O CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA ANÁLISE HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICA

Rogério Fernando Pires
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
rfpires25@hotmail.com

Resumo:

O presente artigo tem a finalidade de apresentar os principais resultados de uma pesquisa que teve por objetivo realizar uma análise histórico-epistemológica do conceito de função desde os babilônios por volta de 2000 a. C. até as contribuições dadas pelo grupo Bourbaki no século XX para a evolução desse conceito. O estudo de caráter bibliográfico foi realizado por meio da análise de publicações disponíveis em forma impressa ou em meios digitais. A apreciação do material consultado foi executada sob a ótica da noção dos obstáculos epistemológicos, o que permitiu evidenciar que o processo evolutivo do conceito de função foi marcado pelas diferentes formas de representar uma relação funcional e pelos obstáculos enfrentados, cujas tentativas de superá-los culminaram em novas formas de conceber o conceito.
Palavras-chave: Conceito de função; Obstáculos epistemológicos; História da Matemática.

1. Introdução

Quando se fala em conhecimento matemático e seu ensino, vêm a tona aspectos relacionados à compreensão dos objetos estudados. Ao analisar a compreensão matemática, muitas vezes é necessário olhar para a origem do conhecimento, saber as motivações para o seu desenvolvimento e as dificuldades enfrentadas no processo de concepção. De acordo com D'Ambrosio (1996), destacar esses fatos é o objetivo principal da História da Matemática.

É fato que o professor de Matemática e o pesquisador em Educação Matemática devem ter conhecimento da disciplina e dos conteúdos contemplados por ela. Contudo, conhecer a história que envolveu o processo de concepção e desenvolvimento do assunto que está em jogo pode lhe ajudar não somente na contextualização, mas também irá auxiliar a compreender melhor as dificuldades na sua compreensão.

Ao falar em dificuldades, podemos nos perguntar: qual é a relação entre a compreensão dos temas abordados pela Matemática e a sua história?

A resposta a essa questão é bastante interessante, pois com Brousseau (1983) os obstáculos com os quais os indivíduos se deparam durante o processo de compreensão de um conceito matemático podem ser frutos conceitos mal acomodados anteriormente e, até mesmo, fazerem parte do processo evolutivo de compreensão do conceito ao longo da história. A esses obstáculos impedem que o indivíduo alcance novos conhecimentos que ampliam a compreensão do conceito, dá-se o nome de obstáculos epistemológicos.

A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida inicialmente por Bachelard (1938) nas ciências físicas e na Educação Matemática por Brousseau (1976). Esses obstáculos se constituem em elementos ligados a forma de idealizar um objeto no passado que impedem que o indivíduo avance no processo de concepção do conhecimento.

Assim, este relato de pesquisa propõe apresentar os principais resultados de uma pesquisa de cunho histórico que teve por objetivo realizar uma análise histórico-epistemológica do conceito de função desde os babilônios por volta de 2000 a. C. até as contribuições dadas pelo grupo Bourbaki no século XX para a evolução desse conceito.

2. A noção de obstáculo epistemológico

As dificuldades que as pessoas apresentam na compreensão dos conceitos matemáticos, em especial, os estudantes desde a Educação Básica ao Ensino Superior é um tema que vem sendo o foco das discussões entre professores de Matemática e pesquisadores interessados no ensino e na aprendizagem dessa ciência.

Quando se fala em função, por exemplo, as dificuldades apresentadas pelos estudantes com essa noção fica muito evidente, pois na maioria das vezes eles não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações de função: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem interrelações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam funções, tais como: $f(x), x \longmapsto y, sen(x+t)$, etc.

De acordo com Sierpinska (1992), só podemos dizer que compreendemos algo em Matemática quando conseguimos discernir se alguns casos isolados pertencem ou não ao objeto definido, quando reconhecemos tal objeto matemático independentemente da maneira que está representado, quando conseguimos relacioná-lo com outros objetos, quando aprendemos que ele faz parte de uma teoria e quando conseguimos aplicar o que aprendemos.

