UM RECURSO PARA O ENSINO DA DIFERENCIABILIDADE

Marcio Vieira de Almeida
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
marcioalmeidasp@gmail.com

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
sigliori@pucsp.br

Resumo:
Este artigo se insere no âmbito das pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior, em especial o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Exatas. Nele é apresentado um recurso, parte de uma pesquisa mais ampla, construído a partir de constructos teóricos. Da Gênese Documental de Gueudet e Trouche se toma por referência as três componentes: matemática, material e didática e, de Tall as noções de organizador genérico e raiz cognitiva. Esse recurso é destinado ao ensino e aprendizagem da noção de diferencial de uma função real, utilizando o *software* GeoGebra. Sua elaboração insere-se na problemática que indica a necessidade de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática e de produzir materiais para o ensino, baseados em resultados de pesquisas.
Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem do Cálculo; Diferenciabilidade; Recurso; GeoGebra.

1. Introdução

Em determinados episódios da história da constituição do conceito formal de continuidade, matemáticos, do início do século XIX, afirmavam que funções que fossem contínuas deveriam ser diferenciáveis em alguns pontos de seu domínio. A construção de um exemplo de função contínua e não diferenciável, em nenhum ponto, é importante para desmontar essa afirmação. Faváro e Araujo corroboram com ideia, quando dizem que

> [...] muitos matemáticos acreditavam que as funções contínuas tinham derivadas num número "significativo" de pontos e alguns matemáticos tentaram dar justificativas teóricas deste fato, como, por exemplo, A. M. Àmpere em um trabalho publicado em 1806. Mas até o início do século XIX os principais conceitos do Cálculo ainda não tinham uma fundamentação lógica adequada e o trabalho de Àmpere falhava nisso, dadas às limitações das definições de seu tempo. Em 1872, K. Weierstrass publicou um trabalho que "chocou" a comunidade matemática provando que esta conjectura era falsa. Mais precisamente, ele construiu um exemplo de uma função contínua que não era diferenciável em nenhum ponto[1] (FAVÁRO; ARAÚJO, 2009, p. 5).

[1] A função construída por Weierstrass é dada pela seguinte série de funções $W(x) = {}_{n=0} a^n \cos\left(b^n \; x\right)$, sendo que $0 < a < 1$ e b é um inteiro ímpar e $ab > 1 + \frac{3}{2}$.

Neste artigo o foco é essa a relação entre continuidade e diferenciabilidade de uma função real. Ela é tratada por meio de um exemplo de uma função contínua e não diferenciável, em todos os pontos do domínio. Objetiva-se com a exploração desse exemplo, além de explorar essa relação também favorecer o desenvolvimento teórico formal da Matemática.

O exemplo de função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio tratado neste artigo é construído com o *software* GeoGebra (ALMEIDA,2013), e é resultado parcial de uma pesquisa mais ampla que visa o desenvolvimento de documentos para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. A construção desse exemplo se insere na seguinte problemática: a necessidade de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática e de produzir materiais para o ensino, em especial do Cálculo, baseados em resultados de pesquisas.

Essa problemática tem merecido a atenção de pesquisadores, do campo da Educação Matemática. Jaworski, por exemplo diz que esse campo,

> [...] tem se tornado maduro em suas considerações teóricas. Entretanto, a posição do ensino da Matemática permanece teoricamente anômala e não desenvolvida. Enquanto teorias proveem-nos lentes para analisar o ensino (LERMAN, 2001), as "grandes teorias" não parecem oferecer percepções claras para o ensino e maneiras nas quais o ensino vise à promoção da aprendizagem na Matemática (JAWORSKI, 2006, p. 188, tradução nossa).

Rasmussen, Marrangelle e Borba ressaltam que "é fundamentalmente importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano" (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014, p. 507, tradução nossa).

Além disso, a necessidade de considerar diferenças tanto na maneira pela qual cursos de Matemática em Nível Superior são ministrados, quanto nas expectativas dos professores em relação à aprendizagem dos alunos, levam pesquisadores a incentivar a produção de materiais e propostas de abordagens de ensino de tópicos da Matemática no Ensino Superior.

