ramo fundamental dentro do contexto da Matemática e suas aplicações tornaram fundamentais para o desenvolvimento da Engenharia, Tecnologia, Economia e Matemática Aplicada.

Encontramos na literatura estudos que apontam razões que levam aos alunos terem dificuldades na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Gomes (2012) a disciplina de Cálculo I é vista como uma matemática diferente vista no Ensino Médio. Guedin (2004) explica que, o Cálculo por ser dinâmico e abordar especialmente taxa de variação, é muito diferente de outros conteúdos estudados pelos alunos que entram nos cursos superiores, segundo esse autor é natural os mesmos terem dificuldades na compreensão dos teoremas e dos conceitos.

A pesquisa que apresentamos neste relato, foi desenvolvida com alunos do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Bahia-IFBA, Campus Barreiras, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e II.

Dessa forma é emergente a necessidade da adoção de novos comportamentos no que diz respeito à prática docente dessa disciplina, com intuito de que os alunos possa entender sua aplicabilidade dentro da área em que irá atuar. Uma possibilidade é fazer uso de problemas relacionados com situações cotidianas, fazemos uso da estratégia de ensino e aprendizagem em Modelagem Matemática, pois a utilização desta estratégia possibilita o tratamento de situações reais, resgatando a investigação, a construção dos conteúdos matemáticos, a reflexão e a argumentação crítica.

Para Bassanezi (2002, p.24), "A Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual." Nesse ambiente, as ações são voltadas à experimentação, visualização, interpretação, previsão; além disso, a Modelagem Matemática pode auxiliar os alunos a identificarem aplicações em outras áreas do conhecimento e em diferentes contextos.

Para tal, vale destacar o uso da tecnologia para modelagem dos dados.

> É importante destacar que os estudos históricos e o conhecimento das pesquisas realizadas sobre o tema das Aplicações e Modelagens, desenvolvidos na pesquisa, foram essenciais para o conhecimento dos princípios epistemológicos das abordagens bem como o convencimento das potencialidades do uso das mesmas, no ensino de Matemática em geral, e especialmente nos cursos de tecnologia, nos quais se espera que a Matemática desempenhe um de seus papeis importantes que é o de explicar fenômenos da realidade. (BELTRÃO, IGLIORI, , 2010, p.18)

A Modelagem Matemática surge como um dos muitos artifícios que podem tornar o ensino da Matemática aplicável para outras áreas de conhecimentos. Conforme Bassanezi:

> A Modelagem Matemática pode ser vista tanto como método cientifico de pesquisa, quando encarada do ponto de vista da Matemática Aplicada, quanto como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de Matemática, se entendida sob a ótica da Educação Matemática. (BASSANEZI, 2002, p. 16),

Concordamos com Barbosa (2001), quando diz que por meio da modelagem matemática, os alunos são atraídos a questionar ou até mesmo investigar situações de outras áreas do conhecimento. Neste intuito, essa é uma proposta em Modelagem Matemática para o

ISSN 2178-034X

ensino superior, foi pensado em fazer a cerca do formato de uma taça. Com base nas informações acima citadas evidenciamos a questão de pesquisa: é possível modelar objetos em modelos matemáticos de forma que podemos calcular sua área volume e comprimento por meio de conhecimento de Integral?

Atualmente, se encontram no mercado vários formatos de taças, pois para cada tipo de bebida tem um formato adequado de taça. As taças em suas maiores são chamativas, devido ao seu formata e fragilidade. Este relato tem como objetivo apresentar uma sequência didática que permite encontrar o modelo matemático de uma curva que ao fazer o giro de revolução sob um dos eixos gera a taça. Para obtenção dos resultados foi utilizado um modelo concreto, abordagens teóricas e o *software* GeoGebra.

2- Metodologia e procedimentos

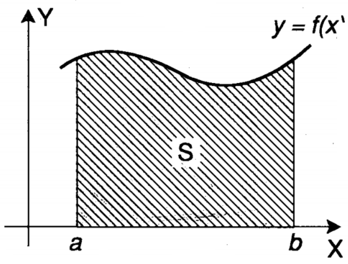
Este trabalho adota-se uma pesquisa qualitativa, pois permite observar, interpretar e analisar as atividades desenvolvidas por professores relacionadas às suas concepções a respeito do cálculo. Nessa perspectiva, concordamos com Fiorentini e Lorenzato (2009), quando afirmam que a pesquisa qualitativa é aplicada segundo a qual a preocupação maior não é com a generalização dos resultados, mas com a caracterização, compreensão profunda e interpretação dos fenômenos observados. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática em 2015, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia-IFBA com os procedimentos seguintes:

Em primeiro momento, durante as aulas, foram trabalhados as definições, teoremas e situações, envolvendo cálculo de área de superfície, comprimento e volume de sólido de revolução. Após trabalhar com os conceitos, demonstração das fórmulas foi proposta aos alunos a buscarem situações em que o conteúdo estudado poderia ser aplicado. A elaboração de modelos acontece quando o estudante tomou conhecimento das noções formais, buscando assim entender a importância dessas aplicações.