Na busca de entender como ocorre o processo de compreensão de um conceito matemático, Sierpinska (1992) se apoia na noção de obstáculo epistemológico, que segundo a autora está presente no processo de evolução do conhecimento. Se nos deparamos com novos conhecimentos a respeito de um determinado conceito e contemplamos antigos conhecimentos, isso faz com que surjam elementos que nos impedem de alcançar esses novos conhecimentos que ampliam a compreensão do conceito. Essas componentes que impedem o indivíduo de adquirir novos conhecimentos são os obstáculos epistemológicos, e a antiga imagem que o indivíduo tinha a respeito de determinado conhecimento são as dificuldades ou obstáculos que posteriormente se transformam em atos de compreensão.

Para a Sierpinska (1992), esses obstáculos não são resultados de métodos particulares de ensino, não é algo que ocorre com uma ou duas pessoas, eles são comuns no contexto de alguma cultura, reportam-se à forma de conceber determinado objeto no passado e se apresentam como obstáculos para uma nova maneira de conceber o conhecimento.

Para identificar as origens dessas dificuldades, a autora aponta três níveis que permitem distingui-los. O primeiro refere-se às nossas atitudes, crenças, convicções e visão de mundo manifestadas na explicitação do conhecimento, podendo ser disseminadas e absorvidas por outros indivíduos. O segundo está relacionado às maneiras (inconsistentes) de pensar, interpretação de situações, coisas que são aprendidas por práticas e imitações no decorrer da socialização e educação. O terceiro nível está ligado ao conhecimento teórico, cujo valor é julgado por critérios mais racionais, como aplicabilidade, consistência e os tipos de relações com sistemas de conhecimento qualificados como ciência.

Ao se referir aos obstáculos epistemológicos, muitas vezes se tem a impressão de que eles são algo negativo para o desenvolvimento do conceito e que devem ser evitados no processo de ensino e aprendizagem. Ao contrário, sua presença é muito natural nesse processo, de tal maneira que eles não podem ser evitados, e seu papel é muito importante no desenrolar dos acontecimentos.

3. Procedimentos metodológicos

A pesquisa de caráter bibliográfico que de acordo com Cervo, Bervian e Silva (2007), em procurar explicar um problema ou um determinado fenômeno a partir de referências teóricas publicadas em artigos, livros, dissertações e teses; foi realizada a partir de uma análise de materiais publicados de forma impressa ou em meios digitais, referentes à História da Matemática e, que abordavam de forma direta ou não o processo evolutivo do conceito de função.

As informações recolhidas durante a análise do material pesquisado possibilitaram a elaboração de um recorte histórico que procurou evidenciar o processo de desenvolvimento e compreensão do conceito de função. Tal recorte será apresentado no tópico a seguir.

4. O processo histórico de evolução do conceito de função

O conceito de função no decorrer da história da Matemática apresentou um longo e tumultuado processo de formulação de ideias, generalizações e compreensão, que buscou respaldo no pensamento científico e filosófico.

Por volta de 2000 a.C., os babilônios usavam para seus cálculos tabelas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas e cúbicas. Tábuas com relações funcionais eram utilizadas pelos babilônicos na Astronomia para a compreensão das efemeridades do Sol, da Lua e dos planetas. Essas tabulações, construídas de maneira empírica, mais tarde se tornaram fundamentos matemáticos para o desenvolvimento da Astronomia. Nessas tábuas era possível encontrar a principal ideia envolvida no conceito de função: a relação funcional entre variáveis.

Algum tempo mais tarde, em Alexandria, os astrônomos utilizavam teoremas da geometria para confeccionar tábuas de cordas que eram equivalentes às tabuas dos senos. A mais antiga tábua de cordas, de acordo com Boyer (1999), encontra-se no *Almagest* do astrônomo Claudius Ptolomeu, cujos trabalhos apresentam uma grande quantidade de tábuas astronômicas. Nessas tábuas, a posição do Sol, da Lua e dos planetas mudava de maneira contínua e periódica, e as posições eram determinadas por meio de procedimentos que seguiam alguns padrões.

Ao analisar o desenvolvimento da Astronomia na antiguidade, é possível intuir que essa ciência já fazia uso de algumas noções de função, principalmente aquelas que modelam fenômenos periódicos. No entanto, de acordo com Ponte (1992), somente muito tempo depois que alguns matemáticos aproximaram-se de uma formulação moderna de função, dentre eles o autor destaca Oresme (1323 – 1382), e, antes disso, não havia nenhuma ideia geral da relação funcional, seja ela por meio de palavras, ou de maneiras mais abstratas, por exemplo, uma representação gráfica.

