

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Karla Jaqueline Souza Tatsch
Centro Universitário Franciscano
karlasouzat@hotmail.com

Janice Rachelli
Centro Universitário Franciscano
Universidade Federal de Santa Maria
janicerachelli@gmail.com

Vanilde Bisognin
Centro Universitário Franciscano
vanildebisognin@gmail.com

Resumo:

Apresentam-se aqui resultados de uma pesquisa que utilizou a Modelagem Matemática em atividades em sala de aula para investigar como se pode melhorar o ensino e a aprendizagem de funções de várias variáveis. Para tanto, optou-se por uma pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, em situações que levaram ao estudo de planos de telefonia celular junto a alunos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade privada do Rio Grande do Sul. Os dados foram coletados a partir dos registros escritos pelos alunos e das observações realizadas por uma das pesquisadoras. Os alunos formularam modelos matemáticos para o estudo e comparação de planos de telefonia celular escolhidos pelas pesquisadoras e se mostraram interessados com as atividades. Esse processo viabilizou melhorias no ensino e aprendizagem e na qualificação da formação inicial dos licenciandos.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem; Ensino superior; Funções de várias variáveis; Modelagem Matemática.

1. Introdução

A Modelagem Matemática, segundo diferentes resultados de pesquisas, encontrados em Bassanezi (2013), Bisognin e Bisognin (2013), Almeida e Palharini (2012), Silva e Barbosa (2011), entre outros, pode ser considerada tanto uma metodologia de ensino quanto uma estratégia de ensino e, como um ambiente de aprendizagem, apresenta-se num conjunto de etapas com o objetivo de fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno do mundo real.

Como uma estratégia de ensino, juntamente com as aplicações e a resolução de problemas, tem sido defendida por professores e pesquisadores da área de Educação

Matemática, envolvidos com o ensino e aprendizagem da matemática nos diferentes níveis, sendo percebida como um meio para melhorar a qualidade da educação nas escolas e universidades.

No presente trabalho, atividades de ensino foram aplicadas buscando responder à questão de pesquisa “Como a estratégia da Modelagem Matemática, por meio do tema Telefonia Celular, pode contribuir para melhorias na aprendizagem de funções de várias variáveis junto a um grupo de alunos do curso de Matemática de uma instituição de ensino privada do Rio Grande do Sul?”.

O presente estudo partiu do interesse em utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino, seguindo a concepção de Bassanezi (2013), com licenciandos, no estudo de conceitos relacionados a funções de várias variáveis. Para tanto, propôs-se um estudo envolvendo os custos de diferentes planos de telefonia celular, tema relacionado ao cotidiano dos alunos.

2. Modelagem Matemática

No contexto da Educação Matemática, Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) enfatizam que a Modelagem Matemática é um caminho para o processo de ensinar e aprender matemática ou para fazê-la em sala de aula, com referência à realidade do aluno e do mundo e defrontando-se com um problema que pode modificar as ações e a forma de observar o mundo.

Para Bassanezi (2013, p.16), a Modelagem Matemática é a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções no mundo real”, um processo dinâmico, que possibilita abstração e generalização com a finalidade de realizar previsão e tendências por meio da obtenção e validação de modelos matemáticos. Para ele, essa estratégia parte de uma situação ou problema real e segue uma sequência de etapas: a *experimentação* (atividade que envolve a obtenção dos dados, feita geralmente por métodos experimentais), a *abstração* (procedimento que leva à formulação de

modelos matemáticos, com seleção das variáveis, formulação de problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, formulação de hipóteses e simplificação), a *Resolução* (obtenção do modelo matemático, por meio da substituição das hipóteses em linguagem natural por uma linguagem matemática coerente), a *validação* (processo de aceitação ou não do modelo proposto, testando os modelos e as hipóteses em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real) e a *modificação* (se os modelos obtidos não conduzem corretamente as previsões, esses passam a ser reformulados).

Quando se refere ao ensino da Matemática, o autor contempla que a forma como teorias vêm sendo apresentadas em sala de aula, seguindo o esquema “enunciado → demonstração → aplicação”, deveria ser alterada para a ordem inversa, ou seja, primeiro a motivação, depois a formulação de hipóteses, a validação e questionamentos e por último o seu enunciado. “Estariamos assim reinventando o resultado juntamente com os alunos, seguindo o processo de modelagem e conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem” (BASSANEZI, 2013, p. 36). Nesse sentido, afirma que as aplicações matemáticas, a Modelagem Matemática e a resolução de problemas são processos para desenvolver a capacidade geral e atitudes dos estudantes, tornando-os criativos e habilidosos, auxiliando-os no entendimento da utilização da matemática como uma ferramenta para resolver problemas, possibilitando a compreensão dos argumentos matemáticos, dos conceitos e dos resultados, além da valorização da própria matemática.

