A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM NA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Mariana dos Santos Cezar
Instituto Federal do Espírito Santo
marianascezar@hotmail.com

Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
rodolfochaves20@gmail.com

Resumo:
Neste artigo descrevemos nossa pesquisa de mestrado que trata da produção de significados matemáticos nos processos de ensino e aprendizagem da construção dos números reais. Com o objetivo de refletirmos sobre o ensino de números reais na formação inicial do professor de Matemática, adotamos como estratégia a construção dos números reais e a análise de significados matemáticos produzidos por alunos de Licenciatura em Matemática. Para tal, utilizamos como fundamentação teórica o Modelo dos Campos Semânticos e como método a pesquisa-ação. Durante três meses, os alunos divididos em turmas de iniciantes e concluintes participaram da pesquisa e suas ações enunciativas foram registradas em gravações de áudio e questionários. No final, pesquisadores e sujeitos, analisaram os registros e concluíram que durante o processo de ensino e aprendizagem os significados produzidos pelos alunos nem sempre correspondem aos enunciados e produzidos pelo professor e que a construção dos números reais possibilita a compreensão do conceito de números reais.

Palavras-chave: Números reais; Formação inicial; Professor de matemática; Produção de significados.

1. INTRODUÇÃO

Durante nossa trajetória como professores de Matemática, atuando na Educação Básica, no Ensino Superior e em formações continuadas de professores, nos deparamos com circularidades e incompreensões a respeito do ensino de números reais. Advindas de alunos e professores muitas dúvidas têm emergido quanto à definição dos números racionais, irracionais e reais. Comprovamos tal problemática em encontros de formação continuada de professores de Matemática que destacaram a dificuldade de ensinar a definição de número reais, tendo em vista que tal dificuldade, segundo os professores, advém da não adequação dos conhecimentos adquiridos em sua formação inicial de professor com o ensino na educação básica. Diante dessa experiência nos propomos a pesquisar sobre o tema números reais e refletir sobre a formação inicial do professor de Matemática.

Com esse propósito traçamos como objetivo geral refletir sobre o ensino de números reais na formação inicial do professor de Matemática. Para isso, adotamos como estratégia a construção dos números reais segundo Caraça (1989) com fundamentação histórica na visão de Roque (2012). Para compreensão e análise da produção de significados matemáticos utilizamos como fundamentação teórica o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e como método a pesquisa-ação. Como nosso foco foi a formação inicial do professor de Matemática, optamos por desenvolver essa pesquisa com alunos da Licenciatura em Matemática de uma instituição pública brasileira. A investigação se deu numa sala de aula de alunos do 1º período e com um grupo de alunos concluintes que cursavam disciplinas finalistas. O processo de desenvolvimento da pesquisa em campo durou três meses.

Com o intuito de desenvolvermos a pesquisa com o envolvimento dos sujeitos e dos pesquisadores, de forma participativa, de maneira que as fases da pesquisa pudessem ser construídas coletivamente, buscamos um método que subsidiasse essa proposta. Por isso, adotamos a pesquisa-ação.

Para a construção dos números inserimos um pouco da História da Matemática, destacamos alguns aspectos históricos sobre a evolução dos números reais e a formulação de sua definição. Para tal, descrevemos o problema da medida que ocasionou na construção do campo racional; o "surgimento" de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão do campo racional para o campo irracional; e os cortes de Richard Dedekind, que segundo Caraça (1989), provê uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais. Destacamos também a importância de se utilizar esses procedimentos na formação de professores de Matemática, visando uma melhor compreensão dos porquês de tais definições.

Por fim, analisamos coletivamente os resultados obtidos durante o processo de construção dos números reais. Para que esta análise fosse possível o desenvolvimento da pesquisa foi gravado em áudio e outros registros foram realizados por meio de questionários.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste estudo adotamos um modelo de conhecimento que nos possibilitou analisar com mais propriedade o processo de produção de significados. Como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos foi concebido por Rômulo Campos Lins. Com o intuito de delinearmos nossas perspectivas, descrevemos alguns conceitos do MCS e suas relações essenciais para esta pesquisa.

