

## LOGARITMOS: UMA ATIVIDADE PRÁTICA

*Rubens Carlos Viriato Júnior*

*Universidade de Brasília*

*rubens.viriato@gmail.com*

*Raquel Carneiro Dörr*

*Universidade de Brasília*

*raqueldoerr@gmail.com*

### **Resumo:**

A partir de uma situação-problema, os participantes trabalharão propriedades da função logarítmica. O objetivo da atividade é apresentar a educadores e licenciandos matemáticos, uma abordagem prática dos logaritmos que os ajudem na motivação, ensino e compreensão desses conteúdos. Os conteúdos matemáticos escolhidos para as atividades são relevantes para os estudantes do ensino médio e, se bem apreendidos, servirão de auxílio para o uso em sala de aula em suas matérias, já que é um conteúdo ensinado na Rede Pública do Distrito Federal.

**Palavras-chave:** Logaritmos; situações-problemas; ensino médio.

### **1. Introdução**

A atividade apresentada neste minicurso foi produzida no âmbito do projeto denominado “Escola de Matemática”, desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília para integrar o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Este conjunto de atividades aborda um tema importante visto no Ensino Médio: Os Logaritmos. A motivação se deu com base na aplicação de um questionário a alunos da Rede Pública de Ensino do Distrito Federal que integravam as 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> séries do Ensino Médio. Por meio de suas respostas, foram observadas dificuldades em relação ao conhecimento adquirido em torno do tema. O questionário continha três perguntas, sendo duas teóricas e uma prática (com a resolução de um exercício de juros compostos). A primeira pergunta era: “*O que você sabe sobre logaritmos?*”, obtivemos do aluno X (por questões de sigilo e confidencialidade não citaremos nomes) respondeu: “*São cálculos cartesianos*”; a segunda pergunta: “*Para que serve o logaritmo*” o mesmo aluno X respondeu: “*Para calcular os logs*” e na terceira pergunta: “*Determine quanto tempo é necessário para que um investimento de R\$500,00 dobre de valor em uma aplicação que rende 4,75% de juros compostos ao ano*” nenhum dos

alunos soube responder. Demais respostas do total 13 questionários serão mostradas durante a apresentação.

Ao se construir este conjunto de atividades a ideia inicial era de trabalhar algumas propriedades básicas dos logaritmos estudados na educação básica e fortalecer, bem como aprimorar, o seu uso junto aos alunos.

O objetivo da atividade é apresentar a educadores matemáticos e licenciandos em Matemática, uma abordagem prática dos logaritmos que os ajudem na motivação, ensino e compreensão desses conteúdos.

Este minicurso está sendo apresentado no formato dos denominados cadernos do PIBID/ MAT/UnB. Eles são construídos a partir de situações-problema criadas pelos estudantes participantes do programa. As situações-problema deste minicurso foram criadas pelos autores. As referências citadas contém as fontes de consulta usadas tanto na fundamentação teórica como na parte prática.

A partir de uma situação-problema, os participantes trabalharão propriedades da função logarítmica. As atividades devem ser realizadas em grupos de 2 a 4 pessoas. Os participantes devem interpretar a situação proposta em cada atividade, e em seguida, seguir os comandos do enunciado sob a coordenação do professor que deverá mediar os trabalhos, esclarecendo dúvidas, controlando o tempo e fechando cada atividade por meio de comentários sobre os resultados e as conclusões e ressaltando descobertas feitas pelos grupos durante o processo. O nível das atividades é crescente. Os participantes devem registrar todas as suas respostas e resoluções. Promovemos aqui a comunicação oral e escrita entre os participantes como instrumento importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

## 2. Atividade 1

“A Polícia Federal (PF) cumpre desde a madrugada desta sexta-feira (19) a 14ª fase da Operação Lava Jato. São 59 mandados judiciais, sendo 12 de prisões temporárias e preventivas, em São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Rio Grande do Sul. Esta fase da operação, chamada de "Erga Omnes", tem como alvo as empreiteiras Odebrecht e Andrade Gutierrez, segundo a PF.”

