

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS A DERIVADAS: PROPOSTA METODOLÓGICA UTILIZANDO A ANÁLISE DE ERROS

Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos
Universidade Nove de Julho
a.abrahao@gmail.com

Érica Marlúcia Leite Pagani
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ericapagani@terra.com.br

Eixo Temático: Resolução de Problemas em Educação Matemática

Resumo: O objetivo deste trabalho é promover reflexões acerca da Análise de Erros construída a partir de atividades desenvolvidas em sala de aula e conduzidas sob a luz da Resolução de Problemas. A pesquisa foi realizada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio integrado ao técnico do curso de Mecânica e seu objetivo foi mostrar como a Análise de Erros pode ser uma aliada no ensino e na aprendizagem de derivadas. A pesquisa é qualitativa e foi realizada através da observação participante e análise documental. A análise das respostas dos alunos permitiu conhecer as dificuldades matemáticas que os alunos encontram na resolução de problemas de derivadas bem como conhecer dificuldades em conhecimentos prévios. Os debates a respeito das resoluções construídas permitiram aos alunos construir novos conhecimentos matemáticos e reconstruir outros. A reflexão sobre os erros mostrou-nos lacunas em conceitos matemáticos anteriores, possibilitando, assim, corrigirmos algumas dessas falhas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Análise de Erros.

Introdução

O ensino e a aprendizagem de Matemática há anos têm sido objeto de estudos e debates e, diante disso, propostas pedagógicas têm surgido na tentativa de minimizar as dificuldades encontradas nesses processos.

Pesquisas em Educação Matemática assinalam a importância da Resolução de Problemas enquanto prática educativa no ensino de Matemática, em particular, o ensino de Matemática **através** da Resolução de Problemas (CAI e LESTER, 2012; ALLEVATO e ONUCHIC, 2014). Relata-se, neste, artigo um estudo desenvolvido em sala de aula utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação para os conteúdos de derivadas.

Este estudo considerou, ainda, a análise dos erros matemáticos cometidos pelos alunos ao desenvolver a resolução os problemas, como descrito por Bastos (2013). Nesse contexto, o erro não é considerado ou analisado como procedimento de avaliação somativa, visto que não é atribuída nenhuma nota ou conceito para as atividades realizadas. A análise de erros constitui-se em elemento de estudo para uma avaliação continuada, integrada ao processo de ensino-aprendizagem, e procura compreender onde os alunos apresentam dificuldades, criando, assim, subsídios para sanar suas dúvidas. Desta forma, pretendemos neste trabalho colaborar para reflexões sobre dificuldades e erros matemáticos cometidos pelos alunos ao desenvolverem as atividades sobre derivadas realizadas em sala de aula através da resolução de problemas.

Dividimos este artigo em 4 seções. Na primeira e na segunda apresentamos, brevemente, nossa fundamentação teórica, qual seja o (1) ensino de Matemática através da resolução de problemas e (2) a Análise de Erros. Na seção seguinte, descrevemos a metodologia de pesquisa utilizada e, na seção 4, analisamos e discutimos os dados coletados. Encerramos com as considerações finais e as referências bibliográficas.

Ensinar Matemática através da resolução de problemas

Problemas desempenham e sempre desempenharam um papel importante na construção do conhecimento matemático. Revendo a História da Matemática, não raras são as vezes em que nos deparamos com teorias matemáticas que foram desenvolvidas durante a busca pela solução de um determinado problema.

Um problema matemático pode constituir-se, por exemplo, na demonstração de um teorema. Durante os quase 350 anos em que os matemáticos persistiram na busca pela demonstração do Último Teorema de Fermat, observamos que algumas teorias foram construídas e outras foram desenvolvidas a fim de auxiliar em etapas desse processo de demonstração e hoje servem, à Matemática, na resolução de novos problemas.