De acordo com Ponte (1992), Oresme desenvolveu a teoria geométrica das latitudes, representando graus de intensidade e extensão. Oresme utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, ele marcou pontos representando instantes de tempo (longitudes) e, para cada instante, traçou perpendicularmente à reta das longitudes um segmento de reta (latitudes), em que o comprimento denotava a velocidade. Um exemplo dessa representação gráfica feita por Oresme podemos observar na figura a seguir.

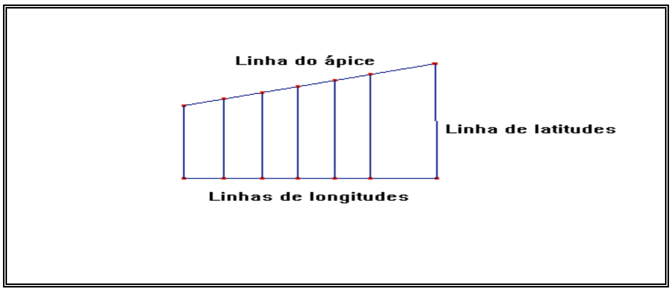

Figura 1: Exemplo da representação gráfica feita por Oresme

A latitude de uma "quantidade" é interpretada como uma quantidade variável, dependendo da longitude, e a linha que representa o ápice é entendida como a representação gráfica de uma relação funcional contínua. Dessa maneira, uma função pode ser representada por meio de uma descrição verbal ou por meio de um gráfico. Na linguagem matemática da atualidade, os termos latitude e longitude são equivalentes às ordenadas e abscissas, respectivamente.

Apesar do grande salto que a noção de função apresentou no decorrer da história até a descoberta de Oresme, nenhum matemático ou astrônomo havia feito qualquer menção a algo que equivalesse à relação funcional. Nesse período, as relações funcionais eram utilizadas para estudar fenômenos relacionados a outras ciências, como a Astronomia e a Física, e não havia registros explícitos de estudos voltados tão somente para a noção de função.

Nesse sentido, Ponte (1992) destaca que o surgimento da noção de função em pesquisas totalmente voltadas para a Matemática, data no final do século XVII. Partindo dessa perspectiva, Youschkevitch (1981) afirma que até o final do século XVI e início do XVII as funções eram abordadas por meio de antigos métodos: por uma descrição verbal, por tabela ou gráficos.

Youschkevitch (1981) também enfatiza que somente após a criação dos logaritmos é que o método analítico de introduzir as funções por meio de fórmula e equações começa a ganhar destaque na pesquisa teórica, por meio de trabalhos publicados por Pierre Fermat

(1601-1665) e René Descartes (1596-1650). Foram eles que aplicaram a nova álgebra à geometria e apresentaram, cada um a sua maneira, o método analítico de introduzir funções, desbravando novos horizontes para a evolução da Matemática.

Ainda mesmo de maneira acanhada, a ideia de que expressões infinitas fosse uma função não era novidade, pois a progressão geométrica infinita decrescente já era conhecida na Idade Média, com os resultados de estudos realizados por Oresme, mas foi somente depois da primeira metade do século XVII que as séries se tornaram o meio universal para a expressão analítica e os estudos de funções.

Bourbaki (1976, p. 253) salienta “a brilhante descoberta da série $\log(1+x) = {}_{1}\frac{(\ x)^n}{n}$ por Mercator, que possibilitou novas aplicações para as séries, principalmente das séries de potências aos problemas considerados até então impossíveis”. Foi dessa descoberta em diante que Isaac Newton (1642-1727), a partir de 1665, e Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716), a partir de 1673, dedicaram-se às séries de potências.

De acordo com Youschkevitch (1981), as concepções básicas de análise matemática de Newton foram apresentadas em Cambridge entre 1664 e 1665. O *Method of Fluxions* e das séries infinitas foi escrito em 1670 e publicado em 1736. Nessa direção, Eves (2004) ressalta que no *Method of Fluxions* Newton considerava que

> [...] uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. À quantidade variável ele dava o nome de fluente (quantidade que flui) e à sua taxa de variação o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como ordenada do ponto gerador, era indicado por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt, onde t representa o tempo (p. 439).

