

OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES REAIS: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O SABER PEDAGÓGICO DE CONTEÚDO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense
wmrezende@id.uff.com

Natasha Cardoso Dias
Universidade Federal Fluminense
natashacdias@gmail.com

Tayná Lobo da Silva
Universidade Federal Fluminense
taynalobos@gmail.com

Resumo:

O conceito de função se estabelece como uma ferramenta matemática que ajuda o homem a entender os processos de fluência e de interdependência que são intrínsecos aos fenômenos naturais e sociais. Portanto, saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação. Assim, usando ferramentas computacionais, este minicurso tem por objetivos principais: estudar o comportamento variacional de algumas funções elementares fazendo uso de recursos gráficos, numéricos e algébricos, procurando estabelecer relações com o estudo de sequências numéricas; e usar processos da modelagem matemática para resolver problemas de otimização, considerando contextos geométricos simples e dinâmicos. As atividades destinam-se a ampliar o saber pedagógico de conteúdo do professor de matemática com respeito ao tema, oferecendo opções didáticas oportunas para uma abordagem dinâmica deste conceito na educação básica.

Palavras-chave: funções reais; variação de grandezas; tecnologias no ensino de matemática; saber pedagógico de conteúdo.

1. Introdução

Segundo Caraça (1948), o conceito de função se estabelece como uma ferramenta da matemática que ajuda o homem a entender os processos de fluência e de interdependência que são intrínsecos às coisas e aos seres do nosso Universo. Portanto, saber que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudamos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. O estudo das variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais foi, sem dúvida, um dos grandes pilares na construção da ideia de função.

Contudo, diversos trabalhos de pesquisa têm apontado que não apenas os alunos da educação básica, mas também seus professores têm encontrado dificuldades com o entendimento e a aplicação deste conceito na resolução de problemas matemáticos. As pesquisas de Even (1998) e HITT (1998), no exterior, e de Zuffi (1999), Rossini (2006), Costa (2008) e Thees (2009), no âmbito nacional, têm revelado, por exemplo, a existência de algumas lacunas na formação de professores de matemática no que diz respeito à compreensão deste conceito.

Em sua pesquisa, Even (1998) observa que os professores investigados não relacionam e nem conhecem as limitações inerentes aos vários modos de representação do conceito de função (diagramas de setas, expressões algébricas etc.). Essas dificuldades também foram observadas nas atitudes dos professores que participaram das pesquisas de Hitt (1998) e Costa (2008).

Os professores pesquisados tanto por Hitt (1998) como por Costa (2008) definiram o conceito de função no contexto algébrico, ora como um conjunto de pares ordenados, ora a partir de uma “regra de correspondência”. Em Costa (2008), por exemplo, verificou-se que a maioria dos entrevistados definiu função como “relação entre conjuntos”, tendo como imagens de conceito predominantes suas “representações gráficas” ou os “diagramas de setas”. Já em (HITT, 1998), observa-se que os professores participantes de sua pesquisa apresentaram dificuldades em identificar a variação da variável independente a partir de determinados contextos físicos.

Essa caracterização estática e algébrica do conceito de função também pode ser verificada nas atitudes dos professores entrevistados por Rossini (2006). No levantamento realizado pela autora, os docentes citaram até palavras como “função crescente” e “função decrescente”, mas sequer fizeram referência às noções de variação ou de taxa de variação. Ao que parece, pelos resultados até aqui sinalizados, os professores não dispõem de recursos que permitam qualificar e quantificar o comportamento variacional de uma função real. Tal fato pode ser observado de forma contundente em (THEES, 2009). Em seu trabalho, a autora, ao investigar a competência de determinado grupo de docentes para encontrar as funções que modelavam quatro situações problema¹, observou que os professores participantes, em sua grande maioria, ignoravam ou desconheciam o comportamento variacional das funções afim e quadrática. A “regra de três” era, nas atitudes registradas pelos docentes, a ferramenta

¹ Todos os quatro problemas eram modelados por funções afins ou quadráticas.

universal para a solução de qualquer um dos problemas apresentados: ou a variável dependente y é proporcional à variável independente x , ou a variação da variável dependente y , y , é proporcional à variação da variável independente x , x . Aliás, a função que modela o problema sequer era citada nas respostas dadas pelos professores. Ela permanece escondida nos mecanismos algébricos que utilizam para resolver a questão.