Lins (2012) movido por suas inquietações relacionadas à sala de aula "[...] queria dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando 'erravam', mas sem recorrer a esta ideia de erro" (LINS, 2012, p. 11). Nessa perspectiva direciona seu olhar na busca da produção de significados; isto é, o que os alunos pensam e falam quando resolvem algum problema, seja "certo" ou "errado"; qual a justificativa para esta resolução. Questionar nossas verdades nos permite essa produção, e essa produção de significados nos conduz a produção do conhecimento. Segundo Lins (2012) a maneira como produzidos um conhecimento está relacionada à forma como compreendemos uma enunciação. Mas, em que consiste o conhecimento? Lins (2012) defende que um conhecimento consiste de uma crença-afirmação, junto com uma justificação. O sujeito acredita em algo (crença) que se caracteriza com uma afirmação que justifica sua crença-afirmação, e juntos (crença-afirmação e justificação) produzem, segundo o referencial supracitado, o conhecimento.

Lins (2012) destaca ainda que nenhum conhecimento vem ao mundo ingenuamente. "[...] Aquele que o produz, que o enuncia, já fala em uma direção (o interlocutor) na qual o que ele diz, e com a justificação que tem, pode ser dito" (LINS, 2012, p. 13). Falamos na direção de um interlocutor e esperamos que o mesmo aceite e reproduza o que dizemos, utilizando a justificação que acreditamos.

Nesse contexto podemos pensar que várias pessoas podem ler o mesmo texto e produzir ou não diferentes significados. Por exemplo, na afirmação "número irracional é todo número que não é racional", muitos tomam como universo o conjunto dos números reais e justificam compreender que, no domínio dos reais, o número não racional é irracional. Por outro lado, alguém pode questionar se a $\sqrt{-1}$ (não racional) é um número irracional, pois pela afirmação, "irracional é todo número que não é racional", esse questionamento é válido. Nesse caso, não estaria considerando apenas o domínio dos reais, visto que, não foi estabelecido isso na afirmação. No exemplo descrito, os sujeitos atribuíram diferentes significados ou até mesmo produziram diferentes conhecimentos, isso se dá pela produção de significados.

Quando produzimos significados e emitimos enunciações estabelecemos uma relação que a nosso olhar, e no contexto ao qual estão inseridas, se constitui como verdadeira. Mas, existe uma diferença quando falamos em verdades. No MCS, a verdade é atribuída ao conhecimento produzido, e o fato de ter sido enunciado na direção de um interlocutor se torna verdadeiro, mas isso não autoriza dizer que o que é afirmado seja verdade, no sentido de verdade "universal".

Nesse contexto, Lins (1999) esclarece o fato do sujeito dizer algo é a garantia de poder dizer. Pensamos nessa situação tomando como exemplo os números irracionais, como já descritos. Se falarmos que "número irracional é todo número que não é racional", para sujeitos que nem sequer pensam na existência de raízes de números negativos, essa afirmação é verdadeira, portanto, legítima. No entanto, se falarmos para sujeitos que possuem esse conhecimento, a palavra "todo" pode gerar conflitos, como já destacado.

Nesse ponto de vista, "o aspecto central de toda aprendizagem – em verdade o aspecto central de toda a cognição humana – é a *produção de significados*" (LINS, 1999, p. 86).

> [...] significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 145-146).

Logo, o MCS admite uma perspectiva diferente, a de que o conhecimento construído pelo aluno pode não ser o mesmo construído e enunciado pelo professor; no entanto, ambos são considerados válidos.

No processo de produção de significados é estabelecido um espaço comunicativo ou espaços comunicativos, tomado (s) como processo (s) de interação onde os interlocutores são compartilhados. A enunciação é produzida pelo o autor que fala na direção de um leitor, constituído pelo o autor. Por sua vez, o leitor produz significado para a enunciação e fala na direção de um autor, constituído pelo o leitor. De acordo com esta perspectiva, durante todo o

ISSN 2178-034X

processo de comunicação são relacionados três elementos fundamentais: autor, texto e leitor. Nesse sentido, Silva (2003, p.62) enfatiza:

> O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo à aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte ou o leitor do livro. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado.

Nesse viés, nas prerrogativas do espaço comunicativo descrito por Lins dentro do MCS, é que Chaves (2004, p. 12) enfatiza:

> [...] que nossos entendimentos das leituras que realizamos se processam de forma que *os autores* chegam até nós (*o leitor*) como resíduos de enunciações, que se constitui em texto a partir de nossa produção de significados, que novamente resulta em resíduo de enunciação.

