TRIGONOMETRIA, RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTOS CIRCULARES E GRÁFICOS COM A AJUDA DO GEOGEBRA

Daniel Rodrigues Topanotti

Mestrando do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

danieltopa@gmail.com

Resumo

Esse artigo relata a experiência de uma abordagem alternativa de ensino de trigonometria que prioriza a compreensão da relação entre movimentos circulares em diferentes velocidades com a formação gráfica gerada por esses movimentos. Com o auxílio do software Geogebra, diferentes movimentos foram criados, o que facilitou a investigação gráfica por parte dos alunos. A atividade foi realizada no laboratório de informática da escola e é teoricamente embasada pela negociação de significado onde constantemente houve investigação por parte dos alunos e intervenções significativas por parte do professor.

Palavras-chave: movimentos; circulares; gráficos; trigonométricos; GeoGebra.

1- Introdução

Na busca de inspiração para digitar as primeiras palavras desse relato, procurou-se refletir sobre os impactos sociais provocados pela popularização dos computadores na sociedade. Antigamente se debatia sobre o provável e iminente período de desemprego que se aproximava com a popularização dos computadores. Achava-se que os homens seriam preteridos pelas máquinas que poderiam trabalhar com muita mais rapidez, precisão e de forma não assalariada. Hoje, sabe-se que a história se desenvolveu por outros caminhos. A máquina que fora considerada provável inimiga do trabalhador passou a ser grande aliada na transformação da sociedade.

Hoje fica difícil imaginar a sociedade longe dos computadores. Se o computador ajudou o homem a melhorar a sociedade e hoje está presente em muitos setores, então o computador pode ser significativo no desenvolvimento intelectual em sala de aula.

Dessa forma, esse trabalho busca relatar uma forma alternativa de ensinar funções trigonométricas com o auxílio do programa de geometria dinâmica GeoGebra. O trabalho consiste em criar uma série de movimentos circulares com diferentes velocidades e propor uma investigação gráfica. O objetivo dessa abordagem alternativa é a construção do significado de funções trigonométricas, pois, na abordagem tradicional, muitas vezes esse objetivo não é alcançado.

Nota-se que o ensino de funções trigonométricas, apresentado em muitos livros didáticos atuais, se limita a relacionar as transformações de funções na forma algébrica com a forma gráfica, deixando de lado o significado que elas podem apresentar. O livro didático *Matemática parte 2* de *Luiz Roberto Dante*, por exemplo, aborda deslocamentos gráficos basicamente de duas formas: primeiro atribui valores à variável independente para se obter amostras de pares ordenados do novo gráfico; em seguida, generaliza o papel das constantes nas funções trigonométricas em sua forma geral $f(x)=a+b.sen(cx+d)$. Acredita-se que o significado de funções trigonométricas deveria receber importância maior nessa abordagem.

O estudo de funções se desenvolveu a partir de problemas que apareceram ao longo da história, grande parte sobre astronomia e navegação. A inspiração gerada por problemas reais desencadeou esse estudo teórico que hoje tem grande importância na modelagem de fenômenos periódicos, como variação de temperaturas, comportamentos das marés, vibrações sonoras, pressão sanguínea arterial ou até mesmo o funcionamento de um motor.

Problemas cotidianos inspiraram os homens a desenvolver parte da matemática. Ensinar trigonometria de forma mecânica e limitar-se a relacionar funções na forma algébrica com a forma gráfica empobrece o ensino e limita a capacidade criativa dos alunos.

Acredita-se que, se os alunos são capazes de investigar movimentos circulares, então eles são capazes de interpretar outros movimentos circulares presentes no cotidiano. Dessa forma se desenvolveu a prática que será relatada nesse artigo.

Diferentes movimentos foram criados pelos alunos, cada movimento serviu de inspiração para investigações gráficas. Posteriormente os gráficos foram corrigidos pelo próprio programa e, somente por fim, os alunos generalizaram o papel dos coeficientes $f(x)=a+b.sen(cx+d)$ na função trigonométrica.