O cenário descrito acima sugere que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Real, presentes na grade curricular dos cursos de Licenciaturas em Matemática em nosso país, não têm cumprido com os seus papéis na formação desses professores de matemática. Ratificando este ponto de vista, Zuffi (1999, p.205) acrescenta que a forma como o conceito de função tem sido apresentado nestas disciplinas (ou mesmo em Álgebra, Álgebra Linear e Topologia) pouco tem contribuído para a ampliação ou enriquecimento das imagens conceituais destes futuros professores de matemática da educação básica. As imagens conceituais da noção de função permanecem idênticas àquelas adquiridas em momentos anteriores à carreira universitária.

Portanto, tendo em vista o exposto acima, pode-se dizer que este minicurso tem, *a priori*, como meta principal contribuir para o saber pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986) do professor de matemática sobre funções reais. Em linhas gerais as atividades propostas neste minicurso têm os seguintes objetivos específicos: correlacionar o estudo das sequências numéricas com o estudo de funções reais; reconhecer o comportamento variacional de algumas funções elementares a partir de estudo de sequências numéricas associadas; analisar o domínio da função a partir do seu significado e da observação da variável independente no contexto do problema (independente da determinação *a priori* da expressão analítica da função); determinar a função que modela um problema proposto; determinar os pontos ótimos (de máximo ou de mínimo) da função que modela o problema. Assim, com essa perspectiva, foram concebidos três classes de objetos de aprendizagem, considerando o uso de planilhas e softwares de matemática dinâmica. Na próxima seção, passamos a descrever os objetos construídos para este minicurso.

2. Breve descrição dos Objetos de Aprendizagem

Os objetos a serem apresentados foram produzidos com o software de geometria dinâmica Geogebra e a planilha eletrônica Excel e consideram os seguintes temas do ensino básico de matemática: (i) estudo de sequências numéricas (PA, PA de segunda ordem e PG); (ii) caracterização das variações das funções afim, quadrática e exponencial, por meio de sequências numéricas; (iii) resolução de problemas de otimização em contextos geométricos.

2.1 – Sequências numéricas

A primeira classe de objetos tem como objetivo possibilitar que o aluno se aproprie da estrutura das sequências numéricas elementares (PA, PA de segunda ordem, ou PG). Uma vez escolhidos a razão das progressões (seja ela PA, PA de segunda ordem, ou PG) e um termo inicial (e o segundo termo, no caso da PA de segunda ordem), o participante deverá determinar os dez primeiros termos da sequência. O programa sinaliza as escolhas incorretas, possibilitando que se faça as devidas correções durante o processo. Além disso, a cada registro, o aplicativo representa graficamente a sequência numérica indicada, unindo seus pontos por linhas tracejadas (janela esquerda da figura 1). Ao final, pode-se verificar a resposta (janela direita da figura 1), visualizando-se também a função característica associada a cada uma das sequências.