Mamona-Downs e Downs (2002) destacam, tendo por base comentários de estudantes, diferenças na aprendizagem da Matemática de Nível Básico para o Superior. A primeira é que as práticas de ensino, de Nível Superior, exigem uma participação independente do estudante em sua aprendizagem, o que muitos estudantes não estão acostumados. Nesse aspecto, os autores relatam o seguinte sentimento dos estudantes: "Eles sentem que a própria natureza do material ensinado mudou radicalmente, e eles não entendem completamente

ISSN 2178-034X

como, por que e de que forma lidar com essa mudança" (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002, p. 168, tradução nossa).

Essas reflexões reforçam a importância de criar documentos para ensino, fundamentados teoricamente, foco deste trabalho.

2. Quadro Teórico

O termo recurso, no âmbito deste artigo, se insere na teoria da Gênese Documental, elaborada por Gueudet e Trouche.

Segundo esses pesquisadores, materiais de ensino podem compor o trabalho de documentação elaborada por professores para preparar sua aula, que está no cerne tanto das atividades quanto do desenvolvimento profissional do professor (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 199). O trabalho de documentação, definido pelos autores, constitui-se em: buscar por novos recursos, selecionar e criar tarefas matemáticas, planejar sequências nas quais as atividades serão desenvolvidas, gerenciar o tempo disponível e administrar os artefatos[2] disponíveis. Pela Gênese Documental um documento é representado pela expressão:

$$Documento = Recursos + Esquema\ de\ utilização \qquad (1)$$

O termo recurso, para Gueudet e Trouche, é utilizado para descrever uma variedade de artefatos que pode ser utilizada por um professor. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro texto, uma aplicação produzida em um *software*, uma lista de exercícios que será resolvida pelos alunos, uma discussão com outros professores, etc... Um recurso nunca é isolado, mas sim um conjunto de recursos, e o professor esboça em um conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

Ou ainda,

> [...] um recurso pode ser um artefato, ou seja, um resultado da atividade humana, elaborado pela atividade humana com uma finalidade precisa. Mas os recursos superam artefatos: a reação de um estudante, uma vara de madeira no chão também podem constituir-se como recursos, por um professor que os adote em sua atividade (GUEUDET; TROUCHE, 2012, p. 204, tradução nossa).

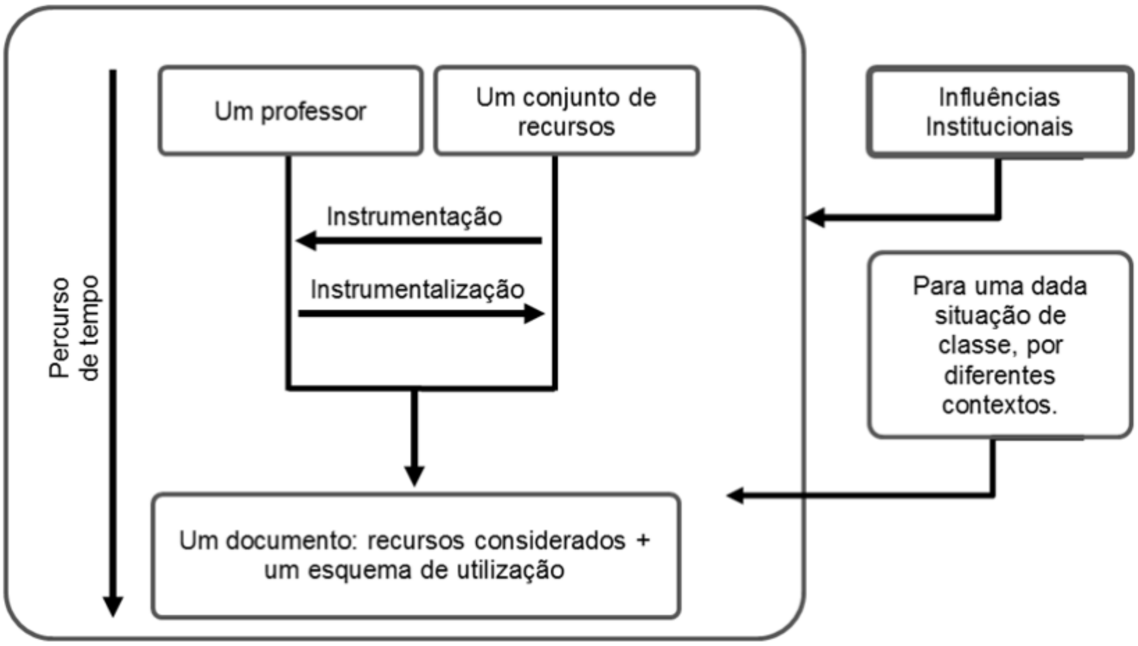
Neste artigo o conjunto de recursos é expresso no material elaborado.