A atividade é teoricamente embasada pela negociação de significado. Constantemente, houve investigações por parte dos alunos e intervenções significativas por parte do professor.

As atividades relatadas nesse trabalho, posteriormente, serão utilizadas pelo autor para desenvolver uma pesquisa. Espera-se da pesquisa a criação de um material que oportunize outros professores a trabalhar funções trigonométricas com significado.

2. Negociação de significado

Voigt (1994) assinala que a negociação do significado matemático é uma condição necessária à aprendizagem de Matemática quando o conhecimento prévio dos alunos é diferente do conhecimento que os professores pretendem que eles venham a ter. Segunda Meira (1996) a negociação de significado explora as tensões entre o ensino de formalismos e convenções matemáticas e o processo dinâmico de produção de significado durante a atividade matemática escolar. Nesse processo o professor desempenha um papel importante de decidir "quem fala", "quando fala" através de ações que podem incluir, desconsiderar ou adiantar novas questões.

3. Tecnologia na aprendizagem

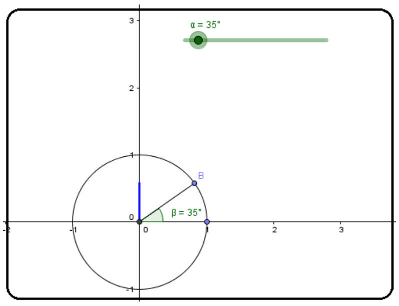
As tecnologias transformaram a sociedade moderna, e dependência gerada, conforme o seu desenvolvimento, pode ser percebida quando, por qualquer que seja a razão, somos obrigados a ficar longe delas. Conforme Borba e Penteado,(2003, p 87) no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares. Se diariamente existe contato necessário entre pessoas e tecnologia, não há razão para manter os alunos avulsos a essa tendência deixando-os presos a aulas tradicionais com baixo rendimento.

Nessa abordagem alternativa, evidencia-se a relação entre movimentos circulares e trigonometria, criando significado à teoria. Para isso, foi utilizado o software de geometria dinâmica GeoGebra. Esse programa tem grande potencial, pois não se limita a um simples executor de tarefas, mas sim, auxilia os alunos a construírem o conhecimento, dando-lhes liberdade de criação.

Aplicação

Esse trabalho foi realizado com duas turmas da 3° série do ensino médio do colégio Israelita Brasileiro, em Porto Alegre, no laboratório de informática. No turno da manhã, os alunos foram dispostos em duplas, onde cada dupla construiu e trabalhou com o seu próprio círculo. A atividade durou 10 períodos de 45 minutos em cada turma.

O trabalho teve início com o conceito de círculo trigonométrico e a construção do mesmo no GeoGebra. Foi entregue aos alunos uma sequência de procedimentos para a construção de um ponto B que girava sobre a circunferência trigonométrica referenciado por um ponto seletor α. Esse ponto foi projetado no eixo y e definido como seno do ângulo seletor, como indica a figura abaixo.



Círculo trigonométrico com o ponto referenciado pelo ponto seletor

Nesse momento, foi apresentado aos alunos o conceito geométrico da função y=sen(x) no círculo trigonométrico. Alguns conceitos que não são objetivos principais dessa pesquisa foram retomados. Para isso, os seguintes questionamentos foram feitos:

1) O comportamento da função seno no 1° quadrante é crescente, decrescente ou contínua?

2) Qual o sinal da função seno no primeiro quadrante?

3) Responda as perguntas 1 e 2 para todos os quadrantes.

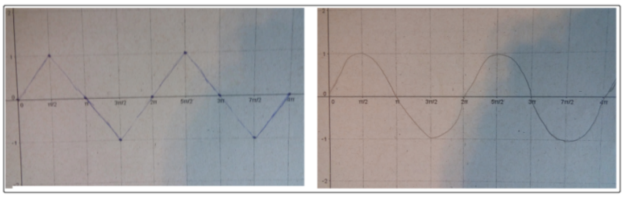
4) É possível determinar o valor da função sobre os eixos coordenados, se sim, diga quanto vale.

