CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA À LUZ DA FORMAÇÃO CONCEITUAL E DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Lucas Rafael Pereira Silva
Universidade Federal de Uberlândia
lucasfacip@gmail.com

Odalea Aparecida Viana
Universidade Federal de Uberlândia
odalea.viana@.ufu.br

Resumo:
O presente trabalho relata uma experiência nas aulas de matemática em que se aplicou uma sequência didática para o ensino de congruência de triângulos, com a utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, de modo a permitir aos alunos manipulações e previsões além da formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica produzidos. A sequência foi formada por sete atividades e aplicada a uma turma de aproximadamente 35 alunos do 8º Ano em 14 aulas regulares do Ensino Fundamental. Considera-se que as atividades propostas puderam favorecer a compreensão dos casos de congruência de triângulos bem como o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos e que a incorporação das novas tecnologias pode propiciar, além do interesse pelas aulas de Matemática, um processo contínuo de relação com o saber escolar e suas experiências.
Palavras-chave: congruência de triângulos; formação conceitual; habilidades geométricas; registros de representação semiótica; *software* GeoGebra.

1. Introdução

No âmbito escolar, destaca-se a complexidade do processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos no nível básico. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) ressaltam que a geometria desempenha um papel fundamental no currículo na medida em que se possibilita ao aluno o desenvolvimento de um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

No ensino fundamental, um dos temas que exemplificam o avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico é a congruência de triângulos, apesar do pouco número de trabalhos de pesquisa que se dedicam ao assunto. A compreensão dos casos de congruência a partir da comparação de lados e ângulos dos triângulos exige o estabelecimento de relações que pode ser facilitada pelo uso de diversas formas de representação. A utilização de softwares de geometria dinâmica é uma das possibilidades de recursos para o ensino dos conceitos e procedimentos e, entre eles, destaca-se o GeoGebra. Trata-se de um software matemático livre que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo.

Conforme pondera Borba (2010), os softwares geométricos possibilitam ao aluno enxergar as diferentes variações de uma construção geométrica, além de inferir propriedades das figuras, verificar teoremas e chegar a generalizações – características que têm sido apontadas por professores que utilizam este recurso em sala de aula.

Duval (2012) afirma que, para construir uma figura utilizando um *software* de geometria, é preciso antecipar a desconstrução dimensional da mesma. Assim, por exemplo, para construir um triângulo na tela do computador, o aluno deve reconhecer suas unidades figurais e, então, descontruir mentalmente a figura em pontos (dimensão 0) e em segmentos de reta (dimensão 1). Desta forma, pode-se considerar que as sequências de comandos do GeoGebra, utilizadas nas construções de figuras geométricas podem revelar o processo de apreensão operatória de uma figura, importante na aprendizagem da geometria.

Diante do exposto, questionou-se se uma proposta didática direcionada a alunos do ensino fundamental e contendo atividades a serem realizadas no GeoGebra contribuiria para o ensino de congruência de triângulos.

Assim, este trabalho tem como objetivo analisar uma sequência didática para a formação conceitual dos casos de congruência de triângulos que foi aplicada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Entre as atividades, propôs-se a utilização do software GeoGebra para que os alunos pudessem realizar manipulações e previsões de modo a favorecer a aprendizagem dos conceitos envolvidos. O trabalho tem como base aspectos teóricos acerca do pensamento geométrico, conforme Van Hiele (1981) e da atividade cognitiva em geometria desencadeada pela formação, tratamento e conversão de registros de representações semiótica, na perspectiva de Duval (2009, 2012).

2. O modelo Van Hiele e os níveis de pensamento geométrico

O modelo de Van Hiele (1986) procura explicar o modo de pensar dos alunos quando aprendem geometria. A teoria trata de níveis hierárquicos de formação conceitual e de desenvolvimento de habilidades geométricas, sendo utilizada tanto para avaliar a aprendizagem dos alunos nesse conteúdo, como para orientar a prática pedagógica do professor.

O modelo de pensamento geométrico em cinco níveis de compreensão: “visualização”, “análise”, “dedução informal” (ou ordenação, ou síntese, ou abstração), “dedução formal” e “rigor”, sugere que os alunos avancem nesta sequência hierárquica no processo de aprendizagem conceitual em geometria.

