REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM PROBLEMAS HISTÓRICOS E SUA RELEVÂNCIA NO PROCESSO DE FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR.

Dorival Rodrigues da Rocha Junior
UFRJ
Rodrigues.dorivaljunior@gmail.com

Magno Luis Ferreira
IFRJ
Magno.ferreira@ifrj.edu.br

Resumo:
Estre trabalho é o resultado de pesquisa do trabalho de conclusão de curso que tem por objetivo apresentar as contribuições do conhecimento da história da álgebra para a constituição do saber algébrico do professor. Acreditamos que uma das formas de saber álgebra é conhecer a história do pensamento algébrico. Foi feito um levantamento bibliográfico sobre problemas históricos relacionados à álgebra. Buscamos identificar os diferentes registros de representação semiótica que esses problemas apresentam ou exigem. Para isso usamos a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval(2012). Além disso, foi usada a teoria de Aprendizagem Versátil de Tall(1994) para ilustrar o pensamento mobilizado em cada resolução. A partir da verificação da existência de uma variedade de registros, foi possível associar o conhecimento histórico da álgebra a sua aprendizagem.

Palavras-chave: História da Álgebra; Representações Semióticas; Aprendizagem Versátil.

1. Introdução

Acreditamos que o acesso à história da matemática, em particular da álgebra[1], vai além de uma abordagem direta, ou seja, vai além do uso direto da história como um recurso didático. Ela muda como o professor entende o processo de construção do conhecimento, mudando sua prática.

Apresentamos a forma como um problema algébrico era proposto no passado e como passou a ser no presente, que sustentado pela teoria de Duval (2012) indica que o contato que essas diferentes representações têm importância para o saber álgebra. Tentamos ainda estabelecer a ideia de que o saber álgebra e de grande importância para a prática docente. Partindo de como se encontra o panorama do ensino de álgebra e como o professor lida com

[1] Iremos tratar como álgebra os objetos que foram surgindo ao longo da história que vieram a compor esse campo de conhecimento posteriormente, e consequentemente as representações e conceitos por trás dos mesmos.

representações e situações algébricas, procuramos estabelecer alguns paralelos com a forma de enunciação de problemas que nos remetem ao conhecimento algébrico no passado tendo por consideração a Teoria de Registros e Simbolização. Com vistas a ilustrar dois diferentes registros de representação semiótica na perspectiva de Duval (2012).

Santos (2010) observa que os professores apresentam um déficit na compreensão do conhecimento algébrico desde sua formação inicial, déficit esse, que pode ser visto também na graduação. E isso influencia na ações na sala de aula. Esse déficit que foi gerado acaba por levar o professor a se basear apenas no livro didático, que por sua vez não está bem preparado pra dar suporte a esse professor. Não proporcionando, assim, um aprendizado significativo. A concepção de álgebra do professor dificulta a aprendizagem que deveria passar por um processo de reflexão mais crítico.

Os professores optam então por metodologias mecânicas para esse conteúdo que está presente de forma essencial em todo currículo de matemática, desmotivando alunos durante toda vida escolar.

A pergunta que norteou a pesquisa foi: Como o conhecimento sobre a história da álgebra pode interferir na qualidade das intervenções do professor? Tentamos respondê-la apresentando relações entre o conhecimento da História da Álgebra e o saber algébrico. Para isso, vamos verificar como se encontra o panorama do ensino de álgebra e como o professor lida com representações e situações algébricas. Vamos relacionar a Teoria de Registros de Representação Semiótica com a Teoria de Visualização e Simbolização e, por fim, iremos apresentar como conceitos algébricos estão ligados a uma variedade de representações semióticas.

2. Referencial Teórico

De acordo com Duval (2012), os objetos de estudo da matemática são entes abstratos. Em outras palavras, não se pode identifica-los pelos nossos sentidos. Portanto, se faz necessário o uso de diferentes tipos de registros para representa-los. A representação funciona como uma forma de acesso ao objeto.

> Há uma palavra às vezes importante e marginal em matemática, é a palavra “representação”. Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal “representar”. Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto

ISSN 2178-034X

> matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. (DUVAL, 2012, p.268)

É importante destacar que cada tipo de registro utilizado para representar objetos matemáticos, exige um tipo diferente de manipulação. Estas diferenças podem influenciar diretamente na escolha do tipo de representação por parte do estudante, por exemplo, um aluno aprendendo as operações básicas, ele opta por uma representação de números feita por agrupamento de objetos ao invés de usar algarismos hindu-arábicos, apesar de conhece-los, por facilitar o ato de adição. O registro não é o objeto, e a exposição a vários registros pode ajudar a esclarecer isso.

As dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade das variações entre os registros de representação. Reconhecer várias representações de um mesmo objeto está diretamente ligado à percepção do objeto. Ele não depende de uma forma de representação, portanto quanto mais representações conhecidas melhor o entendimento sobre o objeto. Duval (2012) define as transformações feitas dentro de uma mesmo sistema semiótico como tratamento. E a transformação entre sistemas, a mudança de uma representação para outra como conversão.

A conversão requer que se perceba a diferença entre o que os códigos de uma representação inferem. Conversão não é o ato de transcrever, implicando num entendimento do objeto representado para então haver a interpretação numa segunda representação. A conversão não é um procedimento natural, podemos associá-la a um surgimento histórico de um novo registro como um obstáculo epistemológico[2], e seu entendimento, na maioria das vezes, não tem como ser ensinado.

[2] Rodrigues, H., 2012, diz que *obstáculos epistemológicos* são uma espécie de *contra pensamento* que pode surgir no momento da constituição do conhecimento ou numa fase posterior. São uma forma de resistência do próprio pensamento ao pensamento.

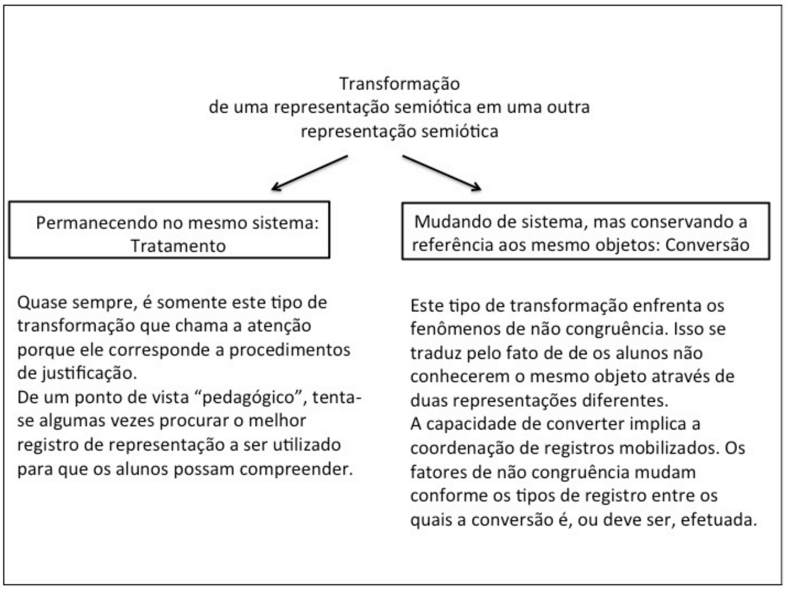
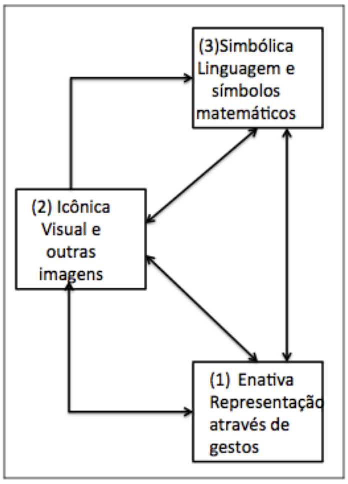


Figura 1: Conversão x Tratamento. (DUVAL, 2010 p. 15).

Tall (1994) propõe a Aprendizagem Versátil, onde ele combina o apelo visual às representações simbólicas. Ele ressalta que símbolos algébricos são usados de duas distintas formas. Ora eles aparecem como processo, ora como objeto. O mesmo é observado com a aritmética. Como crianças percebem os números, por exemplo, como resultado de contagem, processo, ou como número, entidade. A essa dualidade de existência, o autor dá o nome de "pro-ceito", o que significa que uma representação simbólica pode ser entendida como processo ou conceito. Por exemplo quando somamos, 5 + 3 é igual a 8, ou 5 + 3 é (=) 8. As duas proposições são equivalentes mas não iguais. A primeira ressalta a ação feita, o ato de somar, enquanto na segunda a soma é tida como uma entidade.

O conceito de "pro-ceito" está baseado em Bruner apud. Tall (1994), que diz que há três modos de transcrever uma experiência.