Entretanto, a Resolução de Problemas como forma de levar o aluno a pensar e construir conhecimento ganha força com Polya (1944/1995), a partir de sua obra *A Arte de Resolver Problemas*¹ e retorna ao cenário internacional da Educação Matemática nos

¹ Título em inglês: *How to Solve It*, cuja primeira edição data de 1944 e a versão em português aqui apresentada foi publicada em 1995.

anos 1980, quando o NCTM² apresenta uma série de recomendações para melhoria da matemática escolar no documento intitulado “Uma Agenda para a Ação”. Uma dessas recomendações colocava a resolução de problemas como foco da matemática escolar dos anos 1980 (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). A partir dessa década, principalmente, foram feitos grandes esforços no sentido de desenvolver materiais e currículos que pudessem favorecer o trabalho com resolução de problemas na Matemática. Esses esforços foram e continuam sendo úteis para ajudar os professores interessados em tornar a Resolução de Problemas o foco em suas salas de aulas, mas não proporcionou a melhoria esperada na aprendizagem da Matemática. Daí emergem, então, ideias de se pensar em utilizar as situações-problema como um meio de se ensinar e aprender Matemática. (ALLEVATO, 2005).

Essa concepção sobre Resolução de Problemas, inicialmente apresentada por Hatfield (1978) e ratificada por Shroeder e Lester (1989), refere-se a ensinar Matemática partindo de um problema e constituindo-o como um meio através do qual vai se ensinar Matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). Ainda, segundo Nunes,

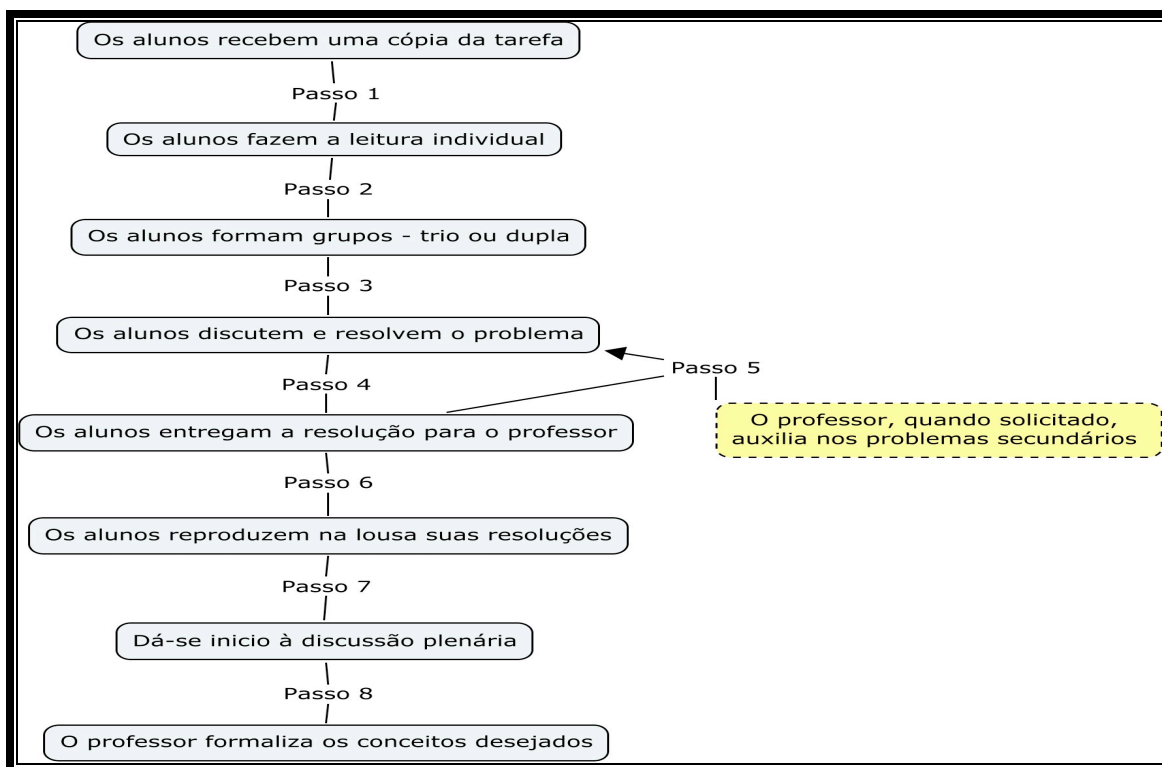
[...] a expressão “através de” é uma forma de ensinar e, conseqüentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois o aluno diante do problema deve se mostrar como um construtor do seu próprio conhecimento. (NUNES, 2010, p.85)