[2] Segundo Rabardel (1995).

O esquema de utilização, indicado em (1), é um componente psicológico definido por Vergnaud "como uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações" (VERGNAUD, 1998, p. 229).

Gueudet e Trouche representam o processo de Gênese Documental, pelo seguinte esquema (Figura 1):

Figura 1 – Representação esquemática da Gênese Documental.



Fonte: GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa.

Durante o processo de Gênese Documental, devem ser levados em consideração três componentes, que são entrelaçados, na consideração de um conjunto de recursos, ou um documento: material; matemática e a componente didática.

A componente material é composta por elementos que serão utilizados para o desenvolvimento de uma atividade, por exemplo, papel, computador, fichários, etc.

As noções matemática envolvidas, tarefas e técnicas matemáticas necessárias compõem a componente matemática de um dado conjunto de recursos, ou documento.

Na componente didática devem ser levados em consideração aspectos institucionais que influenciam o trabalho do professor em sala de aula. Gueudet e Trouche definem que essa componente é composta por "elementos organizacionais, que vão desde o mapeamento do ano ao planejamento de uma única sessão de uma hora" (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

No que segue passamos a descrever as noções de organizador genérico e raiz cognitiva de Tall que embasam a produção do recurso apresentado neste artigo.

A noção de organizador genérico é "um ambiente (ou micromundo[3]) que permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos, de um conceito matemático específico, ou de um sistema de conceitos relacionados" (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa). O "termo 'genérico' significa que a atenção do aluno é dirigida a certos aspectos dos exemplos que incorporam o conceito mais abstrato" (TALL, 1986, p. 76, tradução nossa). Exemplos de organizadores genéricos são: o material Cuisenaire e os Blocos de Dienes.

Outro exemplo de um organizador genérico é um *software* que dá retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, como GeoGebra, por exemplo. Nesse contexto a utilização desse *software* deve levar em conta a seleção de uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Essa ideia não é necessariamente fundamental para a teoria matemática pretendida, porém, ela deve auxiliar o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico.

Tall alerta que um organizador genérico deve conter elementos que favoreçam o desenvolvimento teórico formal da Matemática, pois

> [...] se um organizador genérico está devidamente projetado e o agente de organização atua de forma eficaz, a compreensão intuitiva das ideias oferecidas pelo organizador pode fornecer uma base sólida para o desenvolvimento posterior da teoria formal. Isso depende muito da ação do agente organizador de modo a garantir que as propriedades não-genéricas não causem distração gerando obstáculos (TALL, 1986, p. 85, tradução nossa).

Uma noção utilizada no desenvolvimento de um organizador genérico é denominada por raiz cognitiva, "uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, e que deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa).

A raiz cognitiva que norteia esta pesquisa é a noção retidão local, originada a partir da percepção de que quanto maior a ampliação do gráfico de uma função, menor será a curvatura percebida em sua representação gráfica (TALL, 1989). Segundo Tall, essa noção deve ser levada em conta no ensino por dois motivos: o primeiro é que por meio dela seria possível contornar algumas das "conhecidas dificuldades conceituais dos alunos em compreender o conceito de limite" (DUBINSKY; TALL, 1991, p. 238, tradução nossa); o outro seria porque essa noção "permite que *função* gradiente seja vista como a mudança do gradiente *do próprio gráfico*" (TALL, 2000, p. 12, tradução nossa, grifo do autor). Nesse sentido, a representação

---

[3] Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 *apud* TALL, 1986) como "um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não".

gráfica de uma função diferenciável, quando ampliada suficientemente, assemelha-se localmente a um segmento de reta. Observe a Figura 2, nela é possível perceber que dada a representação gráfica de uma função diferenciável, localmente ela assemelha-se a um segmento de reta:

Figura 2 – Uma pequena parte da curva assemelha-se a um segmento de reta.

Fonte: TALL, 2013, p. 11.