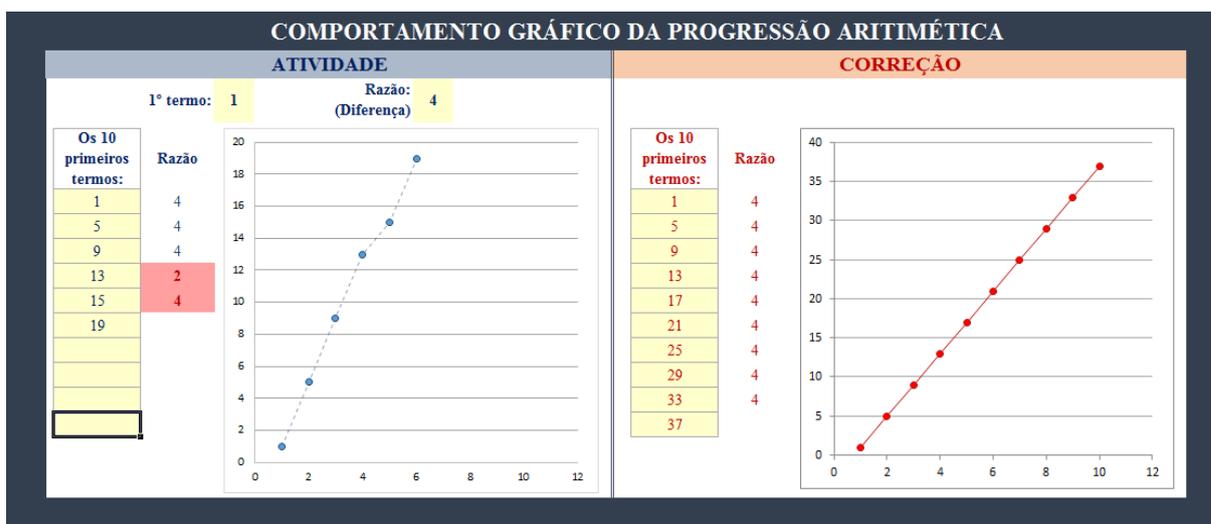


Figura 1 – Tela do aplicativo sobre progressão aritmética

2.2 – Caracterizações das funções afim, quadrática e exponencial

A segunda classe de objetos de aprendizagem tem como objetivo caracterizar as funções afim, quadrática e exponencial a partir de suas relações com progressões aritméticas constituídas nos seus domínios. A função afim é caracterizada então com a função que “transforma PA em PA”; a função quadrática, como a que “transforma PA em PA de segunda ordem” (figura 2); e a função exponencial, como a que “transforma PA em PG”. Para o estudo de cada uma dessas famílias de funções (afim, quadrática e exponencial) utiliza-se um aplicativo. Em cada um dos aplicativos, pode-se escolher os parâmetros que definem a função, o termo inicial e a razão da PA constituída de pontos do domínio da função. Por variação dos parâmetros – e observação direta dos registros apresentados pelo software – espera-se que o usuário participante crie a conjectura de que a regularidade observada se verifica para quaisquer PA e função da família escolhidas.

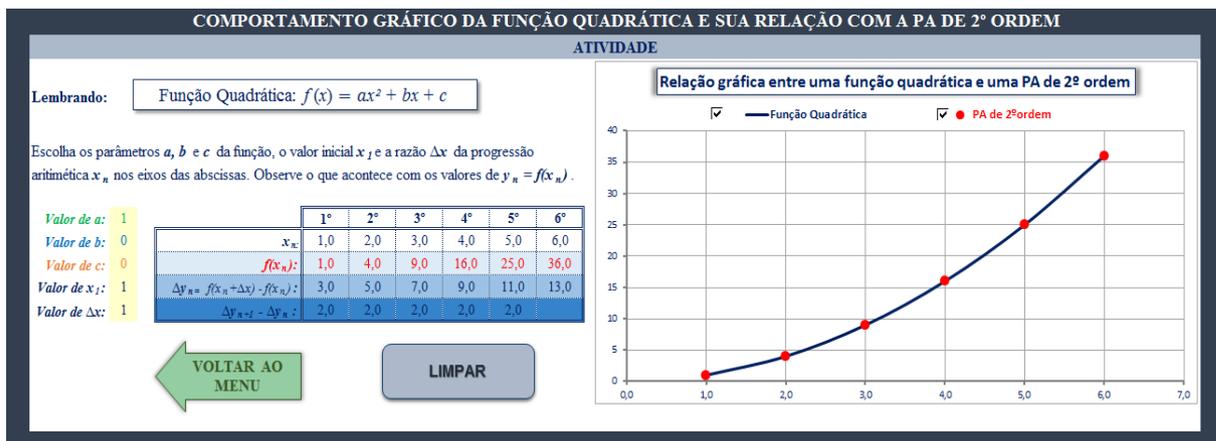


Figura 2 – Tela do aplicativo para o estudo da função quadrática

2.3 – Problemas de otimização

Esta classe de objetos de aprendizagem consiste de cinco atividades interativas, construídas com o Geogebra (um software de matemática dinâmica) em contextos geométricos. Cada aplicativo possui uma janela que apresenta o contexto geométrico do problema, permitindo que o usuário interaja com os elementos do cenário, e outra (que pode estar visível ou não), que faz o registro gráfico das variações das grandezas envolvidas no problema, conforme a interação estabelecida pelo usuário com a primeira janela. Para cada situação proposta pede-se o domínio, os pontos ótimos (se houver) e a expressão analítica da função que modela o problema. Cada participante receberá uma folha contendo o enunciado impresso dos problemas e os respectivos aplicativos construídos com o Geogebra.