Assim, pensamos que, quando entendemos uma enunciação (não necessariamente da mesma forma que o autor propôs, mas em nossa perspectiva, de acordo com nossa compreensão), estamos produzindo significados e, ao enunciá-los, novos leitores produzirão significados que poderão estar de acordo ou não com o nosso.

Em síntese, nesta pesquisa somos autores e leitores, os sujeitos da pesquisa são autores e leitores. Na medida em que construímos os campos numéricos, como autores, os sujeitos são os leitores, como participantes desta construção; os leitores se tornam autores e nós nos tornamos leitores, e na medida em que mostramos os resultados de nossas reflexões acerca dos significados matemáticos que os sujeitos produziram, nós nos tornamos leitores e autores, e assim segue o processo, como se estivéssemos em um ciclo; ora autores, ora leitores.

3. FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa é caracterizada com uma abordagem qualitativa, nos moldes da pesquisa-ação segundo Barbier (2012), Thiollent (2011). Essa opção metodológica se deu devido ao nosso intuito de investigar o processo de produção de significados por meio das enunciações dos sujeitos.

A pesquisa de campo foi desenvolvida com alunos da Licenciatura em Matemática de uma instituição pública brasileira, sendo uma turma do 1º período (iniciantes) e um grupo de alunos concluintes. O processo de desenvolvimento e investigação foi dividido em 5 etapas: i) no primeiro encontro explicamos os procedimentos da pesquisa. O tema, o porquê da escolha, os objetivos a serem alcançados e a importância da participação dos grupos de alunos. Convidamo-los a participar da pesquisa e solicitamos suas respectivas autorizações; ii) no segundo encontro iniciamos as construções. Trabalhamos com questionários e gravações de áudio e juntos construímos o campo racional; iii) no terceiro encontro construímos o campo irracional; iv) no quarto encontro construímos o campo real; v) no quinto encontro realizamos uma plenária, análise aos resultados.

O processo de investigação partiu de uma conversa com os sujeitos acerca do tema em questão e do conhecimento prévio em relação às definições de números reais, mais especificamente, dos racionais e irracionais. Após este primeiro momento iniciamos o estudo da construção do campo racional onde foi questionado aos sujeitos como eles definiam números racionais. Esse questionamento foi realizado antes e depois da construção com o intuito de realizarmos uma analogia em suas respostas no término do processo.

De modo análogo iniciamos a construção do campo irracional com a questão: defina um número irracional. Após a construção do campo irracional propomos aos sujeitos que definissem novamente os números irracionais. Tal solicitação gerou muitas reflexões acerca da existência de uma definição para tal campo numérico, reflexões estas que serão descritas mais adiante.

Por fim, sobre a construção dos campos numéricos, propomos que os sujeitos definissem números reais. Nessa perspectiva todo o processo de construção dos campos racional e irracional seria necessário para se compreender porque "união dos racionais com os irracionais". No final da construção do campo real, propomos novamente aos sujeitos que definissem números reais.

Finalizamos o processo de investigação com a plenária que foi um momento de reflexão, discussão e de apresentação (por meio de *slides*) das análises prévias do material registrado. Nesse momento os sujeitos puderam também fazer suas análises acerca do que foi desenvolvido e registrado ao longo da pesquisa.

ISSN 2178-034X

4. INVESTIGAÇÃO À ANÁLISE DOS DADOS

Para a investigação à análise dos dados pontuamos e descrevemos as enunciações dos sujeitos que foram registradas. Em nossa análise consideramos que quando uma pessoa produz significado para um resíduo de enunciação (no caso, as enunciações dos pesquisadores, colegas de turma e a escrita do livro) nos propomos a refletir sobre o que essas enunciações nos têm a dizer sobre o processo de construção dos números reais desenvolvido. Ou seja, que objetos foram constituídos no interior de uma atividade? O que foi possível analisarmos da produção de significados fazendo uma analogia com o antes e o depois? Dessa forma, descrevemos alguns significados que foram produzidos aos resíduos de enunciações dos sujeitos envolvidos. Como a pesquisa foi desenvolvida com 32 sujeitos fica inviável descrevermos toda a análise, logo destacaremos apenas alguns registros, mas que nos proporcionarão compreendermos o processo. Lembrando que durante todo o processo de produção os sujeitos foram envolvidos por meio de situações-problemas.