A inserção da palavra Matemática tem o intuito de retirar o foco exclusivo da resolução de problemas e considerar que a palavra através enfatiza o fato de que “ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente”. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 38).

Neste trabalho, consideramos a Resolução de Problemas como metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Nela, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a avaliação é integrada ao processo de ensino-aprendizagem. Assumimos que problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). Uma proposta para o encaminhamento das atividades em sala de aula segundo essa metodologia é apresentada por Allevato e Onuchic (2009) em 9 (nove) etapas, descritas na figura a seguir:

² National Council of Teacher of Mathematics

Figura 01 – Etapas da Metodologia do Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas



Fonte: BASTOS, 2013.

Essas foram etapas empregadas nesta pesquisa, entretanto, mais recentemente, as autoras agregaram a esse encaminhamento em sala de aula, uma 10ª (décima) etapa, qual seja, propor aos alunos “novos problemas relacionados ao problema gerador”. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Uma vez que nessa metodologia o problema é o ponto de partida para a aprendizagem e construção do conhecimento, ressalta-se que os problemas são propostos antes que o aluno tenha conhecimento do(s) conteúdo(s) matemático(s) necessário(s) ou mais adequados à sua resolução.

Análise de Erros

Pesquisas sobre os erros dos alunos têm uma extensa história na Educação Matemática. Borasi (1985) e Cury (2007) comentam os diversos tipos de erros matemáticos dos alunos, assim como, apontam uma variedade de erros que surgem no campo da Matemática, de modo que algumas perspectivas teóricas têm sido

apresentadas aos professores e pesquisadores, por meio de estudos nacionais e internacionais, elencando os erros cometidos pelos alunos.

Para Luckesi (1998), uma visão culposa do erro na prática escolar tem conduzido ao uso de castigos, sejam na forma física ou psicológica, como alternativa para a correção de direção da aprendizagem do aluno, passando a ser encarado como algo vergonhoso e censurável.

Outro pesquisador que desenvolveu pesquisa em erros foi Torre (2007, p. 27), “em que considerou o erro como uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar: não há aprendizagem isenta de erros”, o que faz do erro um elemento sempre presente. A literatura sobre o tema nos permite inferir que a manifestação do erro, não indica, necessariamente, a ausência completa de conhecimento.

A presença permanente de erros na construção e consolidação do conhecimento humano é uma questão complexa e delicada. O erro é indicativo de um conhecimento que tem alguma deficiência ou incompletude, como indicado por Bastos e Allevalo (2011). Os autores completam dizendo que o erro é uma condição do que pode acontecer e um fato permanente no desenvolvimento do conhecimento científico.

Por ser a Matemática uma ciência estruturada por diversos padrões, e ao perceber o erro perpetrado pelos alunos nos diversos níveis de ensino, o erro vem se tornando o combustível para muitos pesquisadores e educadores, por ser uma das grandes preocupações da Educação. Essas indicações devem conduzir a uma nova postura do professor e do aluno frente ao erro; não a um sentimento de fracasso ou desalento, mas a uma atitude de busca positiva e contínua de melhoria e de novas aprendizagens.

Assim, a Análise de Erros pode ser entendida como metodologia de ensino quando se propõem atividades de exploração e reflexão sobre os erros, originando a construção de conhecimentos; e como metodologia de pesquisa (CURY, 2007), com enfoques apontados pelos pesquisadores e pelas teorias em que se apoiam suas pesquisas. Em qualquer uma dessas situações anteriores, podemos trabalhar o erro para atenuá-lo, para alcançar novos conhecimentos ou para promover novas investigações.