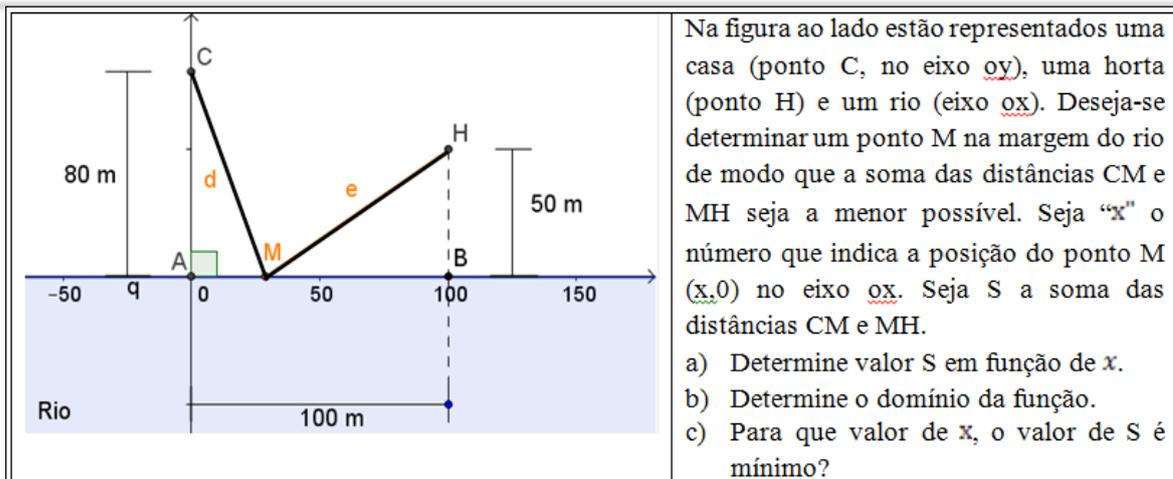


Figura 3 – Versão escrita da atividade 4 da classe de problemas de otimização.

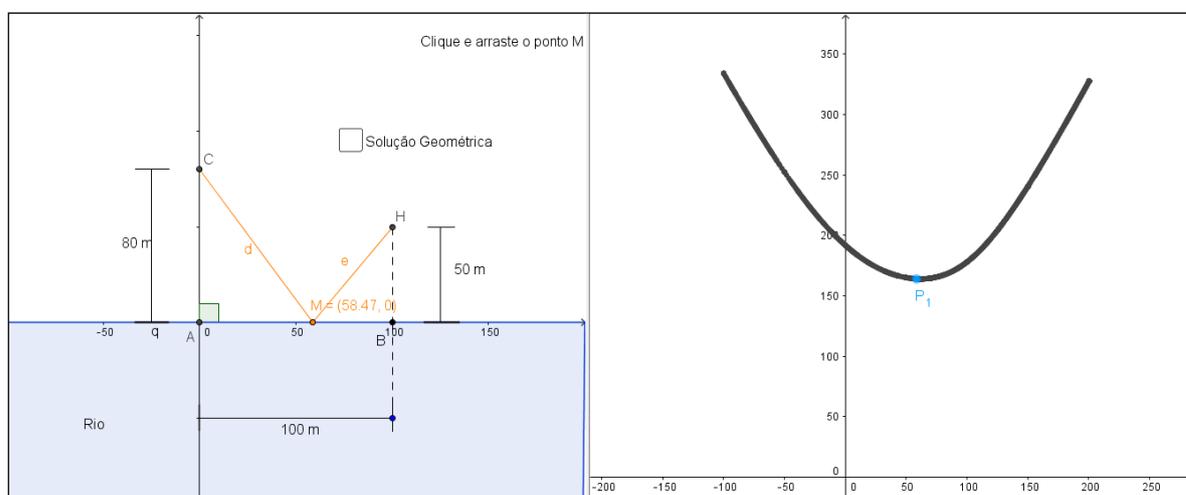


Figura 4 – Tela do aplicativo para o estudo da atividade 4 da classe de problemas de otimização.

3. Metodologia e considerações finais

O minicurso será realizado em formato de estudo dirigido, cabendo ao professor palestrante, junto com sua equipe de bolsistas, a orientação dialogada e simultânea das atividades com os participantes. Cada participante receberá uma pequena apostila fornecida pelo professor contendo as atividades a serem realizadas. O grupo será dividido em pequenos grupos, de três ou quatro participantes, tendo cada grupo a assistência, quando for o caso, do professor ou de um dos membros da equipe, de forma itinerante.