Foi concedido um tempo de 10 minutos para que os alunos, em duplas, discutissem as questões entre si. Enquanto os alunos respondiam as questões, a animação da função y=sen(x) era repetida pelo programa em cada computador. Após expirar o tempo, os seis grupos responderam em voz alta as suas conclusões.

Quanto ao sinal da função nos quadrantes, não houve erros, todos os grupos responderam corretamente. A justificativa apresentada por um dos grupos era o fato do círculo trigonométrico estar centrado no eixo cartesiano, logo a função seria negativa nos quadrantes que ficavam abaixo do eixo x, e positiva nos quadrantes que ficavam a acima do eixo x. Antes disso, durante o tempo estimado para a investigação, ocorreu uma observação interessante por parte de uma aluna. Ela relatou que o sinal no primeiro quadrante era positivo e no segundo quadrante era positivo e negativo, assim como no terceiro era negativo e no quarto era positivo e negativo. O professor a questionou sobre os motivos pelo qual ela acreditara que, no segundo e no quarto quadrante, a função seno poderia ter dois sinais. A aluna respondeu que o ponto tinha coordenada x negativa e coordenada y positiva no segundo quadrante; no quarto, o mesmo ocorria ao contrário. O professor teve de recapitular o objetivo que era observar a projeção desse ponto no eixo x, e não as coordenadas do ponto em movimento. Após essa intervenção, o grupo concluiu acertadamente o sinal nos quadrantes. Quantos aos valores da função seno nos eixos coordenados, não houve dúvidas, todos associaram corretamente.

Na próxima tarefa, foi proposto às duplas que tentasse desenhar um gráfico que representasse o comprimento da projeção em função do ângulo seletor. O orientador explicou que o comprimento deveria ser representado no eixo y enquanto que a variação angular α deveria ser representada no eixo x. A animação do GeoGebra foi posta em atividade novamente para auxiliar na elaboração do gráfico. Para essa tarefa foi estimado um tempo de 10 minutos, todos olhavam com frequência para os computadores a cada rabisco que esboçavam no papel. A borracha foi muito utilizada até que um resultado final fosse apresentado.

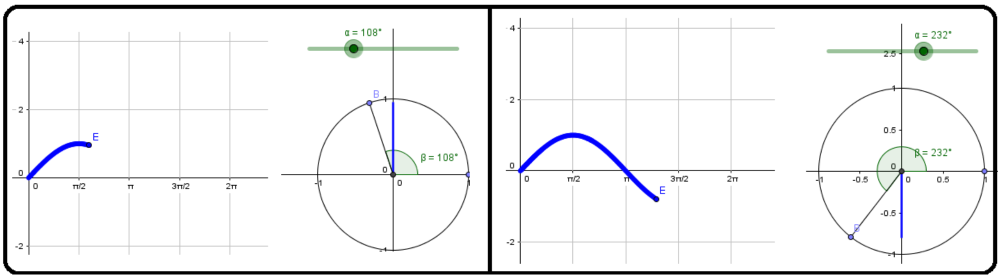
Do ponto de vista investigativo, a maior parte chegou próximo do que deveria ser o gráfico da função y=sen(x), pois todos observaram corretamente a estrutura do gráfico. Entretanto, alguns observaram a variação de velocidade do ponto e por isso desenharam o gráfico curvo ao se aproximar das extremidades; outros desenharam o gráfico com variação constante, ou seja, reto ao se aproximar das extremidades, como nos dois exemplos abaixo:



Dois esboços apresentados por dois alunos referentes à primeira investigação.

O professor questionou a turma qual modelo de gráfico seria mais adequado a modelagem do problema. Um aluno respondeu que seria o gráfico arredondado, pois a partícula não estava em MRU. A observação do aluno foi interessante, pois mostra que houve interação entre disciplinas diferentes que exploravam situações problemas semelhantes. O professor ainda questionou porque a partícula não estava em MRU. O aluno respondeu que havia mudança de velocidade na sua trajetória. O professor acrescentou, em outras palavras, que gráficos retilíneos modelam situações que apresentam variação constante. Como a partícula sofria mudança de velocidade, o gráfico seria arredondado. As intervenções do professor, com o intuito de direcionar a investigação dos alunos para direções certas, são características da negociação de significado.