Os sentidos usados para perceber uma ação dá aos símbolos existência cognitiva, tornando-o um objeto matemático. Podemos associar isso à teoria de Duval (2012) quando entendemos que esses símbolos exijam interação única que vai suscitar no aluno, ou agente que faz matemática, mobilizando, assim, um modo de pensar especifico, como diria Tall (1994). As variações de representações que tem relevância no processo de aprendizagem são aquelas que implicam um novo objeto, apresentando características e consequentemente modos de manipulação diferenciado do inicial.

Registros de Representação Semiótica, portanto, diz como os símbolos e sistemas lógicos se ligam ao processo de aprendizagem. Esses símbolos representam entes matemáticos, o uso de mais de uma representação desse ente, mostra domínio sobre sua definição, implicando no aprendizado. Esses símbolos, podem ter representação escrita ou falada, usando um apelo linguístico ou visual. Apresentando, portanto, diferentes modos de representação mental (TALL, 1994).

3. Problemas Históricos

Procuramos fazer um levantamento histórico em diferentes contextos sociais do desenvolvimento da álgebra, focando nos problemas e soluções de cada época. Tratamos como álgebra o os objetos primitivos que vieram a compor esse campo de conhecimento. Nos atentamos à suas representações e sua evolução tal como o conceito que esses objetos carregam.

PROBLEMA 1: MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O método egípcio era algorítmico, esse procedimento se repetia ao longo do papiro em problemas do tipo de Falsa Posição. Um olhar moderno sob os registros egípcios permite perceber que este método tem como base o conceito de proporcionalidade. Mesmo bem longe de uma definição formal de função do primeiro grau, eles usavam essa propriedade para resolver tais problemas. A representação usada era primordialmente a língua natural, com uso do sistema numérico desenvolvido por eles. Não havia uma variedade de representações semióticas na época.

O problema 26 do Papiro de Rhind diz, encontre a quantidade tal que quando é adicionada à $\frac{1}{4}$ dela mesma, o resultado é 15.

Tabela 1: Comparação do método antigo e moderno do Problema Egípcio

Método Antigo	**Método Moderno**
Assuma 4 (como resposta). Então 1 $\bar{4}$ ($\frac{1}{4}$ em notação egípcia) de 4 é 5. Multiplique 5 de tal forma a conseguir 15 como resposta. A resposta é 3. Multiplique 3 por 4. A resposta do problema é 12.	$x + \frac{x}{4} = 15$

Solução antiga está em registro linguístico, com tratamento aritmético. Apresenta um movimento entre o estágio Enativo e Icônico. A resolução moderna é feita em registro algébrico com tratamento algébrico, o que segundo Duval (2010) não favorece o aprendizado.

O método moderno ainda não explicita a proporcionalidade, que é uma característica de equações polinomiais do 1º grau, que é observada na resolução egípcia. O pensamento desenvolvido é basicamente simbólico, onde variáveis são definidas e tem valor semântico dentro do registro. O modo como se dá a resolução desses problemas do Egito antigo mostra a conversão entre registros, proporcionando contato com mais de um registro, e ainda como se dá a conversão que pode ser um processo difícil, mas que pode ser facilitado com exemplos como esse.

PROBLEMA 2: PROBLEMAS DIOFANTINOS

No Problema 27 do livro I que pede para encontrar dois números cuja soma e o produto são números dados. Que se feita pela linguagem apresentada por Diofanto seria:

Tabela 2: Comparação do método antigo e moderno do Problema de Diofanto

Método Antigo	**Método Moderno**
Considere que a soma seja 20 e o produto 96. Se esses números fossem iguais, cada um deles 10. Supomos a diferença entre eles seja 2ζ, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ζ de um destes 10 e adicionando ζ ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 – ζ + 10 + ζ = 20. Mas sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever (10 – ζ) (10 + ζ) = 96. Observamos, então, que $10^2 - \Delta^{Y} = 96$, e concluímos que o valor de ζ deve ser 2. Logo, os números procurados 10 – ζ e 10 + ζ são, respectivamente, 8 e 12.	$x + y = 20$ $xy = 96$ $x = 20 - y$ $20y - y^2 = 96$ $y^2 - 20y + 96 = 0$ $\Delta = 400 - 4(1)(96)$ $\Delta = 16$ $y = \frac{-20 \pm 4}{2}$ $y_1 = 12$ $y_2 = 8$

Apesar da imaturidade com linguagem algébrica, inexistente na época a não ser por abreviações, a solução traz um artifício puramente algébrico, o que chamaríamos hoje de “somar zero à equação”. O autor então tenta achar a soma de 10 mais o parâmetro somado ao cubo de 10 menos o parâmetro tal que essa soma seja 96, reduzindo o problema inicial à uma variável apenas, Segundo Tall (1994) a expressão tomada pelo autor 10 + z (10 mais um número) toma forma de conceito ao longo da solução, inicialmente ele e uma expressão para auxiliar a solução e logo em seguida é usado como um número, tornando-se um ente. Achando esse parâmetro tinha-se então a solução, bastando substituir nas "expressões" iniciais.