Inicialmente o professor palestrante fará breve introdução ao tema (cerca de quinze minutos), apresentando também a proposta do minicurso. Em seguida o professor realizará junto com o grupo de participantes as atividades sobre sequências numéricas (PA, PA de segunda ordem e PG), utilizando-se da primeira classe de objetos de aprendizagem produzido

com o Excel. Para cada atividade será escolhido um elemento de cada grupo de participantes. Para a realização desta atividade estima-se o tempo de trinta minutos.

Após esta etapa, o professor palestrante apresentará, utilizando-se da segunda classe de aplicativos construídos com o Excel, as caracterizações das funções afim, quadrática e exponencial, utilizando-se da mesma metodologia empregada na etapa anterior. Pretende-se, de forma dialogada com o grupo, tirar dos próprios participantes os resultados pretendidos. Para esta etapa estima-se também o tempo de trinta minutos.

Na etapa seguinte, será dado um problema (não fornecido no corpo desta proposta por limitação de espaço) em que os participantes terão que resolver identificando a função que serve como modelo. Cada grupo resolverá apenas um problema (envolvendo função afim ou quadrática). Após tempo de 15 minutos, destinado para a resolução do problema, será feita uma resolução comentada pelo professor palestrante de 10 minutos.

Ao final do minicurso, serão realizadas as cinco atividades da terceira classe de objetos de aprendizagem. Cada grupo terá quinze minutos para resolver apenas um dos cinco problemas de otimização com contextos geométricos, tendo em mãos apenas a versão impressa do mesmo. A distribuição das questões para os grupos será realizada de forma aleatória. Após esse tempo, será feita uma resolução comentada pelo professor palestrante de cada uma das cinco questões, de forma dialogada com os representantes de cada grupo que resolveu a questão correspondente. Estima-se para essa etapa o tempo de cinquenta minutos. No encerramento será feita uma avaliação plenária do minicurso, com duração prevista de quinze minutos.

Para realização do minicurso imaginam-se duas formas de abordagem: (i) *em um laboratório de informática* – Nesta modalidade, as atividades, copiadas em um único diretório, serão disponibilizadas para os participantes nos computadores do laboratório. De acordo com o número de máquinas disponíveis no laboratório, os participantes poderão ser organizados em duplas. Para a execução das atividades serão necessários que os programas Geogebra e Excel estejam instalados. Precisa-se também de um projetor multimídia para a apresentação do professor palestrante, caneta e quadro branco; (ii) *em sala de aula*. Nesta modalidade o professor palestrante precisará de um projetor multimídia, caneta e quadro branco. Neste caso é fortemente recomendado que os participantes levem seus *notebooks*. Destaca-se, entretanto, que este não é, e nem deve ser, um impedimento para a inscrição do

participante no minicurso. A metodologia a ser utilizada absorve esta dificuldade aparente. Para qualquer um dos casos, recomenda-se um limite de trinta participantes inscritos.

E para finalizar este texto, cabe destacar que as atividades interativas aqui propostas destinam-se, sobretudo, a ampliar o saber pedagógico de conteúdo do professor de matemática com respeito ao tema, oferecendo opções didáticas oportunas para uma abordagem dinâmica do ensino de funções na educação básica.

4. Referências

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9a edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1948.

COSTA, C. B. J. **O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função**. 2008. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

EVEN, R. Factors Involved in linking representations of functions. **The Journal of Mathematical Behavior**, v.17, n. 1, p.105-121, 1998.

HITT, F. Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. **Journal of Mathematical Behavior**, v.17, n.1, p.123-134, 1998.

SHULMAN, L.S. Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching. In: **Educational Researcher**, v. 15 (2), p.4-14, fev 1986.

ROSSINI, R. **Saberes Docentes sobre o tema Função**: uma Investigação das Praxeologias. 2006. 346 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

THEES, A. V. **Um estudo de caso do conhecimento do professor de matemática da educação básica sobre o comportamento variacional das funções afim e quadrática**. 2009. 102 f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2009.

ZUFFI, E. M. **O tema “funções” e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio** – por uma aprendizagem de significados. 1999. 307 f. Tese (Doutorado em Didática - Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.