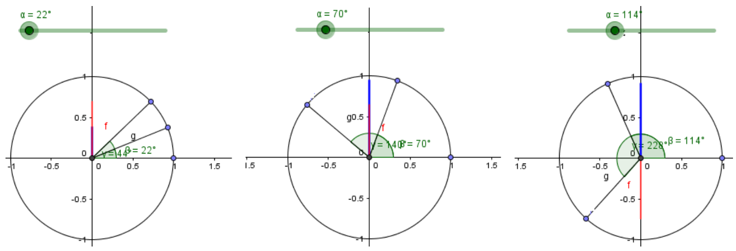
O professor orientou os alunos a programarem o Geogebra para traçar o gráfico ao mesmo tempo em que o ponto *B* se movimentava pela circunferência trigonométrica. Deve-se, para isso, inserir um ponto *E* qualquer numa janela de visualização 2, e redefinir as coordenadas para *(α, sin(α))*. Além disso, é necessário habilitar o rastro. Dessa forma, foi iniciada a movimentação de *α*, e o gráfico foi traçado simultaneamente com a variação do ponto, observe a figura abaixo:



Correção da atividade 1

Juntos, os alunos fizeram uma análise do comportamento e corrigiram os gráficos. O recurso didático computacional mostrou-se um facilitador nesse momento. Pois era possível verificar instantaneamente a curva do gráfico conforme o pondo se movia pela circunferência.

O próximo passo foi criar um ponto *F* que girasse pela circunferência trigonométrica formando um ângulo *θ* de forma que *θ=2α*. O mesmo procedimento utilizado para a criação do ponto *B* foi utilizado para a criação do ponto *F*, inclusive a criação de uma nova projeção sobre o eixo y com cor diferenciada da anterior. A diferença entre os dois pontos é que o ponto *E* girava sobre a circunferência ao mesmo passo do seletor *α* através da orientação *"Girar[B, α, A]"* enquanto que o ponto *F* se movia com o dobro da velocidade através da orientação *"Girar[B, 2α, A]"*, veja:



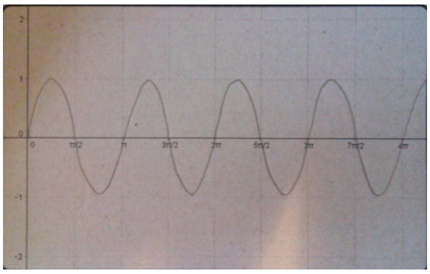
Novo ponto sobre a circunferência trigonométrica com o dobro da velocidade

Agora o novo desafio para os grupos era descobrir o gráfico gerado pela projeção do ponto *F* em função da variação do seletor *α*. Foi concedido um tempo de 20 minutos para que os grupos apresentassem algumas sugestões. Muitos grupos apontaram que o gráfico não mudaria, pois os comportamentos se repetiam: quando

$\theta=90°$, a projeção era 1, como o anterior; quando $\theta=180°$, a projeção era 0, exatamente como o anterior; e assim com todos os pontos.

O professor teve de reforçar que o gráfico deveria modelar o comportamento da projeção do ponto F em função do seletor α e não de θ como muitos estavam pensando.

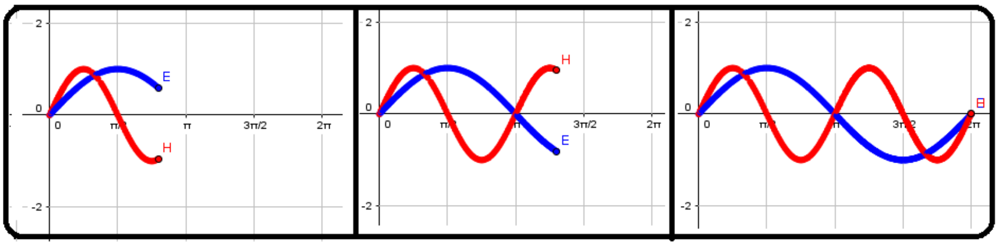
Após essa intervensão, um esboço do gráfico foi feito por cada grupo. Todos perceberam que o novo gráfico ficaria mais comprimido em relação ao anterior. Quando o ponto E completa meia volta, o ponto F já completou uma volta inteira, justificou um dos alunos, por isso, quando o ponto E termina o seu percurso, o ponto F termina a sua segunda volta, veja o resultado obtido por um aluno