Bastos (2013) trabalha com a Análise de Erros na perspectiva de metodologia de ensino e, corroborando com a teoria estudada, constrói categorias que podem auxiliar o pesquisador na exploração e reflexão sobre os erros cometidos pelos alunos na realização de atividades em sala de aula. Dentre essas categorias, citamos aqui:

1) A Categoria Ω - Erros ligados a cálculos incorretos - Nessa categoria reunimos aqueles erros que ocorrem quando cada passo na realização do problema está correto ou responde à lógica interna do procedimento esperado, entretanto o resultado final não corresponde à solução desejada em virtude de erros de cálculo apresentados na efetivação de operações básicas, ou causado pela transferência equivocada de símbolos e números envolvidos na situação.

2) A Categoria β – Erros ligados às deficiências na construção de conhecimento matemático prévio - Essa categoria de erros atende a elementos, registrados nas resoluções dos problemas, que manifestam aprendizagem incorreta ou incompleta de fatos, procedimentos, algoritmos e conceitos matemáticos trabalhados (ou não) em etapas anteriores da escolaridade, e que interferem na obtenção da solução do problema.

Desse modo, o fator que faz emergir a análise de erros no ensino de Matemática é a emergência de disparates de compreensão e no processo lógico, sistematizado pelos alunos de maneira errônea, quando da realização de uma tarefa ou na resolução de um problema. Conseqüentemente, o professor deverá alterar suas estratégias docentes, com o objetivo de adotar uma metodologia mais adequada a esses alunos; explorar não somente o saber mecânico operacional, incentivando os alunos a escolher antecipadamente o procedimento que mais se adequa à atividade e às dificuldades manifestadas pelos erros dos alunos.

Metodologia e contexto da pesquisa

Trata-se, o presente trabalho, de uma pesquisa de abordagem qualitativa. O motivo que nos fez optar pela pesquisa qualitativa foi o fato de que para a investigação e compreensão das questões de pesquisa formuladas, houve a necessidade de familiarização com os sujeitos e com a situação a ser pesquisada. Assim, em nossa

pesquisa, o contato com os sujeitos, foi constante no sentido de observá-los e de recolher material produzido por eles relacionado ao tema de investigação.

Adotamos, nesta pesquisa, a perspectiva da pesquisa participante dada por Brandão (1987), considerando que todo trabalho de preparação, elaboração e implementação das atividades foi realizado pelo pesquisador. Neste tipo de pesquisa, o investigador não é neutro, pois interpreta os dados coletados, segundo pressupostos teóricos que assume e segundo sua visão de mundo. O pesquisador é parte integrante da produção de conhecimento, e suas ponderações, observações em campo, impressões e sentimentos farão parte da análise de dados.

Nessa pesquisa, os documentos utilizados para obtenção de informações e construção dos dados são os manuscritos com os registros das resoluções dos problemas propostos aos alunos configurando-se assim, a utilização, também, de análise documental.

Resultados e Discussão

O grupo que participou da pesquisa aqui relatada era composto por alunos do 2^o ano do Ensino Médio, de um curso profissionalizante da modalidade Mecânica, com idades variando entre 16 e 17 anos, sendo os conteúdos relativos a derivadas desconhecidos por eles até então. Ressaltamos que os encontros para realização e desenvolvimento das atividades aconteceram no horário regular de aulas de Matemática da turma e que os alunos trabalhavam sempre em duplas.

Para a preparação das atividades, apoiamo-nos em Abdelmalack (2011) e nos livros Thomas (2009) e Tan (2001). Fomos coletando e adaptando problemas que pudessem ser aplicados, de acordo com a metodologia de Resolução de Problemas que estava sendo utilizada. As atividades envolviam conteúdos como taxa de variação média, reta secante ao gráfico de uma função, taxa de variação instantânea, reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, definição de derivada de uma função no ponto, função derivada, estudo do comportamento das funções através de sua derivada e a regra da cadeia para derivação de funções compostas.