Pela retidão local é possível inferir que uma função que é contínua num determinado ponto e não diferenciável nele, em uma vizinhança desse ponto possui uma representação gráfica que não se assemelha a um segmento de reta, e até a conjecturar como seria a representação gráfica de uma função contínua em um ponto e não diferenciável. É o caso do exemplo explorado na próxima seção.

3. Recurso proposto

Os elementos tratados anteriormente serviram de base para a formulação de recursos, os quais visam a construção de um documento, no sentido de Gueudet e Trouche (2009), e são destinados ao estudo da relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade.

O recurso apresentado neste artigo, exemplo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, foi construído com o *software*, de Geometria Dinâmica, GeoGebra. Esse *software*, foi escolhido por ser gratuito; possibilitar a exploração de um conceito matemático nos campos da Geometria, da Álgebra e do Cálculo; ser escrito em linguagem Java; possuir interface simples e intuitiva; possibilitar a elaboração de *applets* para uso em sala de aula que possam ser disponibilizar em *websites* da internet. Esse *software* possui todas as ferramentas e comandos que possibilitam a construção das somas parciais da série de funções cujo limite é a referida função.

O uso do computador e a escolha de um *software* adequado se sustentam na seguinte afirmação de Tall quando diz que:

> […] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil no Cálculo e em Análise. A utilização criativa dos gráficos que plotam gráficos e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes a lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de "retidão local", integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1ª ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenhar gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

Além disso, o GeoGebra reúne elementos que pesquisadores do campo da Educação Matemática apontam como salutares quando computadores são utilizados no ensino, como por exemplo garantir a visualização de duas (ou mais) representações de conceitos matemáticos. Segundo Tall (1991), desconsiderar o papel da visualização na aprendizagem da Matemática "é negar as raízes de muitas de nossas ideias matemáticas mais profundas" (TALL, 1991, p. 1, tradução nossa).

Para Guzmán, a visualização auxilia

> [...] não apenas no nascimento do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e também, certamente, em processos de transmissão e comunicação que são a própria atividade matemática (GUZMÁN, 2002, p. 2 – 3, tradução nossa).

Outro ponto ressaltado é a possibilidade de apresentar múltiplas representações de um mesmo objeto matemático. Para Gravina e Santarosa (1998),

> Quanto ao potencial das múltiplas representações, considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados (GRAVINA, SANTAROSA, 1998, p.11).

O exemplo apresentado neste artigo, foi objeto de estudo de Tall no artigo *The blancmange funciton continuous everywhere but diferentiable nowhere* (TALL, 1982). Nós pretendemos apresentar uma outra possibilidade de explorar o mesmo exemplo, utilizando outro *software*, o GeoGebra, inserindo os pressupostos da Gênese Documental e favorecendo a utilização do exemplo em sala de aula.

E assim a componente material desse recuso, proposta na Gênese, é o computador munido do *software* GeoGebra. As componentes matemáticas são a continuidade e a diferenciabilidade de uma função real; a discussão da condição de diferenciabilidade ser uma condição suficiente, mas não necessária para que uma função seja contínua em um ponto, ou em outra palavras a discussão de que o teorema: “se f é diferenciável em um ponto então f é contínua nele”, não admite recíproca.