Esboço do gráfico referente a segunda atividade feito por um aluno

Na forma apresentada em muitos livros didáticos, onde o ensino se limita a relacionar a forma algébrica com a forma gráfica, boa parte dos alunos se equivoca e acredita que o período da função g(x)=sen(2x) seja o dobro do período da função f(x)=sen(x). O problema ocorre pois, analogamente, os alunos relacionam com as transformações gráficas ocorridas na dilatação da imagem de g(x)=2sen(x) e acreditam que o mesmo deva acorrer no período.

Para corrigir os gráficos os alunos foram orientados a criar um ponto H na janela de visualização 2 e programá-lo a traçar o gráfico da nova projeção.



Correção da segunda atividade

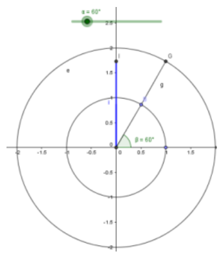
O professor resolveu problematizar um pouco mais editando o ponto F que antes girava com referência $\theta=2\alpha$ para girar com referência $\theta=4\alpha$. Questionou os alunos o que ocorreria com o gráfico dessa partícula. Ao analisar o movimento comparativo entre os dois pontos, os alunos concluíram rapidamente que o novo gráfico gerado pelo ponto

F aconteceria 4 vezes ao passo que o gráfico gerado pelo ponto E aconteceria uma, por isso o gráfico de reduziria a quarta parte.

O professor observou chamar a atenção dos alunos o número de voltas que a partícula mais rápida executava até a partícula inicial completar uma volta. O professor orientou que o número de voltas da partícula, ou o número oscilações do gráfico em um determinado instante, era definido como a frequência da curva. Portanto, se no intervalo 2π, a função y=sen(x) executava uma oscilação, a função y=sen(2x) executava duas oscilações, e a função y=sen(4x) executava quatro oscilações, o que representava a constante *c* na função y=sen(cx), perguntou o professor. Facilmente ocorreu a conclusão que *c* representava a frequência da curva no intervalo 2π. Juntos, a turma e o professor concluíram que se o período por definição é o intervalo que a curva leva para fechar uma oscilação completa, logo seria uma relação invertida. A função y = sen(x) leva 2π para completar uma oscilação, a função y = sen(2x) levaria metade do intervalo anterior, ou seja π, enquanto que y = sen(4x) levaria a quarta parte ou seja π/2.

De forma análoga, verificou-se os casos onde novas partículas foram geradas com metade da velocidade e a quarta parte da velocidade. Esses casos foram resolvidos sem problemas pelos alunos, pois ,os mesmos já haviam compreendido as relações entre velocidade, período e frequência.

O novo desafio agora era explorar as variações em relação à variável y. Para isso se construiu uma circunferência concêntrica à circunferência trigonométrica com o dobro do raio. Sobre essa nova circunferência foi criado uma partícula que girava com a mesma velocidade da partícula inicial *E.* O movimento vertical dessa partícula foi projetado no eixo y. O trabalho dos alunos após a construção era modelar o comprimento da projeção em função do ângulo seletor α.



Círculo de raio 2 concêntrico com a circunferência trigonométrica

Os alunos observaram que o período não mudaria. Verificaram também que as alturas alcançadas pela projeção eram maiores, por isso, a maior parte deles conseguiu concluir o gráfico corretamente.