D’Ambrósio, ao prefaciá-la obra de Bassanezi (2013), afirma que “a Modelagem Matemática é a matemática por excelência”, ressaltando que a origem da matemática está na necessidade de entender e explicar fatos e fenômenos da realidade.

Bassanezi (2013) destaca que para o professor que pretende utilizar a Modelagem em sala de aula, é importante que tenha clareza das etapas a serem utilizadas, dos benefícios esperados e também dos obstáculos que pode encontrar no decorrer da aplicação dessa estratégia.

No ensino superior, a Modelagem Matemática vem sendo utilizada por pesquisadores em vários estudos envolvendo diferentes conteúdos matemáticos associados a diversos

assuntos do cotidiano, tais como: Equações diferenciais – Consumo de cigarros (SILVA; ALMEIDA, 2015); Ajuste de funções - Calibração do micrômetro (PEREIRA, 2013); Equações diferenciais – Modelos populacionais (BASSANEZI, 2013); Funções trigonométricas seno e cosseno (translações, rotações, período) e função posição – Problema da corda (VECCHIA; MALTEMPI, 2012); Dados estatísticos e gráficos – Câncer de Próstata (DINIZ; BORBA, 2012); Equações diferenciais e função exponencial - *Diazepam* no organismo (ALMEIDA; PALHARINI, 2012); Conceito de equações diferenciais – Misturas e soluções (FECCHIO, 2011); e Áreas e volumes - Gasto de alumínio para a produção de latas (SILVA; BARBOSA, 2011).

Nestes estudos os autores observaram que a experimentação a partir de atividades interdisciplinares e de Modelagem Matemática apresentaram novas possibilidades de motivação, exploração do conteúdo e de resultados ao alcance dos alunos (FECCHIO, 2011), contribuíram para o aprendizado de conceitos matemáticos (PEREIRA, 2013) e que atividades de Modelagem Matemática têm potencial para o desenvolvimento de uma variedade de processos de pensamento matemático nos alunos, requerendo e, ao mesmo tempo fazendo emergir, um conjunto de processos cognitivos relevantes (ALMEIDA; PALHARINI, 2012).

Além disso, a Modelagem Matemática pode assumir visões e perspectivas distintas, influenciando a maneira como determinadas situações são compreendidas e como a Matemática pode auxiliar nas discussões que envolvem esse espaço ou em como as situações desse espaço influenciam no processo de ensino e aprendizagem (VECCHIA; MALTEMPI, 2012).

Vale ressaltar, ainda, o que Diniz e Borba (2012) sinalizam. Que a utilização de dados prontos, encontrados na internet, propicia uma nova faceta na relação entre tecnologias digitais e Modelagem. Segundo os autores, os dados prontos parecem ser tratados de maneira idêntica a dados empíricos e parecem gerar o mesmo resultado que a coleta de dados em campo que são usualmente utilizados em trabalhos de Modelagem encontrados na literatura. Com a Modelagem há o engajamento dos alunos na tentativa de identificar relações importantes que não foram disponibilizadas e que complementariam a compreensão dos dados prontos.

Bisognin e Bisognin (2013) destacam que ao ensinar por meio da Modelagem Matemática é possível estabelecer uma relação entre os fatos do cotidiano dos alunos e os conteúdos matemáticos a serem ensinados e, além disso, observar a mudança no comportamento deles, que passam de um estado de inércia para um estado ativo e participativo, construindo o conhecimento matemático com significado.

3. Metodologia

Com o objetivo de investigar, em uma atividade de Modelagem Matemática, como se pode contribuir para a melhoria da aprendizagem de funções de várias variáveis, optou-se por uma pesquisa qualitativa.

O tipo de pesquisa foi o estudo de caso, uma vez que as pesquisadoras se detiveram em estudar uma sequência de atividades de ensino aplicadas a uma turma de alunos específica. Trata-se do estudo de poucos objetos, de maneira que se possa analisá-los detalhadamente (GIL, 2010).