3. Aplicações de Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e integral, segundo Stewart (2014), tem várias aplicações em diversas áreas do conhecimento como em Física, Biologia, Engenharia e no próprio contexto matemático. Nessa seção, vamos apresentar um resumo de quatro aplicações de integral, a saber: cálculo de área, área de superfície, comprimento de uma curva e volume de sólido de revolução. As demonstrações dos teoremas a seguir serão omitidas, entretanto elas podem ser encontradas em qualquer livro texto de Cálculo Diferencial e Integral. Os teoremas a seguir foram retirados do livro de Swokowski (1995).

Teorema 1: Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então a área S da região sob o gráfico de f de a e b é

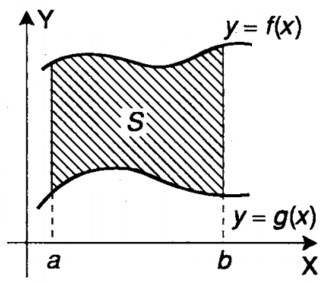


$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Figura 1: Área S de uma região plana, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa.
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 357

A integral definida é uma aplicação direta de cálculo, pois como se percebe é a área de uma região no plano xy.

Teorema 2: Se f e g são continuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então a área da região delimitada pelos gráficos de $f, g,\ x = a\ e\ x = b$ é



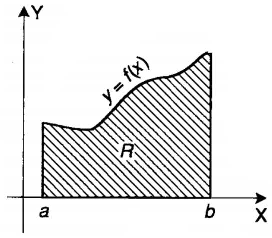
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Figura 2: Área de uma figura plana limitada pelos gráficos de f e g
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 384

Por meio do teorema 2 é possível calcular a área S limitada sob duas curvas no intervalo de $[a, b]$, sendo que neste intervalo a $Imf(x) > Img(x)$. Caso, f(x) e g(x) intercepta neste mesmo intervalo, do mesmo modo podem calcular a área da interseção. *Teorema 3*: Seja f contínua em $[a, b]$, e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for

ISSN 2178-034X

o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x epelas retas $x = a$ e $x = b$, e se V for o número de unidades cúbicas no volume de R, então:



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Figura 3: Região R rotacionada em torno do eixo x gera um sólido de revolução
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 485

A rotação de f em torno do eixo forma um sólido de revolução. Este sólido ao ser interceptado por um plano perpendicular ao eixo x obtém-se uma seção transversal circular, onde $f(x)$ é o raio do circulo. A área de um circula é dada por $A = r^2.\pi$, onde r é o raio. Observe a figura 4 que $y = f(x)$ é o raio, então a área de interseção entre o plano e o sólido de revolução pode ser calculada como $A = [f(x)]^2\pi$. E volume de um cilindro é dado por $V = r^2.\pi.h = [f(x)]^2.\pi.h$ onde h é o comprimento. Portanto, a integral do teorema 3 é a soma de todos os cilindros, onde $\Delta x = dx$ é comprimento.

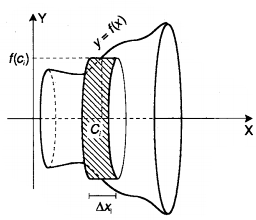
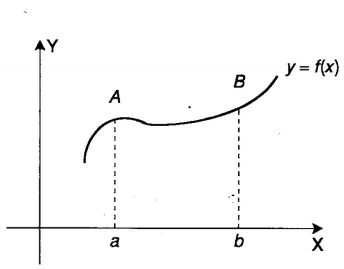


Figura 4: Sólido de revolução gerado em torno do eixo x.
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 486

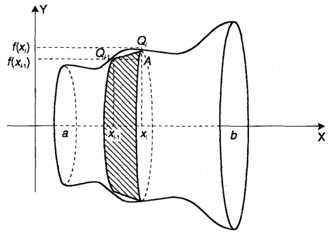
Teorema 4: Se a função f e sua derivada f´ forem continuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto (a, f(a)) ao ponto (b, f(b)) será dado por



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Figura 5: Arco de uma curva plana definida pela função f
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 357

Teorema 5: Seja f contínua em $[a, b]$, e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então a área S da superfície gerada pela revolução do gráfico de f em torno do eixo x é



$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Figura 6: Superfície de um sólido de revolução
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES. 2007, p. 498

4. Desenvolvimento do modelo

Buscando tornar mais claro e fácil o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, o computador e softwares são ferramentas fundamentais para ajudar na compreensão e entendimento dos conceitos da disciplina ou paralelamente ao uso do computador, introduzem problemas do cotidiano para que os alunos interpretem e desenvolvam uma solução para tais problemas, cujos cálculos são trabalhosos.