Na construção do campo racional sobre a questão defina números racionais, destacamos as respostas:

<u>Antes:</u>

Sujeito 1: "Número racional que pode ser representado por uma razão (ou fração) entre dois números inteiros".

Sujeito 2: "É o número que consigo extrair uma raiz e como resultado tenho um número inteiro. Ex: $= \sqrt{9} = \pm 3$ ou fracionário (periódico)".

<u>Depois:</u>

Sujeito 1: "É a divisão entre dois números inteiros, ou seja, a razão entre dois números inteiros, sendo que o denominador nunca seja zero".

Observamos que essa resposta ficou mais fundamentada após a construção e algumas restrições foram evidenciadas, como por exemplo, o denominador ser diferente de zero.

Sujeito 2: "São todos os números que são representados na forma A/B, onde A e B são números inteiros e sendo $B \neq 0$".

Observamos que essa resposta, comparada com a primeira, evidenciou a construção de conhecimento no que diz respeito à formulação para expressar um número racional.

Durante a construção desse campo outras reflexões foram realizadas de forma a propiciar o envolvimento dos sujeitos nesse processo.

Em relação à definição dos números irracionais destacamos algumas respostas:

Antes:

Sujeito 1: " Número irracional é um número que representa uma grandeza incomensurável, pois com os conjuntos até então criados, não é possível expressar a medida desses segmentos".

Sujeito 2: "Número irracional é um número que não pode ser escrito como uma fração irredutível, pois seu resultado não é um número inteiro e nem uma fração irredutível".

Depois:

Sujeito 1: "São números que não podem ser escritos na forma a/b com a e b inteiros e $b \neq 0$. Porque não há como mensurar 'a' tomando 'b' como unidade".

Observamos nessa resposta que o sujeito relaciona a ideia de números irracionais com medidas e unidades de medidas. Isso demonstra que o sujeito construiu conhecimento acerca de segmentos incomensuráveis, ou seja, constituiu um pensamento geométrico, o que complementa seu raciocínio inicial. Além disso, demonstra que construiu o pensamento algébrico acerca da definição de números racionais.

Sujeito 2: "Número irracional é todo número que não pode ser escrito na forma m/n, onde $n \neq 0$ e não pertence a nenhum campo numérico já definido (IN, Z e Q)".

Observamos que o sujeito, inicialmente, descreve número irracional como aquele que não possui o formato dos racionais. Após a construção do campo irracional ele descreve a mesma ideia, porém relacionando isso com a definição que construímos para os números racionais. Com isso, o sujeito construiu um pensamento mais algébrico.

No final da construção os sujeitos foram ouvidos e relataram que o processo de construção dos números irracionais proporcionou a construção do conhecimento, pois permitiu compreender a necessidade de sua constituição para a resolução de problemas cotidianos, bem como, entender o processo de extensão numérica. Além disso, evidenciamos a não existência de uma definição para caracterizar ou generalizar o "formato" de um número irracional, assim como para os racionais.

Por fim, construímos o campo dos números reais. Solicitamos antes de iniciarmos a construção, que os sujeitos definissem um número real. Algumas respostas:

Antes:

Sujeito 1: "É todo número pertencente ao conjunto dos reais, que são todos os números, com exceção dos complexos".

Sujeito 2: "É a união dos conjuntos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Porque com a união desses conjuntos temos a propriedade da continuidade".

Depois:

Sujeito 1: " É a união dos conjuntos racional e irracional".

Observamos que o sujeito reafirmou seu conhecimento inicial, destacando uma definição que remete a já utilizada por ele.

Sujeito 2: "É a união dos conjuntos racionais e irracionais, porque necessitam de uma expansão do campo racional".

Observamos que o sujeito relaciona a definição de número real com a necessidade de expandir o campo racional. Isso foi observado durante a construção do campo real. Em relação à resposta inicial, o sujeito observa, na resposta após construção, que não há necessidade de descrever também a união dos naturais e dos inteiros, pois estes já fazem parte do conjunto dos racionais, com isso, observamos que o sujeito produziu significados.