O primeiro nível é o nível básico em que os alunos reconhecem os conceitos geométricos como entidades totais, não sendo identificadas as suas partes ou suas propriedades. Por exemplo, neste nível o aluno pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas.

No Nível 2, da Análise, os alunos passam a identificar as características das figuras, reconhecendo-as por meio de análise de algumas propriedades. Por exemplo, neste nível o aluno seria capaz de perceber os lados opostos e, possivelmente, até que as diagonais de um retângulo são congruentes, mas não notaria como os retângulos se relacionam com os quadrados ou com os triângulos retângulos (CROWLEY, 1994, p.3). Em outras palavras, o aluno não é capaz de explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre as figuras e não entende as definições.

Já no Nível 3, da Ordenação, os alunos são capazes de reconhecer propriedades dentro de figuras. Por exemplo, num quadrilátero, eles podem reconhecer e concluir que, se os lados opostos são paralelos, então necessariamente os ângulos opostos são iguais. Podem também reconhecer propriedades entre as figuras: um quadrado é reconhecido como um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo. Entretanto, nesse nível o aluno pode não ser capaz de explicar porque as diagonais de um retângulo são congruentes.

No Nível 4 (dedução), o aluno passa a compreender o significado de dedução como uma ferramenta para estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático; é capaz de distinguir uma afirmação e sua recíproca, de construir demonstrações, além de saber o papel de axiomas, postulados, teoremas e demonstrações.

Finalmente, no Nível 5 (rigor), é possível entender geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes, apesar de este nível mais avançado raramente ser alcançado por alunos do Ensino Médio.

Vários teóricos afirmam que o modelo de Van Hiele pode ser uma espécie de avaliador do pensamento geométrico dos alunos, podendo ser utilizado pelos professores para verificar o progresso dos níveis de formação .

3. Os registros de representação semiótica de Raymond Duval

Para Duval (2009), a distinção entre um objeto e sua representação torna-se um ponto estratégico na atividade matemática, já que, como os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, suas diversas representações semióticas são absolutamente necessárias para sua compreensão.

O autor (2009, 2012) apresenta a necessidade da mobilização de muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) na atividade matemática. Segundo sua teoria, esta parece uma condição necessária para que os objetos matemáticos não estejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.

Para que uma representação seja considerada um registro de representação semiótica é necessário atender às características das três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: formação, tratamento e conversão.

A formação é o processo de produção do registro de representação, ou seja, a enunciação de uma frase, a composição de um texto, o desenho de uma figura geométrica, a elaboração de um esquema, a expressão de uma fórmula, etc. Esta formação implica na seleção de relações e dados no conteúdo a representar e se faz em função de unidades de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto.

O tratamento de uma representação é a transformação desta no mesmo registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna do registro. Um exemplo é o tipo de tratamento particular para as figuras geométricas.

Por fim, a conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando uma parte somente do conteúdo da representação inicial ou a totalidade. Um exemplo seria a ilustração que é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A descrição é também uma conversão de uma representação verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. Entretanto, a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento, devido à exigência que as unidades significantes propostas para cada registro sejam bem descriminadas.

Há ainda para Duval uma distinção necessária entre desenho e figura. Segundo Duval (2009), o desenho seria "a configuração particular que é mostrada [enquanto] a figura seria as propriedades do objeto representado pelo desenho ou, ainda, a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto" (p.91). Essa diferenciação explicaria parte das dificuldades dos alunos em geometria já que "a figura é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade; essas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos" (Duval, 2009, p. 91).

Segundo Duval (2012), para um mesmo desenho, é possível que o professor e o aluno tenham hipóteses conceituais diferentes, uma vez que a interpretação das figuras envolve diferentes tipos de apreensão, em que se destacam as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras. Assim, na chamada apreensão operatória (tratamento) de uma figura, duas classes de operações são definidas: as operações mereológicas de reconfiguração e as de desconstrução dimensional.

As operações de desconstrução dimensional das formas (nD→(n-1)D), segundo Duval (2012) permitem operar sobre as formas que conhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista. Viana e Boiago (2015) citam, como exemplo, o caso de uma figura tridimensional (*3D*), em que a desconstrução refere-se a identificar as faces bidimensionais (*2D*) de um poliedro. No caso de uma figura plana (*2D*), a identificar, por exemplo, os lados de um polígono (*1D*), ou seus vértices (*0D*).