As atividades de ensino foram aplicadas a um grupo de quatorze alunos, bolsistas do Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade privada do Rio Grande do Sul. São alunos que vivenciaram experiências de ensino na Educação Básica com a Modelagem Matemática, como professores, em atividades de apoio pedagógico e monitoria em sala de aula. Neste trabalho, tiveram a oportunidade de, como alunos, aprender em um ambiente de Modelagem Matemática.

Para a realização das atividades, os alunos organizaram-se em grupos. Em cada um deles, as considerações que os alunos utilizaram para os cálculos e para a dedução dos modelos matemáticos foram definidas em conjunto e registradas pelos alunos, utilizando computador com acesso à internet, lápis e papel.

4. Análise e discussão dos resultados

No estudo foram utilizados dados disponíveis na internet contendo algumas notícias sobre o uso de celulares no Brasil (Figura 1). O tema de estudo foi muito bem aceito pelos alunos que se entusiasmaram nas discussões a respeito dos planos de telefonia existentes. Os

planos utilizados por eles foram comentados o que gerou envolvimento entre os participantes.

Número de brasileiros com celular cresceu mais de 131% em oito anos
Fonte: <http://www.brasil.gov.br/> - 29/04/2015 12h03



Anatel aprova redução de 22% para ligações de telefone fixo para móvel
Fonte: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/> - 05/02/2015 19h39

Conta de celular custa, em média, R\$ 104 no Brasil. Veja como gastar menos
Consumidor que pesquisa preço das operadoras pode economizar mais de R\$ 200 por ano
Fonte: <http://noticias.r7.com/> - 25/1/2015 às 00h23

Figura 1: Dados sobre o uso de celulares apresentados aos alunos.

Para a realização das atividades de ensino foram apresentados dois planos de telefonia, disponíveis nos sites das operadoras (Figura 2), os quais estão referenciados no presente texto como Plano A e Plano B.

As atividades envolveram a análise dos custos sobre cada um dos planos apresentados, levando em consideração diferentes variáveis e situações de uso do celular. Com as informações disponíveis os alunos realizaram cálculos, selecionaram variáveis e formularam hipóteses e simplificações para obterem os modelos matemáticos associados a cada uma das situações-problema propostas.

Várias questões foram levantadas no decorrer da realização das atividades, tanto a partir de curiosidades que surgiram pelos alunos quanto a partir do planejamento prévio das pesquisadoras, que tinham como intuito proporcionar a construção e a análise de modelos que apresentassem várias variáveis.

A seguir, a figura 2 apresenta os dois planos de telefonia estudado pelos alunos.