No final do processo de pesquisa perguntamos aos sujeitos o que eles observaram sobre tal construção e os sujeitos evidenciaram a importância do processo para a construção do conhecimento acerca da definição de número real.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa também realizamos uma investigação a pesquisas na área de Educação Matemática, que tratam do tema números reais, como por exemplo: Pasquini (2007), Cezar (2011), Pommer (2012). Nessas investigações constatamos, por meio das considerações dos autores, a existência de problemas nos processos de ensino e aprendizagem acerca do tema, sendo evidenciados na educação básica e em formações (inicial e continuada) do professor de Matemática. Tais leituras levaram-nos a perceber que a construção dos números reais, bem como, a extensão dos campos numéricos e as explicações para a constituição de definições para estes números, não têm sido tratadas com maior relevância nos cursos de formação de professores de Matemática. É evidenciado um ensino mais axiomático do que construtivo. Devido a sua complexidade e utilidade na prática escolar — visto que, o ensino de números reais é desenvolvido desde o Ensino Fundamental — defendemos que é primordial que este tema seja tratado de forma mais incisiva, sistematizada e aprofundada em seus aspectos conceituais e históricos, na formação inicial do professor de Matemática.

Em relação à análise dos resultados, constatamos que refletir a respeito dos significados produzidos por diversos sujeitos não constitui uma tarefa fácil, uma vez que, os significados produzidos pelos leitores podem não ser os mesmos emitidos pelos autores. Dessa forma, o trabalho com o MCS representou um diferencial: passamos a prestar mais atenção no que os sujeitos enunciam e a refletir a respeito dos significados que eles produzem. Aprendemos que a sala de aula precisa ser um espaço comunicativo, onde é fundamental que o professor "leia" o aluno e compreenda que é a partir de suas enunciações e das enunciações dos alunos que a relação dialógica de comunicação é estabelecida. O reflexo de tal processo impacta também nossas posturas diante de nossos alunos, em nossas ações como professores, no trato com a sala de aula, para minimizar distâncias entre nossas enunciações e a produção de significados matemáticos produzidos por nossos alunos.

Em relação a construção dos números evidenciamos que o processo de construção do campo racional proporcionou compreendermos que o que consideramos como definição de números racionais: "Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e

ISSN 2178-034X

n ≠ 0”, é uma generalização algébrica que permite representar qualquer número pertencente a este conjunto. Em contrapartida, a construção do campo irracional proporcionou compreendermos que, não existe uma generalização algébrica que permita expressar o “formato” de um número irracional. Com isso chegamos, junto com os sujeitos da pesquisa, à conclusão de que para os números irracionais não existe uma única definição.

O processo de construção do campo real proporcionou entendermos o porquê da clássica afirmação “União dos racionais com os irracionais”. Compreendemos a partir dos cortes de Dedekind ─ descrito na obra de Caraça (1989) ─ a ideia de união desses conjuntos e, necessariamente que, o corte na reta real que não constituiu um número racional é um número irracional. Tal método possibilitou à construção de conhecimento acerca da definição de números reais. Isso foi constatado por meio das enunciações dos sujeitos que descreveram a importância da construção dos números para a formação do professor de Matemática.

Por fim, destacamos que a importância dessa pesquisa está pautada no que ela representa para nós participantes e para a formação do professor de Matemática. Entendemos que o processo de construção dos números reais representa mais do que a compreensão de um método, concebe o alicerce para a construção de conhecimento do professor de Matemática. Bem como, a pesquisa proporciona mais uma etapa em busca da compreensão de produção de significados desenvolvido por nossos alunos, para que possamos com mais propriedade compreender esse processo e por meio dele intervir nos processos de ensino e aprendizagem.

6. REFERÊNCIAS

BARBIER, René. ***A Pesquisa-Ação***. Tradução Lucie Didio. Nova Edição. Brasília: Liber Livro Editora, 2012.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Concepções acerca do conceito de Números Reais**: uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica. Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produção de Significados Matemáticos na Construção dos Números Reais**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação Em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais?** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro. Universidade Estadual Paulista, 2004.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 75 - 94.

LINS, Romulo Campos. O modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus. (Org). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 11- 30.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação**. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais**. Tese de doutorado. Programa de Pós-graduação em Educação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Amarildo Melchiades. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2003.

THIOLLENT, Michael. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.