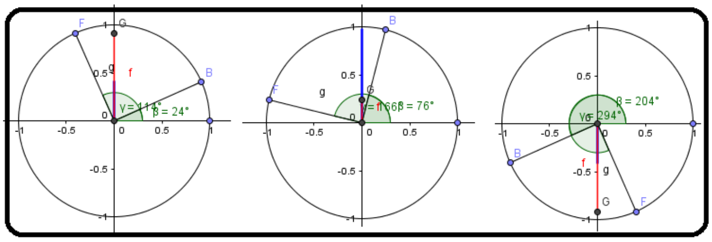
Uma aluna questionou a definição da função seno referenciada na circunferência trigonométrica de raio 1. Nesse exemplo o seno ultrapassava os limites da circunferência trigonométrica, como era possível chamá-lo de seno?

Interessante o questionamento da aluna, mostra grande compreensão do assunto. O professor comentou com a turma que a resposta estava no conceito de composição de funções. Se representássemos a função seno por f(x)=sen(x), a função que modela o movimento dessa nova partícula poderia ser representada por g(x)=2f(x). Nota-se que a função f(x) continua limitada na circunferência, e a função g(x) multiplica todos os seus resultados por 2.

O professor perguntou se o círculo concêntrico tivesse metade do raio trigonométrico, o que ocorreria com as alturas do gráfico? Os alunos responderam que as alturas seriam divididas pela metade. Nesse momento foi feito uma generalização para a representação de *k* na função g(x) = k.sen(x).

Os alunos fizeram as correções dos gráficos pelo GeoGebra e foram para a próxima parte do trabalho.

Na próxima atividade, os alunos construíram o segundo ponto sobre a circunferência com a mesma velocidade do ponto inicial E, entretanto esse novo ponto estaria π/2 a frente do ponto *E*. O novo ponto continha o comando *Girar[C, α + π / 2, A]*.



Criação da partícula deslocada π/2 a frente

Alguns questionamentos foram feitos para ajudar os alunos na investigação. O professor questionou os alunos: há mudança no período, na imagem, na velocidade e na amplitude? Alguns responderam que não. O professor questionou, então que tipo de alteração ocorreria no gráfico? Os alunos começaram a investigação. O professor, nesse momento da aula, passou pelos grupos para observar os trabalhos. O professor percebeu que muitos alunos coletavam amostras de pares ordenados, principalmente quando a projeção chegava nos eixos coordenados. Por exemplo, um grupo relatou que quando o seletor estava a 0°, a nova partícula estava sobre o eixo y e teria comprimento 1. Quando o seletor estava a 90° o ponto estava sobre o eixo x, com comprimento zero.

Todos esses valores foram marcados no gráfico e, dentro do tempo de cada um, todos os grupos conseguiram um resultado final.

Uma dúvida geral surgiu, quase todos os grupos, embora tivessem desenhado o gráfico certo, não desenharam o gráfico no primeiro quadrante. Isso ocorre pois, o ponto seletor parte de 0° e a nova partícula parte de 90°.

O professor teve de intervir: se o ponto seletor partisse de -90°? Muitos não sabiam onde seria o -90°, tampouco se era possível estipular esse exemplo. O professor teve de orientar que o sinal negativo do ângulo, nesse caso, representaria o sentido contrário. Nesse caso, como o comportamento é periódico, bastaria observar uma volta qualquer da partícula e saberíamos que a mesma se comportaria assim infinitamente.

Para se fazer entender, o professor mudou a referência do ponto seletor para variar de -720° até 720°.

Esse gráfico foi o mais confuso, talvez o professor devesse utilizar mais exemplos de partículas deslocadas, mas, por falta de tempo no planejamento, o professor resolveu fazer intervenções em voz alta. Foi concluído pelos alunos que as duas partículas tinham o mesmo comprimento de onda e a mesma amplitude. Porém, a nova partícula estava deslocada 90° a frente. Então, elas teriam o mesmo comportamento gráfico, com a diferença que o gráfico da nova partícula se formaria primeiro. Por isso podemos considerar que o gráfico de $y=sen(x+\pi/2)$ é o mesmo que $y=sen(x)$ deslocado $\pi/2$ para a esquerda.

A partir disso, outros exemplos foram criados e as observações do professor foram compreendidas pelos alunos.