Dessa maneira, Newton introduziu as noções básicas de função por meio da cinemática. Na verdade, o método das fluxões é desenvolvido para os fluentes expressos analiticamente, seja na forma finita, seja por meio de somas infinitas.

Concomitantemente, segundo Boyer (1999) Leibniz também chega às noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral a partir da geometria das curvas. A palavra função apareceu pela primeira vez em um manuscrito de Leibniz em 1673. Ele tomou função para designar de maneira geral a dependência de quantidades geométricas como subtangentes e subnormais. Ele também introduziu os termos constante, variável e parâmetro.

O desenvolvimento do estudo do comportamento das curvas por métodos algébricos, a representação de quantidades que eram dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica, se fez cada vez mais necessária. Foi assim que as funções começaram a ser representadas por meio de expressões algébricas e, de acordo com Ponte (1992), essa nova maneira de representar apareceu em correspondências trocadas por Leibniz e Jean Bernoulli (1667-1748) entre 1694 e 1698. Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que teve ampla divulgação, o qual continha a definição de uma função de uma variável.

A definição apresentada nesse artigo algum tempo mais tarde ganhou uma contribuição essencial para sua evolução dada por Leonard Euler (1707 – 1783) discípulo de Bernoulli. Nesse sentido, Ponte (1992) descreve:

> Bernoulli publicou um artigo, que teria ampla divulgação, contendo sua definição de uma função de uma variável como uma quantidade que é composta, de alguma forma a partir de variáveis e constantes. Euler (1707-1793), um ex-aluno de Bernoulli, mais tarde, acrescentou a esta definição o termo expressão analítica, em vez da quantidade (p. 4).

Nesse sentido, destaca-se que, após a definição de função dada por Bernoulli, Euler foi responsável pelo posterior desenvolvimento desse conceito. Nessa direção, Euler, citado por Youschikevitch (1981), salienta que:

> Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma maneira que seja, desta quantidade e de números ou quantidades constantes. Assim, toda expressão analítica, que além da variável *z* contiver quantidades constantes, é uma função de *z*. Por exemplo, $a + 3z; az - 4zz; az + b\sqrt{aa - zz}$, etc. são funções de *z* (p. 37).

Partindo dessa perspectiva, entende-se que Euler seguiu os passos de seu mestre ao dar a sua definição de função, mas trocando a palavra "quantidade" por "expressão analítica".

A contribuição dada por Euler para a evolução do conceito de função foi tão significativa que, de acordo com Boyer (1999, p. 305), "foi ele o construtor da notação mais bem-sucedida de todos os tempos. Deve-se a ele a notação *f(x)* para uma função em *x*".

Apesar da grande evolução que o conceito de função apresentou após a definição dada por Euler, algumas controvérsias surgiram que motivaram discussões a respeito desse conceito. As primeiras discussões ocorreram no século XVIII, e estavam relacionadas com o famoso problema da corda vibrante, com o que Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) exprime as condições desse problema por meio da equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, em que y é uma função que descreve o deslocamento da posição de equilíbrio, que depende de *x* e *t*, sendo que *x* representa a distância a partir da origem, e, *t*, o tempo. A discussão envolveu Euler, Joseph Louis Lagrange (1176-1813), D'Alembert, Daniel Bernoulli (1751-1834), Gaspard Monge (1746-1818), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

A equação apresentada por D'Alembert motivou grandes discussões entre esses matemáticos que, de acordo com Youschikevitch (1981), contribuíram para o progresso da física matemática e para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos da análise matemática.

Outra contribuição muito importante para o desenvolvimento do conceito de função foi dada por Fourier. Preocupado com o fluxo de calor nos corpos materiais, ele considerava a temperatura como função de duas variáveis, o tempo e o espaço, podendo ser representada por meio da equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, cuja resolução, a princípio, foi apresentada por D'Alembert no problema da corda vibrante. Ele conjecturou que seria possível obter o desenvolvimento de qualquer função em uma série trigonométrica em um intervalo adequado (a chamada série de Fourier).