Os alunos foram solicitados a encontrar o modelo matemático da embalagem de refrigerante, entretanto no momento da modelagem os mesmos chegaram à conclusão que a curva de revolução desta embalagem não é atrativa, pois apresentava um intervalo de uma reta. Deste modo, realizou-se uma pesquisa no Google Imagens a procura de fotos de perfumes com a intenção de encontrar outra embalagem que apresentava curvas matemáticas tidas como “complexas” de se desenhar o gráfico na mão. Entretanto, as embalagens encontradas a maioria delas tinha o formato de cilindro ou retangular.

Após a investigação de das curvas de várias embalagens, os alunos escolheram o modelo matemático de uma taça, assim, foi realizada uma pesquisa dos modelos de taças que se encontra no mercado, e foi uma surpresa encontrar uma diversidade de modelos, sendo que para cada tipo de bebida existe uma taça adequada. A taça escolhida para a modelagem foi uma taça tulipa usada para cerveja.

A foto da taça foi escolhida no Google Imagens, pegamos a mesma e transferimos para o software GeoGebra, como mostra a figura 7.

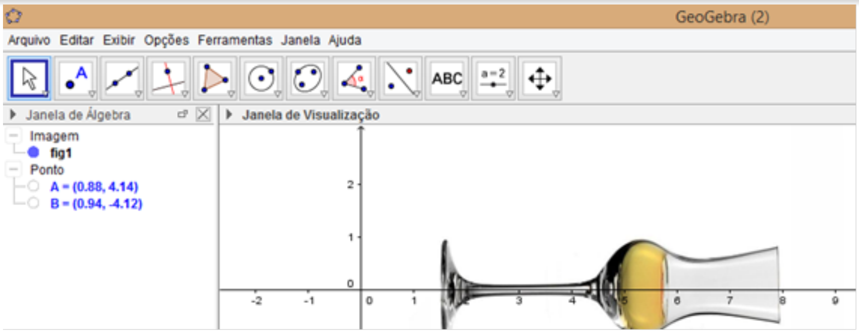


Figura 7: Foto da taça plotada no GeoGebra
Fonte: própria dos autores.

Para encontrar a curva da taça, inicialmente foi feita varias tentativas de combinações de funções trigonométricas e usando o recurso do software de controle deslizante, algumas das combinações foram: f(x)=cos(x-a).sen(x), f(x) = cotg(x-a).sen(x) e assim por diante. Entretanto nenhuma delas formou um formato próximo da taça. Na sequência, inserimos pontos sobre a curva com o intuito de fazer uma interpolação polinomial para encontrar um polinômio a qual a sua curva aproximasse do formato da taça.

Encontramos um polinômio de grau 7, como se percebe na figura 8, ele se justa bem na parte mais importante da taça que é a onde fica o liquido.

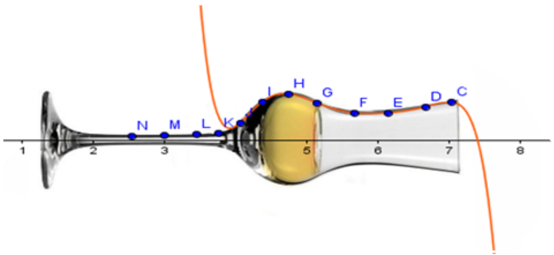


Figura 8: Curva encontrada por meio da interpolação
Fonte: própria dos autores

Essa curva é dada pelo seguinte polinômio: $f(x) = -0.07x^7+2.79x^6-46.9x^5+435.6\,x^4-2410.25\,x^3+7939.23x^2-14405.48x+11100.55$. Observe que a curva do ponto C até K se ajusta na taça. Dessa forma, restringimos no intervalo do ponto C a K como mostra a figura 9.

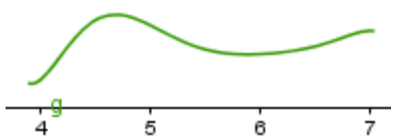


Figura 9: Arco da curva da taça encontrada
Fonte: própria dos autores

. Para gerar o sólido de revolução abrimos a janela de 3D e inserimos um controle deslizante para ângulo e na caixa de inseri ferramentas do software: escrevemos a palavrar girar, para colocar o comando para então fazer com que a função girasse em torno do eixo x.