Por falta de tempo, o professor teve de trabalhar os deslocamentos verticais e a mudança do sentido do movimento da partícula no projetor de forma expositiva. Os gráficos gerados pela projeção feita no eixo x, ou seja, a função cosseno, foram trabalhados em sala de aula de forma expositiva também.

Considerações finais

O balanço final dessa experiência foi bastante positivo. Os alunos mantiveram o foco do início ao fim do trabalho sempre buscando descobrir as características presentes nos movimentos circulares e a suas representações gráficas. Os alunos não somente conseguiram boas aproximações para os gráficos, como também concluíram corretamente todas as funções estabelecidas.

Essa forma alternativa que valoriza o significado das funções trigonométricas não se opõe ao modelo atualmente apresentado nos livros didáticos, apenas o complementa. Ao final das investigações, é aconselhado que o professor retome as conclusões e fortaleça a relação dos coeficientes da função algébrica y=a+b.sen(cx+d) com a sua forma gráfica e com o círculo trigonométrico.

Após essa dinâmica, o professor realizou uma série de exercícios de aplicação sobre funções trigonométricas e verificou que os alunos conseguiam relacionar mais facilmente as aplicações com as investigações apresentadas em aula. Como exemplo, se pode citar um exercício que apresentava marés altas e baixas e o horário do dia que elas ocorriam. Os alunos relacionaram o comportamento da maré com a projeção seno investigada em aula e concluíram acertadamente a questão. Essa relação foi bem estabelecida com outros exercícios que exploravam movimento de um pistão, inspiração e expiração, notas musicais, movimentos de satélites entre outros.

As relações foram investigadas pelos alunos em uma aula estruturada por um processo interativo que envolve aluno e professor, esse processo é conhecido como negociação de significado. Em sala de aula, a todo momento, os alunos construíam idéias e desconstruíam outras, conflitavam argumentos sempre na busca da interpretação dos movimentos circulares. O professor era o mediador que assistia a tudo e ao mesmo tempo interferia para justapor o conhecimento já adquirido pelos alunos com os conhecimentos novos que estavam sendo desenvolvidos por eles.

O papel do professor nesse trabalho, vai ao encontro do que refere Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999, p. 57): o saber produzido pelos professores na prática é um saber reflexivo, plural e complexo, provisório, contextual, afetivo ético-político (pois tem como objeto de trabalho seres humanos), cultural, formando uma teia, mais ou menos coerente e imbricada, de saberes científicos – oriundo das ciências da educação, dos saberes das disciplinas, dos currículos – e de saberes da experiência e da tradição pedagógica.

O Geogebra mostra-se um programa capaz de produzir conhecimento. Não somente por produzir objetos que foram utilizados nesse processo investigativo, mas por ser uma ferramenta capaz de dar liberdade a criatividade dos alunos. Além disso, o software é programado por construções matemáticas o que permite verificar a veracidade das conclusões estabelecidas. Esse fato fica evidenciado quando os alunos programam alguns pontos para traçarem os gráficos das funções e, assim, se pode verificar as conclusões.

Essa não é uma abordagem completa sobre ensino de trigonometria. As demais funções trigonométricas podem ser trabalhadas de forma análoga. Certamente seria interessante a criação de novos movimentos que possam ser modelados por outras famílias de funções.

Referência bibliográfica

BORBA, M. C., & PENTEADO, M. G. (2003). Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte: Autentica.

FIORENTINI, D., NACARATO, A. M. & PINTO, R. A. (1999). Saberes de experiência docente em matemática e educação continuada. Quadrante: Revista Teórica e de Investigação. Lisboa: APM, v.8. (pp.33-59).

MEIRA, L (1996). Aprendizagem, ensino e negociação de significado na sala de aula. In: NOVAES, M.H.et AL. (orgs.). Psicologia na Educação: articulações entre pesquisas, formação e prática pedagógica. Cadernos da ANPEPP.v.1, n.5. (pp.95-115).

VOIGT, J. (1993) Ascribing mathematical meaning to empirical phenomena: Custom and dynamics of classroom discourse. Artigo apresentado na Conference on the culture of the Mathematics classroom.