[Fonte: <http://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2015/06/na-14-fase-da-lava-jato-pf-cumpre-59-mandados-em-quatro-estados.html>]

Diante da enorme preocupação dos juízes federais que acompanham o caso e dos policiais que participam da intitulada Operação Lava-Jato com o crescente número de pessoas presas

devido as descobertas de corrupção desta operação da Polícia Federal, os mesmo juízes e policiais solicitaram a um grupo de matemáticos da Universidade de Brasília (UnB) que calculasse o número de etapas da Operação que fariam com que os presídios da PF de todo o Brasil ficassem com sua capacidade máxima a partir da quantidade já existente de celas disponíveis.

Para tal finalidade, os matemáticos envolvidos na solicitação, analisaram documentos sigilosos da Polícia Federal e do Governo Federal em busca dos dados referentes a quantidades de prisões e quantidades de celas ocupadas, dado que cada cela é exclusiva para um único réu. Logo, os matemáticos obtiveram um dado muito importante:

- Antes da deflagração da primeira etapa da Operação Lava-Jato, o número de pessoas que se encontravam presas nas dependências da Polícia Federal por outros casos de corrupção e crimes afins era igual a 920.
- Na 14ª etapa da Operação, havia um total de 1312 presos nos prédios da PF
- O total de celas nas dependências da PF é igual a 1816.

Os matemáticos concluíram que o modelo mais adequado para se calcular o que foi pedido seria uma função polinomial  $P(x)$  de grau 1, que representaria o total de presos nas dependências da Polícia Federal. Considere  $x$  o número de etapas da Operação Lava-Jato.

1 - Diante disso, qual o polinômio que descreve  $P(x)$ ?

2 - Quantas etapas os matemáticos informaram aos juízes e policiais que fariam com que a PF estaria com sua capacidade máxima de presos?

3 – A Polícia Federal, em um comunicado oficial à imprensa, afirmou que o custo para a análise de documentos apreendidos na Operação, por minuto é igual à  $50 \log 2$ . Encontre o valor aproximado informado pela PF, descobrindo o valor de  $\log 2$  a partir da série dos logaritmos, após compare com uma calculadora.

4 – Agora, fatore o resultado da questão 2.

5 – Considerando que o custo por mês com cada preso da Lava-Jato nas celas da PF é dado por  $1000\ln(x)$ , calcule o custo por mês informado pela Polícia (onde  $x$  é o resultado da questão 2) utilizando a fórmula da série dos logaritmos, com  $n = 5$ . Esta Série deve o seu nome a Brook Taylor que as estudou no trabalho *Methodus incrementorum directa et inversa* em 1715, que é dada por

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, |x| < 1.$$

Em seguida, compare o resultado com uma calculadora.

6 – Calcule o  $1000\ln x$  (onde  $x$  é o resultado da questão 2) utilizando a fórmula da série dos logaritmos com  $n = 3$ ,  $n = 7$  e  $n = 9$ . E após, calcule o resultado de  $\ln x$  (onde  $x$  é o resultado da questão 2) na calculadora. O que podemos afirmar sobre o resultado encontrado na calculadora e o resultado encontrado por meio da série dos logaritmos? A medida que utilizamos um valor para  $n$  maior, o que acontece com o seu resultado em comparação com os resultados da calculadora? Podemos afirmar que a calculadora utiliza a mesma fórmula?

### 3. Atividade 2

“São Paulo conta com 31 parques estaduais, 26 estações ecológicas, 18 estações experimentais, 15 florestas preservadas, uma reserva estadual, dois hortos e dois viveiros florestais. Consciente da necessidade de preservação ambiental desses lugares, o poder público estadual implantou mecanismos voltados para a melhoria e a recuperação da qualidade do meio ambiente.” [Fonte: <http://www.investe.sp.gov.br/por-que-sao-paulo/qualidade-de-vida/meio-ambiente/>]