Após finalizarmos as atividades em sala de aula, identificamos diversos erros nos protocolos entregues pelos alunos, não necessariamente ligados à compreensão do

conceito de derivadas, que nos levaram a construir categorias para analisar os mesmos. Para tanto, apoiamo-nos em teóricos já apresentados anteriormente.

Dentre as atividades aplicadas à turma, selecionamos duas e uma resposta de cada uma, para apresentarmos as análises e em qual categoria (BASTOS, 2013) cada uma delas se encontra.

Na figura 02 a seguir, apresentamos o protocolo de uma dupla de alunos para uma atividade cujo objetivo era verificar se o aluno tinha adquirido domínio das regras de derivação e permitir que estudasse o sinal da função derivada relacionando-o com o comportamento da função primitiva. Ao analisarmos a figura 02, identificamos a dificuldade da dupla de alunos em expressar seus pensamentos e escrevê-los de forma razoável, a partir do que foi solicitado.

Figura 2 – Protocolo da dupla 01

Seja $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Determine o domínio de f
 $x \in \mathbb{R}$

b) Determine os intervalos onde f é crescente

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 $3x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\Delta = 4 + 12 = 16$
 $x = \frac{2 \pm 4}{6}$ $x' = -\frac{1}{3}$ $x'' = 1$

crescente para $-\frac{1}{3} < x < 1$

c) Determine os intervalos onde f é decrescente

$1 > x > -\frac{1}{3}$

Fonte: Dados do pesquisador

Nesse protocolo, a dupla desenvolve bem a resolução do item b, determinando corretamente a função derivada. Compreende que necessita estudar o sinal da função derivada para que possa determinar os intervalos de crescimento/decrescimento da

primitiva. Entretanto, no momento da análise e escrita do intervalo demonstra uma aparente falta de conhecimento ou comete uma transferência equivocada dos símbolos de desigualdade ao representar o que está sendo solicitado; ou seja, essa dupla representa erroneamente o intervalo onde a função é positiva. A resposta correta seria: a função é crescente em $x < -1/3$ ou $x > 1$. Isso nos leva a inserir o erro expresso na Figura 02 na categoria Ω descrita anteriormente.

Neste caso, caberia uma discussão com a dupla para entender o que pensaram no momento da execução dessa atividade, para, assim, sanar caso seja identificado, a ausência de conhecimento sobre o conteúdo.

Outros erros estão apresentados na Figura 03, os quais ilustram erros da categoria β . Observamos nesse protocolo erros relacionados ao cálculo de potências, à utilização de propriedades de potenciação bem como erros cometidos ao aplicar as regras de derivação. Da nossa experiência e vivência em sala de aula, percebemos que erros relacionados ao cálculo ou manipulação de potências é frequente e ocorre comumente em sala de aula.

Figura 03 – Protocolo dupla 02

Seja $f(x) = (x^3 + 2x)^2$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.

$$(x^3)^2 + 2(2x \cdot x^3) + (2x)^2$$

$$x^9 + 4x^2 \cdot x^6 + 4x^2$$

$$x^9 + 4x^8 + 4x^2$$

$$f'(x) = 9 + 32x^7 + 0$$

$$f'(x) = 17 + 32x^7$$

Fonte: Dados do pesquisador

Para melhor entender nossa análise referente à Categoria β para esse protocolo, observa-se na segunda linha da resolução, que o aluno possui uma deficiência conceitual em regras de potenciação, sendo que os erros ocorreram em cadeia a partir desse ponto. Cabe, nesse caso, uma retomada a respeito das regras de potenciação.

Ao analisarmos os erros dos alunos estamos aprofundando nosso conhecimento a respeito desses alunos. Identificar “de que tipo são” esses erros e categorizá-los proporciona ao professor uma análise mais profunda dos mesmos bem como a tomada de decisão sobre o tratamento que será dado a eles. Isto permite que os professores se deem conta das deficiências na aprendizagem de conteúdos prévios ou recentes e de equívocos comuns do raciocínio em sala de aula; não apenas com a finalidade de corrigi-las mediante retomada dos conteúdos e reflexão e, conseqüentemente, melhoraria dos processos de aprendizagem.