Posteriormente, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) apresentou as condições suficientes para que uma função fosse representada por uma série de Fourier. Para isso, Dirichlet separou o conceito de função de sua representação analítica. Ele lançou a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre as variáveis que representam conjuntos numéricos. Sendo assim, uma função então passou a ser entendida também como uma relação entre dois conjuntos, de modo que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente.

Dirichlet ainda contribuiu com a evolução do conceito de função dando o famoso exemplo de uma função descontínua em todos os pontos do domínio [0, 1]:

$$\begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ é um número racional} \\ 0 \text{ se } x \text{ não é um número racional} \end{cases}$$

No século XIX e início do século XX, o conceito de função passou por alguns refinamentos e apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Nessa época, podemos destacar os trabalhos de Cantor

(1845-1918), Richard Dedekind (1831-1916), Hermann Hankel (1839-1873), René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941).

Em 1870, Hankel apresentou a seguinte definição para função:

> Diz-se que *y* é uma função de *x* se a cada valor de *x*, em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de *y*, sem que isso exija que *y* seja definido em todo o intervalo pela mesma lei em função de *x*, nem mesmo que *y* seja definido por uma expressão matemática explícita de *x* (HANKEL, 1870, p. 49 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 61).

Foi desse modo que a definição geral de função foi incluída nos cursos de análise matemática no final do século XIX e no século XX. Vale a pena ressaltar que a definição dada por Hankel não faz qualquer menção à unicidade de *y* para cada valor de *x*, pois essa questão da unicidade distingue as funções *unívocas* e *plurívocas*. De maneira simplista, pode-se dizer que as funções algébricas racionais são *unívocas*, pois para cada *x* existe um único *y* correspondente. Já as irracionais de índice par são todas *plurívocas*, uma vez que os radicais são ambíguos e dão valores aos pares.

Considerando os refinamentos pelos quais o conceito de função passou entre o final do século XIX e início do século XX, Monna (1972, p. 81) sustenta que o "conceito de aplicação entre dois conjuntos foi incorporado paulatinamente na Matemática até tornar-se dominante". O conceito de função foi colocado na estrutura geral do conceito de aplicação de um conjunto X em outro conjunto numérico Y, tal como é encontrado em livros atuais.

Nesse sentido, Dieudonné afirma que Dedekind generaliza a definição de função da seguinte maneira:

> Sendo dados dois conjuntos quaisquer *E* e *F*, uma aplicação *f* de *E* em *F* é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder e vale a qualquer elemento *x* de *E*, um elemento bem determinado de *F*, o seu valor em *x* que é denotado de modo geral por *f(x)* (1990, p. 149).

Algum tempo mais tarde, ainda segundo Dieudonné (1990), Cantor introduz a noção de produto cartesiano $E \cdot F$ de dois conjuntos quaisquer, uma generalização das coordenadas cartesianas. Dessa forma, liga-se a noção de aplicação $f : E \quad F$ a um subconjunto de $E \cdot F$ e o grafo de *f* é a parte de $E \cdot F$ formado pelos pares (*x, f(x)*) para todos os elementos *x* de *E*. O grafo é uma maneira de generalizar o "gráfico" clássico de uma função de variável real.

Dentre as contribuições para a evolução do conceito de função no início do século XX, não podemos deixar de lado aquela dada pelo grupo Bourbaki. Organizado em 1935, Bourbaki consistiu de um grupo formado por jovens matemáticos franceses (dentre eles o próprio Dieudonné, que foi professor visitante na Universidade de São Paulo). O grupo tinha o objetivo de organizar toda a Matemática conhecida até o momento, segundo o pensamento de formal de Hilbert. Bourbaki publicou em 1939 o primeiro livro da coleção *Théorie dês Ensembles (fascicule de results)*, que contém a seguinte definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja x E, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento x E o elemento y F que encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p. 6).

Nesse sentido, a definição de Bourbaki, além de trazer a questão da unicidade de y, faz uma distinção entre relação funcional e função. A primeira expressão é empregada para a relação de variação existente entre os elementos de dois conjuntos, já a segunda é utilizada para determinar a operação que associa os elementos x de um conjunto com os elementos y de outro, e que uma função é determinada pela relação funcional estabelecida entre esses elementos.