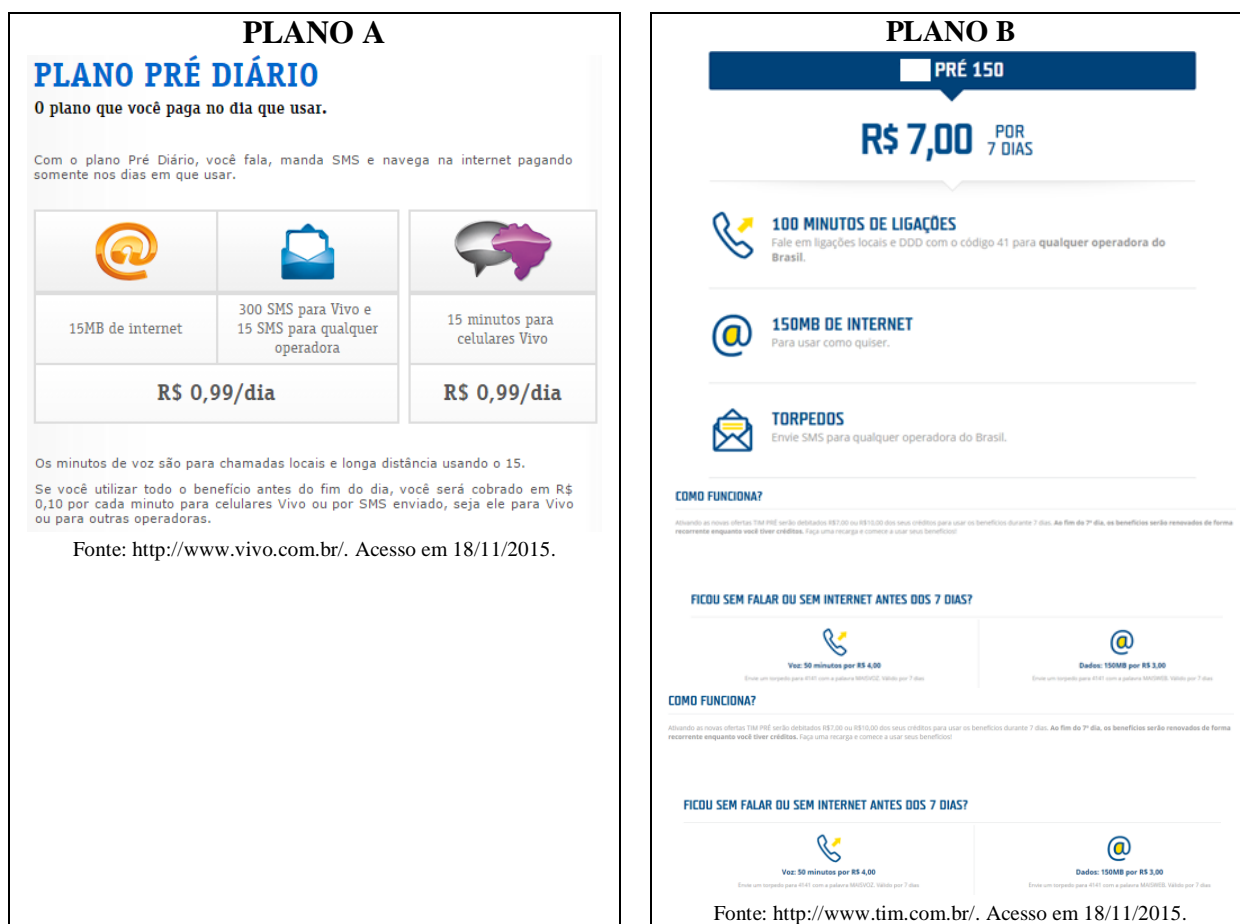


Figura 2: Planos de telefonia celular disponibilizados para estudo pelos alunos.

Primeiramente foi solicitado que os alunos analisassem o custo diário do PLANO A, PRÉ DIÁRIO, considerando cada uma das seguintes situações:

- a) Utilizando o plano dentro do benefício especificado na tabela; depois sem exceder internet e SMS, mas nas ligações, utilizando 30 minutos para celular Vivo ou outras operadoras. E se utilizar 45 minutos em ligações para celular Vivo?
- b) Escrever uma expressão matemática que generaliza essa situação, excedendo o número de minutos ofertados e determinar as variáveis envolvidas nessa situação. Qual é a classificação desse tipo de modelo matemático? Trata-se de uma função? Por quê?
- c) Na sua opinião, esse plano é uma boa opção para aquele consumidor que utiliza pouco ou para aquele que utiliza muitos minutos diários em ligações e SMS? Por quê?

Depois de analisar o primeiro plano foi solicitado que cada aluno estudasse o custo semanal do Plano B, TIM PRÉ 150, sugerindo-se alguns itens:

a) Utilizando o plano somente dentro do benefício especificado na tabela e depois com até 150MB de internet, mas excedendo o tempo máximo ofertado em ligações, usando 150 minutos nos sete dias. Qual a expressão matemática que generaliza essa situação? Trata-se de uma função? Se for função, quais são as variáveis dependentes e independentes envolvidas?

b) Qual o custo mensal se utilizar o Plano B excedendo o tempo máximo ofertado em ligações e a internet, usando, respectivamente, 150 minutos e 750MB nos sete dias? Qual a expressão matemática que generaliza essa situação?

c) Na sua opinião, esse plano é uma boa opção para aquele consumidor que utiliza poucos minutos ou para aquele que utiliza muitos minutos diários em ligações e SMS? Por quê?

Nessa análise, os alunos puderam estabelecer modelos matemáticos com destaque às variáveis dependentes e independentes em cada situação, bem como fazer uma análise crítica de cada oferta, estabelecendo diferentes critérios de análise. As atividades oportunizaram conversas entre a pesquisadora e os alunos, avaliando os planos de telefonia a partir da seleção de variáveis no processo e do estudo de funções de uma ou de várias variáveis.

Pode-se destacar, entre as diversas construções dos alunos, o modelo matemático construído por um aluno, a partir da análise do Plano A, ilustrado na Figura 3.