Percebemos que a solução antiga é descrita em linga natural, porém usa alguns símbolos das abreviações usadas por Diofanto. Segundo um Duval (2012) o que acontece é uma conversão congruente, já que a nova representação carrega as mesmas características que a anterior, mas ainda dois registros distintos, notamos que apesar de ainda ser bem aritmético, ele lida com os símbolos de Diofanto também, o que seria uma tratamento diferente. Observamos um pensamento icônico caminhando para o simbólico. Enquanto o método moderno é puramente algébrico.

PROBLEMA 3: SOLUÇÃO ISLÂMICA PARA UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Um exemplo de um problema do tipo 4 é: Qual deve ser o quadrado que, quando aumentado por 10 de sua raiz dá 39?

Tabela 3: Comparação do método antigo e moderno do Problema do Segundo grau Árabe

Método Antigo	**Método Moderno**
Dividimos pela metade o número de raízes, que dá 5. Então multiplica esse valor por ele mesmo, o produto dá 25. Some isso à 39, a soma dá 64. Agora tome a raiz desse número, que é 8 e subtraia a metade da quantidade	$x^2 + 10x = 39$ $x^2 + 10x - 39 = 0$ $\Delta = 100 - 4(1)(-39)$ $\Delta = 256$ $x = \frac{-10 \pm 16}{2}$ $x_1 = 3$ $x_2 = -13$

ISSN 2178-034X

de raízes, que é 5. O restante é 3. Essa é a raiz do quadrado que você procurava.	

Apesar da solução ser toda discursiva, o texto trata de conceitos matemáticos, não recorrendo a "âncoras" em outras áreas, como a Geometria. Podemos dizer que falta apenas o simbolismo em relação a solução que daríamos hoje em dia, os conceitos se conservariam. É feita em registro de língua natural, com tratamento aritmético. O pensamento passa a ser mais simbólico, apesar de não ter um registro algébrico, porém, até mesmo pelo anunciado, vemos traços de pensamento icônico. A resolução moderna é no registro algébrico, com tratamento algébrico, percebemos um pensamento algorítmico, numa linha simbólica.

PROBLEMA 4: FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Um problema apresentado por Jordano, proposição IV – 9 (KATZ, 2007), se o quadrado de um número, somado a um dado número é igual a um número obtido pela multiplicação da raiz e outro número dado, então dois valores são possíveis.

Tabela 4: Comparação do método antigo e moderno do Problema de Jordano

Método Antigo	**Método Moderno**
Deixe d ser a metade de b, eleve ao quadrado para conseguir f, e deixe g ser a diferença de x e d, que é, $g = \pm(x - \frac{1}{2}b)$. Então, já que $bx = x^2 + c$ e $g^2 = x^2 - bx + d^2 = x^2 - bx + f$, nós temos $x^2 + f = x^2 + c + g^2$ e $f = c + g^2$. Então $g = \sqrt{f - c}$. Jordano concluiu, por observação, que x pode ser obtido tanto por subtraindo g de $\frac{b}{2}$	$x^2 + c = bx$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

ou somando. $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{2} - c}$	

Jordano não tinha preocupação didática como Fibonacci. Observamos também um amadurecimento no formalismo. Ele se preocupava em manter uma sequencia lógica, características de um pensamento simbólico mais refinado. Linguagem verbal é usada pra definir versões idealizadas de objetos, construções e relações. Dos gregos ele tomou apenas o rigor, pois Jordano não adquiriu a tradição geométrica, mostrando um tratamento aritmético sob registro de língua natural, e um tratamento algébrico primitivo, sem o registro, mas lidando com entes algébricos descritos na língua corrente. Seu pensamento se encaixaria mais na categoria Simbólica de Tall (1994), o uso de objetos mentais onde a definição antecede o objeto em si, em oposição ao pensamento grego. O método moderno é o algoritmo da resolução da equação de segundo, puro algébrico, e generalizado, diferente de Jordano que não via todas equações do segundo grau da mesma forma.