Conclusões

Neste trabalho, utilizamos a Análise de Erros para identificar, analisar e categorizar erros cometidos pelos alunos ao desenvolverem as atividades relacionadas ao conteúdo de derivadas. Tais atividades foram desenvolvidas em horários regulares de aula da turma tendo a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. Destacamos que uma quantidade significativa dos erros que os alunos cometeram não são relativos, especificamente, ao assunto que estava sendo desenvolvido, mas sim às lacunas de conhecimentos prévios que foram mobilizados na construção do conhecimento sobre os conceito de derivadas.

A análise dos erros cometidos nas resoluções construídas pelos alunos permitiu-nos refletir sobre como esses alunos trabalharam com a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, e conhecer mais profundamente a natureza das dificuldades que alguns deles enfrentaram na realização das tarefas.

As observações realizadas durante as atividades nos permitem afirmar que os alunos participantes dessa pesquisa se engajaram de maneira muito ativa no trabalho de resolução do problema, tanto nos pequenos grupos quanto na plenária, quando foram analisadas as resoluções com toda a classe e formalizados os conceitos e conteúdos envolvidos nos problemas. A categorização dos erros levantados foi além de simplesmente diagnosticar, permitindo refletir sobre eles com os alunos, como parte da

construção de novos conhecimentos matemáticos ou da reconstrução de outros. Conforme descrito por Torre (2007), o erro assume o caráter didático, não sendo o fim, mas um meio, um recurso que informa ao professor que o aluno que se equivoca necessita de ajuda.

Finalizamos este trabalho almejando proporcionar, àqueles que compartilham conosco da busca por novas possibilidades de ensino, a alternativa do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas e da Análise de Erros. Com isso, esperamos que o interesse por esses temas cresça nos próximos anos, com a melhoria da compreensão teórica sobre eles e, logo, das práticas. Em nosso entendimento esse campo de estudo é muito amplo e de grande interesse, com ricas possibilidades de desenvolvimento em ambos os campos.

Referências

ABDELMALACK, A. **O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de engenharia através da resolução de problemas**. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 370 f. Tese (Doutorado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

_____. **Diferentes Tipos de Problemas no Desenvolvimento de Diferentes Habilidades de Pensamento**. IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Belo Horizonte, 2007.

_____; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 31, n. 55, p. 133-154, jul/dez 2009.

_____; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

BASTOS, A. S. A. M. **Análise de erros matemáticos na resolução de problemas, aplicados à física elétrica**. 199 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

BASTOS, A. S. A. M.; ALLEVATO, N. S. G. Análise de Erros: Perspectivas nos Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática. In: LOPES, C. E.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Matemática e Tecnologias**. São Paulo: Terracota, 2011, p.17-38.

BORASI, R. Using Errors as Springboards for the Learning of Mathematics: an Introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.7, n. 3-4, 1985, p. 1-14.

BRANDÃO, C. R. Pesquisar-Participar. In: BRANDÃO, Carlos R. (Org.). **Repensando a Pesquisa Participante**. São Paulo: Brasiliense, p. 7-14, 1987.

CAI, J; LESTER, F.. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: **Boletim GEPEM**. Trad. Bastos, A. S. A. M. e Allevato, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, 2012, p. 241-254. Disponível em <<http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=837>>. Acesso em: 11 jan. 2013.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

LUCKESI, C.C. **Prática escolar**: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: Revista Ideias. n. 08. São Paulo: FDE, 1998.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 430 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, ano 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Interciência. Rio de Janeiro, 1995.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing and Understanding in Mathematics via Problema Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHUTLE A. P. (ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

TAN, S. T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. Tradução Edson de Faria. 5ª ed. São Paulo, Pioneira, 2001.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Tradução Thelma Guimarães. 11ª ed. São Paulo, v. 1, Pearson, 2009.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: ARTMED, 2007.