Devido a grande preocupação com os índices pluviométricos no estado de São Paulo, o Governo Federal em conjunto com o Governo do Estado de São Paulo contratou um grupo de renomados cientistas para elaborarem um conjunto de medidas e desenvolvimento de alternativas que visem garantir a diversidade da fauna e da flora desse importante estado. A principal medida sugerida pelos cientistas é a construção de hidrelétricas para fornecimento de energia para o estado (como objetivo secundário e armazenar água para um grande equipamento de alta tecnologia que, após a produção de energia, otimiza a evaporação da água em 50%. Após um mês de testes, com a construção de algumas hidrelétricas e instalações do aparelho TAIEA 07 (Tecnologia para Altos Índices de Evaporação de Água – nome atribuído pelos cientistas), observou-se que, segundo dados oficiais de ambos os

governos, o índice de precipitação em todo o estado aumentou, o que comprova que o aparelho utilizado realmente é eficaz e “promove e acelera a formação das chuvas”. Logo, comprovado o sucesso do equipamento, os cientistas revelaram que a tecnologia presente e as condições de uso do equipamento por eles construído é bastante simples e utiliza uma função matemática polinomial do segundo grau  $V(x)$ , onde  $V(x)$  representa o total de água evaporada, em litros, após a otimização, sendo  $x$  a quantidade de água presente no reservatório, ou seja,

- Se o aparelho não for abastecido com água, não existe otimização da evaporação da água.
- Se a quantidade de volume de água presente no equipamento for maior que zero e menor que sessenta mil ( $0 < x < 60000$ ), existe otimização de 50% da evaporação da água.
- Se a quantidade de volume de água presente no reservatório for igual a sua capacidade máxima de 60000 litros de água, devido a questões técnicas, o equipamento não é capaz de otimizar a evaporação da água, logo serão evaporados sessenta mil litros de água.

1 - Considerando que no dia 10 de novembro de 2014 os cientistas forneceram ao equipamento 4000 litros de água, obtendo assim, em litros, 50 % a mais de água evaporada totalizando 6000 litros de vapor, qual o polinômio que descreve  $V(x)$ ?

2 – Devido a grande crise hídrica vivida pelo estado de São Paulo, constatou-se que no dia 03/03/2015 havia apenas 6872,28 litros de água no reservatório. Estime o valor de  $V(x)$  para este dia.

3 – Fatore o resultado encontrado no item anterior.

4 – O custo citado no item anterior pode ser modelado por uma função logarítmica tal que  $100 \ln V(x) = C(x)$ , onde  $\ln$  representa o logaritmo neperiano, calcule o custo considerando que a quantidade  $x$  presente no reservatório seja igual a do item 2, durante dois meses consecutivos e de forma constante. Considere  $\ln 2 = 0,7$ . Após, calcule o valor de  $C(x)$  do item anterior utilizando a série dos logaritmos para  $n = 3$ ,  $n = 5$  e  $n = 7$ . Depois compare o resultado com o resultado do item acima. O que podemos concluir?

#### 4. Atividade

“O primeiro-ministro da Grécia, Alexis Tsipras, apresentou neste domingo (21) por telefone as propostas do país para "tentar um acordo benéfico" para todas as partes, a fim de encerrar o impasse em torno da dívida grega. A tentativa de um novo acerto foi apresentada à chanceler alemã, Angela Merkel, ao presidente francês, François Hollande, e ao presidente da Comissão Europeia, Jean-Claude Juncker. No novo plano, a Grécia mantém os três tipos do Imposto sobre o Valor Agregado (IVA), a 6,5%, a 13% e a 23%, propostos anteriormente. ”

[Fonte: <http://g1.globo.com/economia/noticia/2015/06/grecia-apresenta-proposta-aos-europeus-para-tentar-acordo.html>]

Suponha que, na Grécia, com a nova proposta anunciada pelo Governo para tentar liquidar a dívida que possui, o Imposto sobre o Valor Agregado (IVA) funciona da seguinte forma: todos os habitantes, desde o nascimento até o falecimento, terão que pagar o IVA mensalmente, de modo que, se o indivíduo não tenha condições de saldar o IVA, por qualquer motivo que seja, o seu responsável terá a obrigação legal de quitar o tributo. Ainda, o cálculo para o imposto será dividido por faixa etárias:

- De 0 até 18 anos, a quantia paga será de 6,5% sobre a renda mensal do cidadão ou do seu responsável legal.
- Dos 18 até 65 anos, a quantia paga será de 24% sobre a renda mensal do cidadão ou do seu responsável legal.
- Dos 65 anos em diante, a quantia paga será de 20% sobre a renda mensal do cidadão ou de seu responsável legal.

Além disso, o Governo anunciou, há poucas horas atrás, que além dos dados citados acima, incluirá uma taxa a mais no cálculo do IVA que será sobre a massa corporal de cada habitante (cobrada em conjunto com a taxa sobre a faixa etária). De tal forma que:

- Após o cálculo sobre a renda do cidadão, somar mais 25% do total da massa corporal.