Em resumo, é possível perceber que, desde a antiguidade até o movimento estruturalista empregado na Matemática pelo grupo Bourbaki, surgiram diferentes concepções de função, seja na maneira de olhar o objeto matemático, seja no modo de utilizar ou enfatizar suas propriedades. Contudo, toda essa diversidade de ideias respaldadas no pensamento científico e filosófico contribuiu com a evolução do conceito desse objeto matemático, desencadeando as definições que temos nos dias atuais.

5. Discussão dos resultados e algumas considerações

Ao refletir sobre o processo histórico de evolução e compreensão do conceito de função, é possível perceber que o caminho trilhado para se chegar ao entendimento e a definição que é utilizada hoje foi sofreu influencia das maneiras de representar uma relação funcional.

ISSN 2178-034X

O processo teve início com os babilônios por volta de 2000 a.C. ao utilizarem tábuas contendo relações entre valores para compreender as efemeridades do Sol, da Lua a e dos planetas. Isso evidencia que mesmo sem deixar explicito o conhecimento referente ao conceito de função, as noções que evolvem tal conceito estavam presentes nas atividades dos povos da antiguidade, principalmente aquelas ligadas a Astronomia e, eram registradas em tabelas que evidenciavam relações entre valores.

Algum tempo mais tarde, na idade média, ao desenvolver a teoria geométrica das latitudes, de acordo com Ponte (1992) Oresme apresenta a primeira representação geométrica da relação entre grandezas, o que permitiu apresentar uma relação de três maneiras distintas até então, por meio de tabelas, descrição verbal e a representação gráfica.

Apesar do grande avanço que o conceito de função apresentou durante esse período, ainda não se falava em função no âmbito da Matemática, as noções referentes a esse conceito serviam apenas para resolver problemas e interpretar situações relacionadas a outras áreas outras áreas do conhecimento. Assim, a noção de função até então era vista apenas como ferramenta para resolver problemas e passou a ser objeto de estudo da Matemática apenas no final do século XVII.

Os trabalhos publicados por Pierre de Fermat e René Descartes entre os séculos XVI e XVII incluíram ao rol das representações de função a representação analítica (expressões algébricas). Esse fato proporcionou grandes avanços na Álgebra apoiada na geometria, como também, impulsionou os trabalhos de Newton e Leibniz, sendo este último o responsável por utilizar pela primeira vez a palavra função para designar a dependência entre quantidades.

Apesar dos avanços que a representação algébrica de função proporcionou para o desenvolvimento de tal conceito, ela também contribuiu para a origem de um dos principais obstáculos epistemológicos intrínseco a esse conceito, pois durante muito tempo foi defendida a ideia de que apenas relações que pudessem descritas por expressões analíticas poderiam ser chamadas de função. Esse obstáculo só foi superado no século XIX quando Dirichilet separou o conceito de função da expressão analítica e, definiu função como uma correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos. A definição apresentada por Dirichilet deu origem a definição moderna de função utilizada nos dias de hoje.

Em vias de conclusão, analisando o recorte histórico apresentado neste relato de pesquisa, é possível verificar que o conceito de função passou por um longo processo de desenvolvimento marcado pelas maneiras de representar uma relação funcional, que contribuíram um entendimento mais amplo do conceito e, também, através de um movimento visando a sua depuração possibilitou o surgimento de obstáculos epistemológicos que contemplaram os três níveis apontados por Sierpinska (1992), cujas tentativas de superá-los possibilitaram novas formas de conceber o conhecimento.

6. Referências

BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Aliança

Editorial, 1976.

———. *Theorie dês ensembles*. Paris: Masson, 1990.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomides. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico:* contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BROUSSEAU, G. *Theory of didactical situations in mathematics:* didactique des mathematiques, 1970-1990 Guy Brousseau; ed. e trad. Nicolas Balacheff, 1983.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. Metodologia científica. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

D'AMBROSIO, U. *Euducação Matemática:* da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DIEUDONNÉ, J. A. *Formação da matemática contemporânea*. Tradução de J. H. von Hafe Perez. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

MONNA, A. F. The concept of function in the 19th and 20th Centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Arch. for Hist. of Exact Sciences*, v. 9, p. 57-84, 1972.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, *MAA Notes* 25, p. 25-58, 1992.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX e siècle. Fragments d'historie des Mathématiques. *Brochure A.P.M. E. P.*, n. 41, p. 7-67, 1981.