De acordo com Duval (2009) o processo de desconstrução dimensional está presente em todo raciocínio e em toda explicação em relação às figuras em geometria. Assim, tanto as atividades escolares de desenho geométrico com régua e compasso, quanto as etapas de construção de desenho geométrico com a utilização do software GeoGebra na tela do computador – este devido a escolha do comando depender da forma figurativa e discursiva como esses conceitos são apresentados – dependem das operações de desconstrução dimensional.

Neste sentido, para Duval (2012) este aspecto dinâmico de tratamento de registro propiciado pelo computador desempenha a função de simulação, tornando as representações não discursivas manipuláveis como objetos reais. Assim, podemos considerar que as atividades da presente proposta, ao fazer referência ao software GeoGebra, podem revelar processos de apreensão operatória de uma figura, especificamente da desconstrução dimensional apresentada por Duval.

4. Objetivo

O trabalho tem por objetivo relatar uma experiência nas aulas de matemática em que se aplicou uma proposta didática para o ensino de congruência de triângulos, com a utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, de modo a permitir aos alunos manipulações e previsões além da formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica produzidos.

Pretende-se descrever as atividades desenvolvidas, analisando o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico requerido, bem como as operações figurais empregadas no tratamento das representações produzidas na tela do computador.

A proposta foi escrita na forma de uma sequência didática que, para Zabala (1998), é um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (pag. 18).

5. A sequência

A sequência foi formada por sete atividades e aplicada a uma turma de aproximadamente 35 alunos do 8º Ano em 14 aulas regulares do Ensino Fundamental, sendo utilizados fichas xerocadas, régua, lápis, borracha, caneta, computadores com o *software* GeoGebra, *data show e notebook.*

A primeira atividade da sequência teve por objetivo revisar e/ou obter uma definição formal de polígonos a partir da análise de propriedades de figuras geométricas planas fechadas. O professor entregou aos alunos uma ficha de registros (folha A4 ou fixa xerocada contendo quadros para os alunos preencherem de acordo com as etapas das atividades) e, por meio de apresentação de slides, apresentou aos alunos um conjunto de desenhos contendo polígonos e não polígonos e também pares de polígonos congruentes e não congruentes (Figura 1-a).

Nesta etapa da atividade, alguns alunos pareceriam se encontrar no Nível 1 (Reconhecimento) de formação conceitual definido por Van Hiele (1986): percebiam as figuras apresentadas em sua totalidade, não vendo componentes ou atributos e não conseguiam, portanto, separar os polígonos dos não polígonos. O professor, em diálogo com a classe, recordou a definição de polígonos como sendo figuras geométricas planas, fechadas e formadas por segmentos de retas. Ao recordar as características dos polígonos, o professor passou a desenvolver o trabalho requerendo o Nível 2 (Análise) de pensamento geométrico, em que o aluno deve ser capaz de descobrir e generalizar propriedades, descrever as partes que formam uma figura e enunciar suas propriedades, embora de maneira informal.

(a) (b)

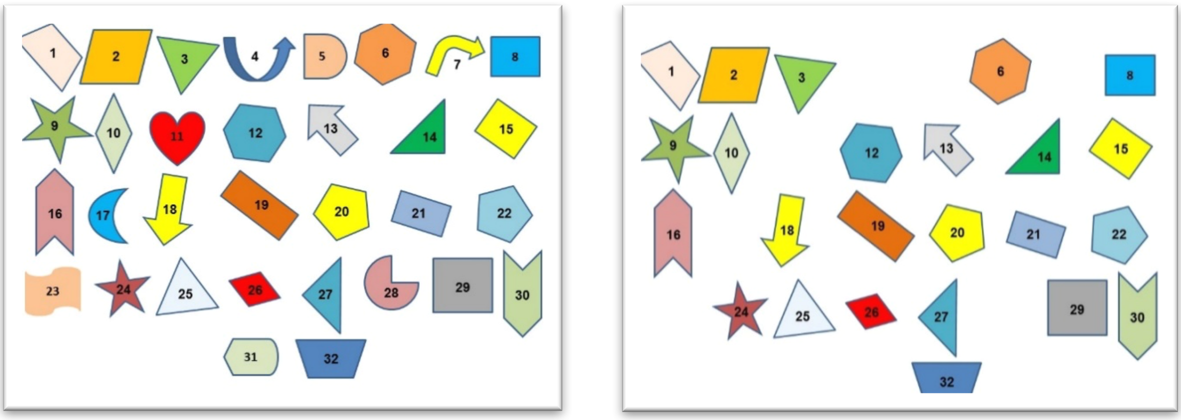

Figura 1. Figuras utilizadas na (a) primeira atividade e (b) na segunda atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor

Após a correção da atividade, o professor deixou na apresentação de *slides* somente os polígonos e solicitou que os alunos descrevessem e também desenhassem na ficha de registros o que eles haviam aprendido nesta aula, buscando representar, na forma discursiva e figurativa, a distinção entre polígonos e não polígonos, o que favoreceu a apreensão do conceito. Para Duval (2012), quando o aluno faz uma representação semiótica (registro) constituída pelo emprego de signos (escrita, desenho), passa a exteriorizar as representações mentais para fins de comunicação visível ou acessível para outrem. Entretanto, estas representações são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento, desempenhando um papel primordial, o explica sua tese de que a *noésis* é inseparável da *semiose.*

A segunda atividade tinha como objetivo identificar, em um conjunto de polígonos, os pares de polígonos congruentes – o que levaria a obter as condições necessárias e suficientes para a congruência de polígonos (Figura 1-b). Os alunos separaram os pares de polígonos “iguais” e os pares de polígonos “parecidos” registrando os resultados na ficha de registros. A tarefa foi facilitada quando o professor simulou que, com recortes de papel, os polígonos iguais seriam aqueles possíveis de serem sobrepostos totalmente. Ao final, os pares corretos foram apresentados por meio de slides dinâmicos que permitiam a rotação das figuras para sobreposição.

Ao final desta atividade, os alunos deveriam identificar as condições necessárias e suficientes para que dois polígonos fossem congruentes, registrando suas conclusões na ficha de registros. Considera-se que, nesta atividade, o nível de pensamento requerido seria o de Nível 3 (Ordenação) de Van Hiele: ao realizar a comparação entre os pares de polígonos congruentes e os de polígonos não congruentes, foi necessário formar classes de figuras relacionando as propriedades já conhecidas. Ao falar “condição necessária e suficiente”, de certa forma, o professor estaria almejando que o aluno começasse a avançar para o Nível 4 (Dedução formal) – em que se compreende o significado das definições precisas em geometria.

A terceira atividade tinha como objetivo obter, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, uma maneira mais prática de construir triângulos. O professor solicitou que os alunos construíssem um segmento $\overline{AB}$ com comprimento fixo de $3\ cm$; em sequência, um segmento $\overline{AC}$ de comprimento $4\ cm$ e, por fim, um segmento de comprimento $\overline{BD}$ de $5\ cm$. Os alunos foram solicitados a tentar formar um triângulo ΔABC fazendo coincidir o ponto C com o ponto D.

Tendo formado o triângulo ΔABC, os alunos foram solicitados a habilitar a função rastro nos pontos C e D e a realizar rotações destes em torno dos pontos A e B. Assim, eles puderam verificar que os conjuntos de pontos que equidistanciavam $4\ cm$ e $5\ cm$ dos pontos A e B eram, respectivamente, a circunferência com centro em A e raio $4\ cm$ e a outra com centro em B e raio $5\ cm$. A Figura 2 mostra o menu do *software* GeoGebra (a) e a construção relatada (b) nesta atividade.

Após verificarem a maneira mais prática de construir triângulos, os alunos registraram o que tinham aprendido utilizando a ferramenta de texto integrada ao próprio GeoGebra. Na perspectiva de Duval (2012), a elaboração de figuras geométricas permite os ‘tratamentos’ dos registros de representação semiótica e revelam alguns processos cognitivos específicos da atividade geométrica, como apreensão perceptual e operatória das figuras. O próprio domínio do menu do *software* (na forma discursiva e figural) está relacionado à capacidade de formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica.