4. Considerações Finais

Tivemos como objetivo verificar a relação entre o contato com a História da álgebra e o saber algébrico. Levando em consideração que para ensinar álgebra deve-se saber álgebra, isso melhoraria a formação docente. Relacionamos, então a Teoria dos registros de representação semiótica que diz que para dominarmos um conteúdo devemos conseguir usar diferentes representações com a teoria de visualização e simbolismo que ilustra como alternamos entre os tipos de representações.

Através da pesquisa histórica pudemos notar que ao longo da história surgiram vários registros de representação, que foram sendo usados ao longo da história, e que a álgebra nem sempre teve esse formato que vemos hoje. E, segundo Duval (2010), a variedade de registros conhecida esta diretamente ligada ao aprendizado, culminando na habilidade de ensinar álgebra do professor.

Esperamos que este trabalho tenha contribuído para destacar a importância da história da Matemática na formação matemática do professor. Além disso, esperamos que professores, futuros e atuantes, possam se inspirar de modo que se dediquem, cada vez mais, aos estudos históricos.

ISSN 2178-034X

5. Agradecimentos

Agradeço à professora Beatriz D'Ambrósio. A oportunidade oferecida de trabalhar com ela durante o intercâmbio foi um dos momentos de maior crescimento acadêmico para mim. Foi nesse tempo que nasceu o tema desse trabalho. Agradeço, também, ao professor orientador Magno Luiz Ferreira pelo companheirismo, e aprendizado durante a produção deste trabalho.

6. Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Parecer nº 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Liceniatura. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil,** Brasília, DF, n. 42. 5 mar. 2002. Seção 1. p. 15.

DESCARTES, Renee. **The Geometry of René Descartes:** with a Facsimile of the First Edition. 54. ed. Mineola, Ny: Courier Corporation, 2012. 244 p. (Dover Books on Mathematics).

DUVAL, Raymond; MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registro de representação semiótica. 7. ed. Campinas: Papirus, 2010. 160 p.

DUVAL, Raymond. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FERREIRA, Magno Luiz. **ÁLGEBRA: COMO AS CRENÇAS DOS PROFESSORES INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS.** 2009. 162 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

FIBONACCI, Leonardo; SIGLER, Laurence E.. **Fibonacci's Liber Abaci.** New York: Springer, 2002. 672 p.

KATZ, Victor J.. STAGES IN THE HISTORY OF ALGEBRA WITH IMPLICATIONS FOR TEACHING. **Educational Studies In Mathematics: An International Journal.** Netherlands, p. 185-201. out. 2007.

KATZ, Victor J.. **A History of MATHEMATICS An Introduction:** an introdution. 3. ed. Chicago, Illinois: Pearson, 2009. 977p.

MELO, José Ronaldo. Da Aritmética a Gênese do Pensamento Algébrico em Diofanto. **Elementos,** Rio Branco, Ac, v. 3, n. 2, 2013.

RAMOS, Maria Dalila Correia Pedrosa. **Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria**

Analítica de Descartes e de Fermat. 2013. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat, Departamento de Matemática, Universiade do Porto, Porto, 2013.

RODRIGUES, Dorival R. Jr. **A Contribuição Da História Da Álgebra Na Formação Matemática Do Professor A Partir Dos Registros De Representação Semiótica.** 2016. 69 f. Monografia – Curso de Licenciatura em Matemática, IFRJ.

RODRIGUES, Horácio Wanderlei; SERRATINE GRUBBA, Leilane. **Bachelard e os Obstáculos Epistemológicos à Pesquisa Científica do Direito**. **Seqüência: Estudos Jurídicos e Políticos**, Florianópolis, p. 307-334, jul. 2012. ISSN 2177-7055. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/sequencia/article/view/22660>. Acesso em: 15 jan. 2016.

SANTOS, Leandra Gonçalves dos. INTRODUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., 2010, Salvador, Ba. **Comunicação Científica.** Salvador: Sbem, 2010. p. 1 - 11.

SERFATI, Michel. **Symbolic revolution, scientific revolution: mathematical and philosophical aspects**. *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics*, 2010. p. 103 - 122.

TALL, David. A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics. In: PROCEEDINGS OF THE 46TH CONFERENCE OF CIEAEM, 1., 1994, Toulouse, France. **Plenary Presentation.** Toulouse, France: University Od Warwick, 1994. p. 15 - 27.