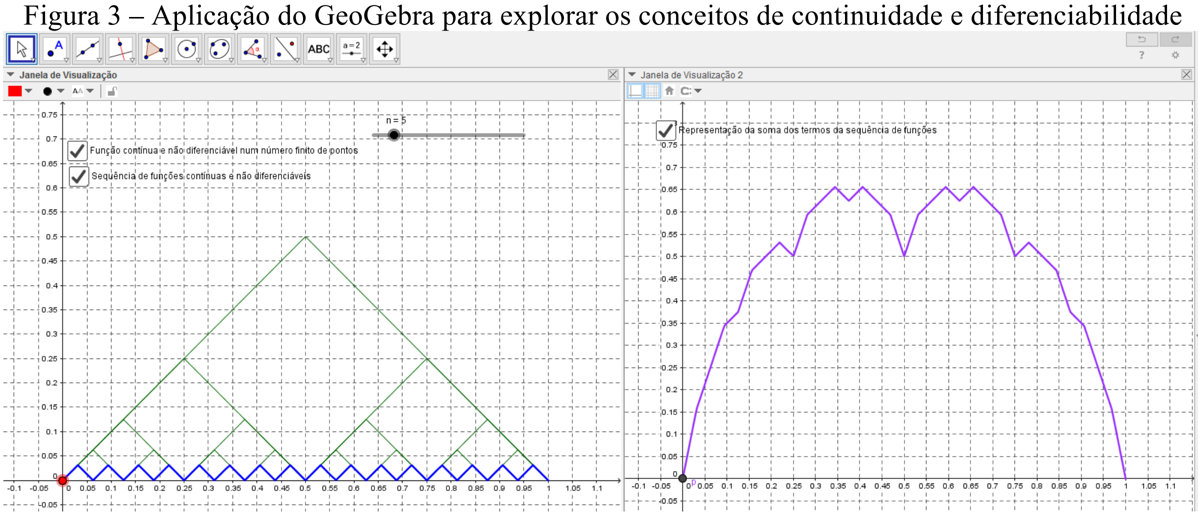
A componente didática é a noção de retidão local. Com essa noção pode-se ter referência gráfica da diferenciabilidade ou não de uma função em determinado ponto. No caso da não diferenciabilidade a representação gráfica dessa função permanece com um “bico”, não importando o quanto esse gráfico seja ampliado.

E então a relação entre os conceitos continuidade e diferenciabilidade de uma função real está expressa por uma condição suficiente, mas não necessária. Em geral, apenas um exemplo é explorado, aquele da função modular $h(x) = |x|$, contínua e não diferenciável no ponto $x = 0$.

O estudo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, é um exemplo bastante extremo e significativo para a discussão pretendida, com força epistemológica. O auxílio do GeoGebra favorece a construção de seu gráfico e atinge o objetivo pretendido para esta pesquisa.

Na Figura 3 é apresentada uma aplicação construída no GeoGebra para explorar os conceitos de continuidade e diferenciabilidade com base no conceito de retidão local.

Figura 3 – Aplicação do GeoGebra para explorar os conceitos de continuidade e diferenciabilidade



Fonte: Produção própria.

Na aplicação apresentada é separada em duas janelas com vista a propiciar a representação dos termos da sequência de funções (Janela de Visualização 1) e a soma parcial série de funções (Janela de Visualização 2), cujo limite é a função manjar branco. Existem três caixas para exibir/esconder objetos (duas na Janela de Visualização 1 e uma na Janela de Visualização 2) que auxiliam no estudo individualizado de cada representação das funções cada função. Também há um controle deslizante (localizado na parte superior da Janela de Visualização 1) que altera a quantidade de termos, tanto da sequência de funções quando da série, exibidos nas duas janelas de visualização. Além desses elementos, existe um ponto vermelho (localizada na parte inferior da Janela de Visualização 1) que permite que o usuário o movimente e faça uma análise, em conjunto com o que é visualizado, quais são os valores do domínio nos quais as funções são, ou não, diferenciáveis.

No anexo são apresentadas um conjunto de questões compõe a versão final do documento e que objetivam a exploração do conceito de continuidade e diferenciabilidade.

4. Considerações finais

Neste trabalho foi apresentado um recurso, na perspectiva de Gueudet e Trouche, que visa o estudo da diferenciabilidade de uma função real focando a relação entre continuidade e diferenciabilidade, por meio da exploração de um exemplo de função contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, representada no *software* GeoGebra.

A representação gráfica, componente material de um recurso, por si só, não é suficiente para justificar a continuidade e não diferenciabilidade da função “manjar branco” nos pontos de seu domínio. No entanto, a utilização do recurso proposto possibilita a discussão sobre a existência de tal função, e, os passos de sua construção são fatores de motivação aos alunos. Esse recurso pode auxiliar o professor a desenvolver, no aprendiz, conceitos imagens[4] ricos relativamente aos conceitos matemáticos em questão, na medida que favorece a exploração de um exemplo significativo, do ponto de vista epistemológico, da relação continuidade/diferenciabilidade.

Este trabalho insere-se em uma pesquisa mais ampla, que tem por objetivos colocar à disposição dos professores materiais para o ensino de Cálculo, cuja construção é embasada em resultados de pesquisa, e contribuir com o estreitamento da relação teoria e prática.