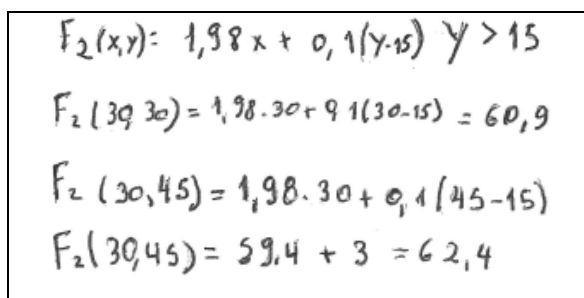

$$\begin{aligned}F_2(x,y) &= 1,98x + 0,1(y-15) \quad y > 15 \\F_2(30,30) &= 1,98 \cdot 30 + 0,1(30-15) = 60,9 \\F_2(30,45) &= 1,98 \cdot 30 + 0,1(45-15) \\F_2(30,45) &= 59,4 + 3 = 62,4\end{aligned}$$

Figura 3: Resolução feita por um dos alunos ao analisar o Plano A.

Considerou o valor de x como sendo o número de dias e o valor de y o total em minutos de ligações, obtendo uma função de duas variáveis para representar o custo do plano proposto. Para isso, generalizou a situação para depois obter os valores específicos solicitados na atividade.

Quando questionados sobre qual modelo matemático generalizava a relação para o custo do Plano A, considerando que o uso em MB de internet, SMS e ligações celulares para

Vivo excedesse as condições do plano básico, um dos alunos formulou, a partir do levantamento de hipóteses e das simplificações, o seguinte modelo:

$$f_3(x, y, z, w_1, w_2) = 0,99x + 0,99y + 0,1(z - 15) + 0,1(w_1 - 300) + 0,15(w_2 - 15)$$

Onde f_3 representou o custo (em reais) em função das variáveis independentes x (número de dias que utiliza o plano em ligações para celulares), y (número de dias que utiliza internet e SMS), z (número de minutos utilizados em ligações para celulares Vivo), w_1 (número de SMS para Vivo) e w_2 (número de SMS para outras operadoras). O valor R\$0,15 por MB de internet não constava no plano básico, mas foi obtido no site da operadora. Esta representação envolveu o estabelecimento de uma função que dependeu de cinco variáveis, as quais foram identificadas nos registros desse aluno.

Outra forma encontrada por um dos alunos foi de apresentar duas expressões: $p = \{0,99 + 0,1[(x - 300) + (y - 15)]\}d$ e $p = [0,99 + 0,1(t - 15)]d$ para representar, respectivamente, o custo em internet e SMS e o custo em ligações. As variáveis x , y , t e d foram usadas, nesta ordem, para representar: o número de SMS para Vivo, o número de SMS para outras operadoras, o número de minutos em ligações e o número de dias em que o plano foi utilizado.

Nas atividades realizadas para análise do Plano B, ao serem questionados sobre o custo do respectivo plano, os alunos utilizaram as expressões $F(x) = 7x$ e $p = 7,00t$, para indicar o custo semanal em função do número de semanas x e t , e outros expressaram numericamente os valores diário (R\$1,00), semanal (R\$7,00) e mensal (R\$30,00).

Para análise do Plano B foram propostas questões que levassem os alunos a obterem uma generalização nas condições do plano básico. Neste caso era necessário considerar períodos de 50 minutos em ligações e de 150 minutos de internet. A grande maioria dos alunos utilizou esquemas, como o representado na Figura 4, para resolver essas questões.

Um dos modelos obtidos foi a expressão $C = 7x + 4n + 3m$, para o custo do Plano B, onde x representa o número de semanas, n cada um dos períodos de 50 minutos que

ultrapassam os 100 minutos em ligações e m cada um dos períodos de 150MB que ultrapassam os 150MB de internet.

LIGAÇÃO(50min)	R\$	Internet (mb)	R\$
$Y \leq 100$	0	$Z \leq 150$	0
$100 < Y \leq 150$	4	$150 < Z \leq 300$	3
$150 < Y \leq 200$	8	$300 < Z \leq 450$	6
$200 < Y \leq 250$	12	$450 < Z \leq 600$	9
$250 < Y \leq 300$	16	$600 < Z \leq 750$	12
⋮	⋮	⋮	⋮
$100 + 50(m-1) < Y \leq 150 + 50(m-1)$	$4m$	$150 + 50(m-1) < Z \leq 300 + 150(m-1)$	$3m$
$m > 0$		$m > 0$	

Figura 4: Esquema realizado por um aluno ao estudar o custo do Plano B.