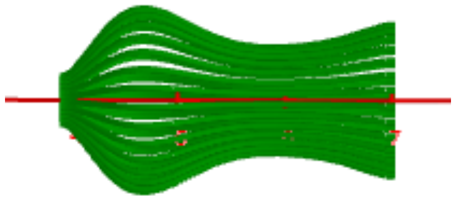


Figura 10: sólido obtido pela rotação do arco
Fonte: própria dos autores

É possível notar que o giro de revolução da curva formou um formata semelhante da taça. Observe figura 8. É importante salientar que existem outras técnicas para encontrar o modelo matemático de um objeto, uma delas é por meio da regressão polinomial de grau n.

5. Volume, comprimento do arco e área da superfície do modelo da taça.

Com auxílio do software GeoGebra foi possível definir o volume, comprimento e área da superfície do modelo da taça. Para o cálculo do volume de acordo teorema 3 temos: $a = 3.9$ $b = 7.03$ e a função f, definida por f(x) = $-0.07x^7+2.79x^6-46.9x^5+43.6\ x^4-2410.25\ x^3+7939.23x+11100.55$

Aplicando na fórmula temos:

$$V = \pi \int_{3.9}^{7.03} [-0.07x^7 + 2.79x^6 - 46.9x^5 + 43.6\,x^4 - 2410.25\,x^3 + 7939.23x + 11100.55]^2 d = 1.9\pi\ \mathrm{u.v}$$

Para encontramos o comprimento de arco pelo teorema 4, temos: $a = 3.9$, $b = 7.03$

$f'(x) = -0.49x^6 + 16.72x^5 - 234.48x^4 + 1742.41\,x^3 - 7230\,x^2 + 7939.23$, dessa forma temos como comprimento:

$$L = \int_{3.9}^{7.03} \sqrt{1 + [-0.49x^6 + 16.72x^5 - 234.48x^4 + 1742.41\,x^3 - 7230\,x^2 + 7939.23]^2 dx} = 739.81\ \mathrm{u.c}$$

Para o cálculo da área da superfície pelo teorema 5, Dados são: $a = 3.9$, $b = 7.03$

$f(x) = -0.07x^7+2.79x^6-46.9x^5+435.6\,x^4-2410.25\,x^3+7939.23x^2-14405.48x+11100.55$

$f'(x) = -0.49x^6 + 16.72x^5 - 234.48x^4 + 1742.41\,x^3 - 7230\,x^2 + 7939.23$. Assim temos como a área da superfície do modelo da taça:

$$2\pi \int_{3.9}^{7.03} (-0.07x7 + 2.79x6 - 46.9x5 + 435.6\,x4 - 2410.25\,x3 + 7939.23x^2 - 14405.48x + 11100.55)\sqrt{1 + [-0.49x^6 + 16.72x^5 - 234.48x^4 + 1742.41\,x^3 - 7230\,x^2 + 7939.23]^2}dx = 32575.52\ \mathrm{u.a}$$

6. Considerações Finais

A Modelagem Matemática não é a única metodologia de ensino em que professor no exercício das suas atividades pode lançar, no entanto com esse trabalho podemos concluir que é possível modelar objetos em modelos matemáticos de forma que se pode calcular sua área volume e comprimento por meio de conhecimento de Integral. Dessa forma ao analisar os resultados encontrados na sequência de ensino envolvendo o contexto da modelagem, ocorreu envolvimento dos alunos e tiveram a oportunidade de encontrar uma curva que não se encontrar nos livros de Cálculo Diferencial e Integral.

A elaboração e a resolução de problemas permitem ao aluno tornar explícito o processo construtivo de aprender, de converter em ações alguns conceitos, proposições e exemplos adquiridos ou construídos com o professor e com o material didático. Ao usar a modelagem matemática como alternativas pedagógicas, os alunos, se envolvem na elaboração e resolução de problemas que, em geral, têm origem fora da Matemática.

7. Referências

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, Rio Claro, n.15, p. 5-23, 2001.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma novaestratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BELTRÃO, Maria Eli Puga, IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.1, pp.17-42, 2010.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática:

percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009 (Coleção formação de professores.

FLEMMING, Diva, GONÇALVES, Mirian. Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração. Volume A. 6 Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GOMES, E. Ensino e aprendizagem de cálculo na engenharia: um mapeamento das publicações nos COBENGEs. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós – Graduação em Educação Matemática, 16, Canoas. Anais... Canoas: ULBRA, 2012.

GUEDIN, J. Cálculo diferencial e integral: o ensino como uma abordagem histórica e suas contextualizações. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). Criciúma, 2004.

STEWART, James. Cálculo. Volume I. 4ª ed. São Paulo: Pioneira, 2014

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com Geometria Analítica, vol 2. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1995.

ISSN 2178-034X