5. Agradecimentos

Agradecemos a CAPES pelo auxílio financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

[4] Vinner e Tall (1981).

6. Referências

ALMEIDA, M. V. **Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall**. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo, 2013.

DUBINSKY, Ed; TALL, David. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** New York: Kluwer Academic Publishers, 1991. Cap. 14. p. 231-243. (Mathematics Education Library).

FÁVARO, V. V.; ARAÚJO, M. A. Um estudo sobre funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto. **FAMAT em Revista**, n. 13, p. 3 – 10, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2, 2002, Hersonissos. **Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level**. Hersonissos: University of Crete, 2002, p. 1 – 24.

MAMONA-DOWNS, Joanna; DOWNS, Martin. Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In. ENGLISH, Lyn D. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 165 – 198, 2002.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin. 1995.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 507 - 515, 2014.

SANTAROSA, L. M. A.; GRAVINA, M. aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: **IV Congresso RIBIE**. Brasília. 1998.

TALL, D. The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. **The Mathematical Gazette**, v. 66, n. 435, p. 11 – 22, 1982.

TALL, D. **Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

TALL, D. Concept images, computers, and curriculum change. **For the Learning of Mathematics**, v 9, n 3, p. 37 – 42, 1989.

TALL, D. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In. ZIMMERMAN, W; CUNNINGHAN, S. (Eds) **Visualization in teaching and learning mathematics**, v. 19, p. 105 – 119, 1991.

TALL, D. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5., 1993, **Procedings**…, Addison-Wesley, p. 243 – 258, 1993.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings**... Blackwood: ATCM Inc, 2000.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In. SIERPISKA, A; KILPATRICK, J. (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search of identity**. Dordrecht: Kluwer. p. 227 – 241. 1998.

VINNER, S.; TALL, D. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational studies in mathematics, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

ANEXO – CONJUNTO DE QUESTÕES

1. Com apenas a opção "Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos" selecionada e utilizando o mouse, faça o seguinte:

***a*)** Mova o controle deslizante n para 3, observe o gráfico e responda: para quais valores do domínio a função, apresentada na Janela de Visualização 1, não é diferenciável?

***b*)** Movimente o valor do seletor, para outros valores e conjecture o que acontece com a quantidade de valores para os quais a função apresentada não é diferenciável?

2. Com apenas a opção "Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis" selecionada. Será exibido, na Janela de Visualização 1, n funções que são continuas e não diferenciáveis. Ao movimentar o ponto vermelho, perceba que existe um ponto que sobre cada um dos gráficos das funções. Com base no conceito de retidão local, responda:

***a*)** Movimente o controle deslizante para o valor $n = 4$ e posicione o ponto vermelho em $x = 0.5$, neste ponto todas as funções apresentadas, na Janela de Visualização 1, são diferenciáveis nesse ponto?

***b*)** Repita o processo do item anterior, porém, alterando o ponto vermelho para $x = 0.65$, neste ponto todas as funções apresentadas, na Janela de Visualização 1, são diferenciáveis nesse ponto?

***c*)** Repita o processo do item a, porém, alterando o ponto vermelho para $x = 0.875$, neste ponto todas as funções apresentadas, na Janela de Visualização 1, são diferenciáveis nesse ponto?

***d*)** Conjecture o seguinte: se somarmos essas quatro funções, podemos afirmar a função resultante será diferenciável em $x = 0.5$? E em $x = 0.65$? E em $x = 0.875$?

3. Selecione a opção "Representação da soma dos termos da sequência de funções" e observe o gráfico que surge na Janela de Visualização 2. Nessa janela tem um ponto que não permite que seja movimentado, porém, ele é dependente do ponto vermelho da Janela de Visualização 1. Utilizando a noção de retidão local, responda as seguintes perguntas:

***a*)** A função que é representada na Janela de Visualização 2 é diferenciável em $x = 0.5$? E em $x = 0.65$? E em $x = 0.875$? Utilize a ferramenta zoom sobre a função para confirmar suas conjecturas.

4. Movimente o seletor para $n = 30$, espere um pouco, essa é a representação máxima que o *software* suporta da sequência de funções cujo limite é uma função contínua e não diferenciável. Infelizmente, o *software* fica muito instável para essa quantidade de termos e não conseguimos utilizar a ferramenta zoom para aproximarmos na visualização da representação gráfica.