(a) (b)

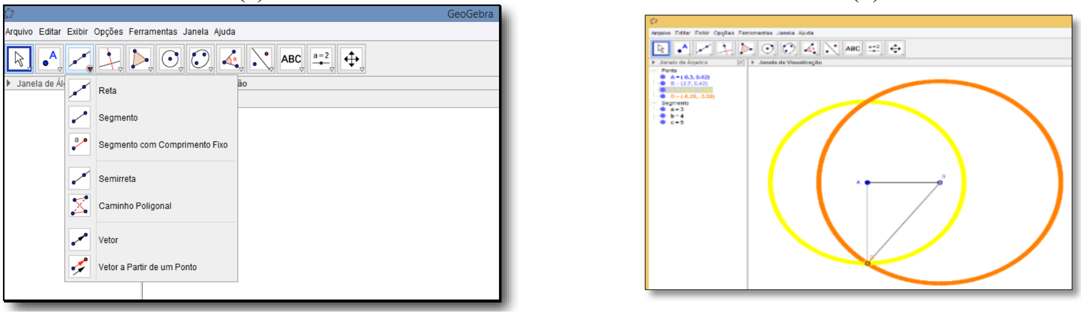

Figura 3. Menu do GeoGebra (a) e Construção do triângulo (b) para a terceira atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor.

A quarta atividade da sequência teve por objetivo levar o aluno a identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, uma primeira condição necessária e suficiente para que dois triângulos fossem congruentes: ter lados correspondentes congruentes (caso LLL). Inicialmente, o professor propôs que os alunos construíssem um triângulo qualquer utilizando a ferramenta polígono e, utilizando uma reta auxiliar e também a ferramenta compasso, construíssem outro triângulo com lados correspondentes congruentes. Após esta construção, os alunos mediram os lados e também os ângulos dos dois triângulos verificando que, de fato, os dois eram congruentes. Como o segundo triângulo foi construído utilizando a ferramenta compasso – que conserva a medida dos lados do primeiro – os alunos puderam obter o primeiro caso de congruência de triângulos.

Os alunos puderam também movimentar (aumentar ou diminuir) os lados de um dos triângulos, percebendo que os ângulos dos dois triângulos também se alteravam. A Figura 4 ilustra a construção realizada no GeoGebra nestas atividades.

(a) (b)

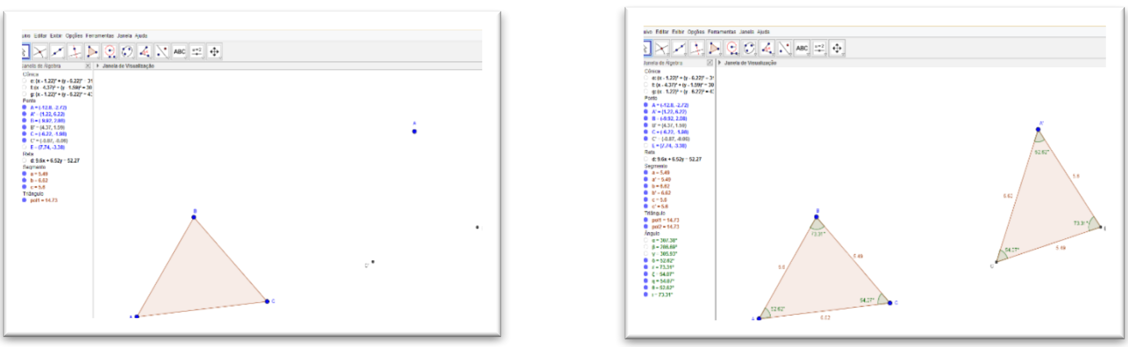

Figura 4. Construções no GeoGebra para (a) quarta atividade e (b) quinta atividade
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Por fim, foi solicitado aos alunos que registrassem o que tinham concluído acerca desta atividade e avançou-se para o segundo caso de congruência de triângulos, o que consistiu a sexta atividade desta proposta. Esta teve por objetivo identificar, por meio de construções utilizando o *software* GeoGebra, outra condição necessária e suficiente para dois triângulos serem congruentes: ter dois ângulos correspondentes congruentes assim como o lado compreendido entre estes ângulos (caso ALA).