De uma forma geral, os alunos apresentaram entendimento nas atividades de modelagem propostas, obtendo valores para os custos e modelos que generalizaram cada uma das situações. Por outro lado, observou-se que um pequeno grupo de alunos apresentou dificuldade em utilizar várias variáveis ao estudar o custo de cada plano, recebendo orientações da pesquisadora.

Para encerrar as atividades e as discussões foi apresentada uma reportagem sobre o custo médio da conta de celular no Brasil com o intuito de enfatizar a importância da análise ao escolher um plano de telefonia que pode estar baseado em um estudo minucioso com modelos matemáticos para que se possa economizar financeiramente.

Verificou-se que as etapas de experimentação, abstração, resolução, validação e modificação, foram utilizadas pelos alunos na medida em que o trabalho foi desenvolvido. A validade de cada modelo construído era questionada constantemente pela pesquisadora e os alunos efetuavam as verificações e/ou modificações sempre que necessário.

6. Considerações finais

Antes da realização dos estudos do tema de Modelagem, a pesquisadora fez uma breve explanação e proporcionou algumas discussões entre os alunos participantes sobre a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem para os diferentes níveis

de ensino, buscando ressaltar a cada licenciando a importância do conhecimento/aplicação dessa estratégia para a conquista da qualidade do processo educativo na ação docente futura.

A sequência de atividades de análise dos planos de telefonia gerou interesse e participação na totalidade dos alunos, com riqueza de discussões, trazendo para a aula, além do estudo do conhecimento matemático previsto, comentários sobre seus próprios planos de telefonia e sobre os planos que estavam analisando.

Os modelos construídos pelos alunos se mostraram válidos para o cálculo do custo e as análises possibilitaram a comparação entre as ofertas estudadas. Alguns modelos constituíram-se funções dependentes de uma variável e outros dependentes de várias variáveis. As atividades levaram os alunos a concluir que o estudo de funções de várias variáveis se apresentou de forma extremamente interessante por meio do estudo de situações reais.

Para os envolvidos, licenciandos em Matemática, vivenciar a Modelagem Matemática no papel de alunos foi significativo para sua formação, pois puderam perceber essa estratégia de ensino pela ótica que permite uma análise crítica de sua contribuição para a efetivação de uma aprendizagem com significado.

Observou-se, ao longo das atividades realizadas com os alunos, que a Modelagem Matemática favoreceu a compreensão do conceito matemático de função de várias variáveis.

Atividades que levem assuntos reais para a sala de aula e que possibilitem as construções e discussões de ideias pelos alunos, nos diferentes níveis de ensino, são relevantes para que a Educação Matemática esteja alicerçada nos preceitos de aprendizagens com significado e, ainda, envolvidos com a necessidade da formação crítica e reflexiva do aluno, que precisa ser hábil e competente para viver e conviver na construção de uma sociedade em pleno desenvolvimento científico e humano.

7. Referências

ALMEIDA, L.M.W.; PALHARINI, B. N. Os “Mundos da Matemática” em atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**. Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 907-934, 2012.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BISOGNIN, V.; BISOGNIN, E. Modelagem Matemática: experiências para a sala de aula. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013, Canoas. **Anais eletrônicos...** Canoas: ULBRA, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/2168/981>. Acesso em: 18 nov. 2013.

DINIZ, L.N.; BORBA, M. C. Leitura e interpretação de dados prontos em um ambiente de modelagem e tecnologias digitais: o mosaico em movimento. **Bolema**. Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 935-962, 2012.

FECCHIO, R. **A modelagem matemática e a interdisciplinaridade na introdução do conceito de equação diferencial em cursos de Engenharia**. 2011. 208f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PEREIRA, R. S. G. Modelagem Matemática e o ensino de ajuste de funções: um caderno pedagógico. **Bolema**. Rio Claro, v. 27, n. 46, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Caminhos do significado em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **Bolema**. Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 568-592, 2015.

SILVA, J. N. D.; BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. **Bolema**. Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 197-218, 2011.

VECCHIA, R. D.; MALTEMPI, M. V. Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: a realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. **Bolema**. Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 963-990, 2012.