Ainda, para saldar a dívida (SD) bastaria obter o  $\log_{10}^{100} SD$  (do acúmulo do IVA no período estimado pelos economistas do governo grego. Logo, temos o seguinte modelo matemático para saber o total do IVA que deverá ser pago por cada habitante, respeitando os dados da faixa etária a qual ele pertence

$$IVA = TR \times Renda + TM \times Massa \text{ Corporal}.$$

Onde  $TR$  é a taxa sobre a renda do cidadão ou de seu responsável e  $TM$  é a taxa sobre a massa corporal de cada habitante

Na cidade de Atenas, capital da Grécia, que pode ser representada por uma região circular com aproximadamente 50 km de raio, devido à crise que alguns países da Europa vem enfrentando, não temos mais nenhum cidadão com a idade entre 0 até 7 anos, sendo que 68% do total de habitantes é composta pela população idosa e 12% composta por habitantes com idades entre 7 até 18 anos. Toda a população de faixa etária entre 18 e 65 anos possui, incrivelmente, a mesma massa corporal de 80 kg e mesma renda mensal de cinco mil euros, assim como, incrivelmente, todos os cidadãos idosos possuem mesma massa corporal de 100 kg e mesma renda mensal de seis mil euros e, da mesma forma, toda a população entre 7 e 18 anos possui a massa corporal de 60 kg e mesma renda mensal de, também, cinco mil euros. Considere que em cada quilômetro quadrado de área, reside 175 habitantes não importando a sua faixa etária. Considere o valor de  $\pi = 3,1$ .

1 - Logo, qual o total do IVA pago pela população de Atenas a cada mês?

2 – O Governo grego estipulou que seriam necessários 2 anos de acúmulo de IVA para que a dívida (SD) fosse totalmente liquidada. Qual o valor total do IVA em 2 anos? (Suponha que a quantidade de habitantes seja constante, assim como a quantidade de habitantes pertencentes a cada faixa etária).

3 – Qual o valor necessário para que a dívida seja quitada? (Suponha que a quantidade de habitantes seja constante, assim como a quantidade de habitantes pertencentes a cada faixa etária).

## 5. Considerações Finais

As atividades propostas nesta oficina foram elaboradas para integrarem as atividades do projeto PIBID no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Buscando cumprir com os objetivos do projeto, construíram-se situações problemas que foram aplicadas em grupos de alunos do Ensino Médio numa escola da rede pública de ensino do Distrito Federal.

Os conteúdos matemáticos escolhidos para as atividades são relevantes para os estudantes do ensino médio e, se bem apreendidos, servirão de auxílio para o uso em sala de aula em suas matérias, já que é um conteúdo ensinado na Rede Pública do Distrito Federal.

Para o bom andamento durante a aplicação das atividades, é importante a atenção e a interpretação dos enunciados. Assim, contribuimos para o desenvolvimento da leitura e interpretação dos problemas.

Concluimos que as atividades propostas pela oficina contribuem para o alcance dos objetivos colocados inicialmente e que elas poderão auxiliar educadores matemáticos que buscam alternativas para a aula tradicional. A oficina traz uma sugestão de trabalho que poderá ser aplicada em salas de aulas de outros educadores. Esperamos que ao serem aplicadas, sejam motivadoras e os estimulem na construção de suas próprias atividades.

## 6. Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), já que este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, subprojeto Matemática, nas dependências da Universidade de Brasília (UnB).

## 7. Referências

- ÁVILA, Geraldo. *Cálculo 1: funções de uma variável*. LTC, 1981.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Papyrus Editora, 1996.
- DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. *Álgebra moderna*. Atual, 2003.
- DÖRR, Raquel Carneiro. *Uso de grupos colaborativos: relato de experiências e perspectivas de uso no ensino superior*. Actas del VII CIBEM ISSN, v. 2301, n. 0797, p. 6606.
- FIorentini, Dario. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*. Zetetiké, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-38, 1995.
- GREBOT, G., GASPAR, M.T. J. & DÖRR, R. C. *Experiências matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília, Atas VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática: Montevideo. 2013*.
- PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro. Interciência, 1995.