Para os alunos tirarem suas próprias conclusões, o professor solicitou que construíssem inicialmente um segmento com comprimento fixo $\overline{AB}$ (lado do primeiro triângulo), um ângulo $\hat{A}$ com amplitude fixa (por exemplo, 60º) e outro ângulo $\hat{B}$ com amplitude fixa (por exemplo, 30º). Com a utilização de retas auxiliares, obteve-se o ponto C genérico para este triângulo. Posteriormente os objetos auxiliares foram ocultados da tela, deixando-se apenas os três pontos que formavam este primeiro triângulo e, por fim, utilizou-se a ferramenta polígono, formando este primeiro triângulo ΔABC. Em seguida, foi realizada a construção de um segundo triângulo $\Delta A'B'C'$, com mesmo segmento com comprimento fixo, e ângulos de 60º e 30º. Foi solicitado aos alunos que medissem lados e ângulos dos dois triângulos, verificando que os mesmos eram congruentes. Finalmente, os alunos registraram suas próprias conclusões no GeoGebra.

A sétima atividade teve como objetivo levar os alunos a identificar mais um caso de congruência (caso LAL), ou seja, ter, respectivamente, congruentes dois de seus lados e também o ângulo formado por esses lados. Para tanto, utilizou-se uma sequência de passos semelhante à sexta atividade: os alunos construíram inicialmente dois segmentos formando um ângulo de amplitude fixa; obtiveram então o terceiro lado do primeiro triângulo. Posteriormente realizaram procedimento semelhante para a construção do segundo triângulo, mediram os dois triângulos e registraram suas conclusões no *software*.

Pode-se avaliar que nestas três últimas atividades, quando os alunos desenhavam uma figura geométrica – mesmo na tela do computador – estavam realizando a formação de uma representação identificável. Quando os alunos "arrastavam" um dos vértices do triângulo formado aumentando ou diminuindo os lados da figura, estavam realizando o tratamento do registro de representação semiótica por meio de uma reconfiguração. Assim, houve a transformação da representação (triângulo) internamente, utilizando regras de funcionamento dentro de um mesmo registro semiótico em que esta foi formada.

Segundo Duval (2012), duas classes de operações são definidas no tratamento figural: as operações mereológicas de reconfiguração e as de desconstrução dimensional. Para construir uma figura geométrica plana na tela do computador, é necessário que o aluno a descontrua dimensionalmente: o triângulo, por exemplo, pode ser desenhado a partir de três segmentos (*1D*) ou de três pontos (*0D*). A ordenação das ações realizadas na escolha dos comandos do menu do *software* GeoGebra mostra que a desconstrução dimensional possibilita ao aluno a identificação de propriedades da figura e o estabelecimento de relações entre elas.

As ações empregadas nesta sequencia de atividades foram desenvolvidas com vistas a se obter um avanço nos níveis de pensamento geométrico, conforme teorizou Van Hiele (1986).

6. Considerações finais

A análise da presente sequência didática pode favorecer o entendimento acerca de algumas características do processo de ensino e aprendizagem da geometria, em especial das ideias envolvidas nos casos de congruência de triângulos. Acredita-se que o trabalho com a formação conceitual em geometria deve ser gradual, explorando a vivência dos alunos e suas intuições, de modo a evidenciar um processo construtivo. As facetas deste trabalho podem ainda mostrar que os alunos transitam constantemente entre os diferentes níveis de formação conceitual em geometria apresentados por Van Hiele, indo de acordo com nossa concepção sobre o conhecimento, pois o compreendemos como algo não estático e muito menos pré-definido.

Evidencia-se a incorporação das novas tecnologias que, preservando as identidades culturais de nossos alunos, pode propiciar, além do interesse pelas aulas de Matemática, um processo contínuo de relação com o saber escolar e a experiência dos estudantes.

Buscou-se identificar os registros de representação semiótica produzidos tanto nas atividades expositivas quanto nas de construção geométrica utilizando o *software* GeoGebra. Neste sentido, percebeu-se, ao longo da aplicação da sequência didática, as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: a formação, o tratamento e a conversão de uma representação. Por este motivo, acredita-se que a presente proposta favorece o trabalho com as transformações de representações em outras representações semióticas, o que caracteriza, de acordo Duval o cerne da atividade matemática.

7. Referências

BORBA, M. C. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Bahia: Salvador, 2010. **Anais...** SBEM, 2010. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Fascículo I). Tradução de Lênio F. Levy e Marisa R.A. Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (Moretti, M. T., Trad.). Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, 07, 2, p. 266 – 297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/.../view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 20 nov. 2015.

VAN HIELE, P. **Structure and Insight** - a theory of mathematics education. Orlando: Academic Press, 1986.

VIANA, O.A. BOIAGO, C.E.P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.10, n. 1, p. 162-182, 2015.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.