

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ESTUDO DE CONCEITOS DE FÍSICA POR MEIO DO GEOGEBRA

Ana Luiza de Freitas Kessler
UFSM
analuizakessler@gmail.com

Carmen Vieira Mathias
UFSM
carmen@ufsm.br

Resumo:

A partir da implantação do ensino Politécnico no Rio Grande do Sul, nota-se a necessidade de trabalhar de forma integrada, realizando articulações entre as diferentes disciplinas e os assuntos estudados na escola básica. Este trabalho, que um recorte de dissertação, que realizou algumas conexões entre a Matemática e disciplinas das Ciências da Natureza. Para isso, utilizou-se dos conhecimentos compartilhados para tornar os conteúdos mais atrativos e conectados à realidade dos alunos. Nesse artigo optou-se relatar a experiência realizada em uma oficina aplicada a alunos do segundo ano do ensino médio politécnico, utilizando os conceitos apreendidos no estudo de funções e aplicando estes conceitos na Física, principalmente da análise dos gráficos, realizada com o auxílio do software GeoGebra. Concluiu-se que nessa abordagem, os alunos foram capazes de estabelecer relações entre o conteúdo de Matemática e os conteúdos estudados na disciplina de Física, aplicando os conhecimentos adquiridos para interpretar os problemas propostos.

Palavras-chave: Funções; GeoGebra; tecnologias, integração de disciplinas.

Introdução

No ano de 2011 foi introduzida no Estado do Rio Grande do Sul uma nova proposta de Ensino Médio denominada Ensino Médio Politécnico, a qual passou a ser implementada no ano de 2012. Segundo a Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (2011 – 2014) do Governo do Estado do Rio Grande do Sul (SEDUC - RS, 2001). O Ensino Médio Politécnico tem, em sua concepção, a base na dimensão politécnica, constituindo-se no aprofundamento da articulação das áreas de conhecimentos e suas tecnologias, com os eixos Cultura, Ciência, Tecnologia e Trabalho, na perspectiva de que a apropriação e a construção de conhecimento embasam e promovem a inserção social da cidadania.

Nesse sentido, o Ensino Politécnico passa a trabalhar por áreas do conhecimento, onde a Matemática constitui uma área e as disciplinas de Física, Química e Biologia constituem a área das Ciências da Natureza. Visto essa particularidade do ensino e a necessidade de produzir materiais para esse fim, o objetivo principal deste trabalho é

apresentar

uma proposta de atividades que integrem os conteúdos de funções estudadas na área da Matemática com aplicações em problemas da área da Física, pois a compreensão de que os problemas não são resolvidos apenas à luz de uma única disciplina ou área do saber desmistifica a ideia, ainda predominante, da supremacia de uma área do conhecimento sobre outra.

Dentre os assuntos estudados na disciplina de Matemática durante o Ensino Médio, considera-se (como educadores) o estudo de Funções um dos mais importantes. Sua relevância pode ser justificada, pois este estudo permite expressar relações entre grandezas e modelar situações-problema, construir modelos descritivos de fenômenos, permitindo fazer conexões entre assuntos dentro e fora da Matemática.

Segundo o PCN+ Ensino Médio Ciências da Natureza e Matemática (BRASIL, 2002, p. 121), os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivos e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas

Em nosso trabalho de pesquisa, realizamos a aplicação de cinco oficinas, relacionando conteúdos de Física, Química e Biologia com Matemática. Nesse artigo, optamos por descrever apenas uma das oficinas que integram Física e Matemática. Brasil (2002, p. 122) destaca a importância da análise gráfica no estudo das funções trigonométricas e a resolução de problemas que envolvam fenômenos periódicos. No presente trabalho, utilizamos a função seno e sua análise gráfica para aplicar os conhecimentos no estudo da equação de uma onda sonora.

1. Sobre as tecnologias

Diante da evolução do uso de tecnologias em nossas vidas e também relacionadas à educação, torna-se fundamental que nós, professores, possamos introduzir tal uso no cotidiano escolar com o intuito de tornar o ensino mais próximo aos alunos e fazer com que eles façam parte do processo de produção do conhecimento. Segundo Kenski (2007), ao se falar em novas tecnologias, na atualidade, estamos nos referindo aos processos e produtos relacionados com os conhecimentos provenientes da eletrônica, da microeletrônica e das telecomunicações.

Essas tecnologias

caracterizam-se por serem evolutivas, ou seja, estão em permanente transformação. Seu principal espaço de ação é virtual e sua principal matéria-prima é a informação.

Como professores, não podemos nos privar dessas informações em constante transformação, temos que estar acompanhando a evolução das tecnologias e buscando novos conhecimentos que engrandecem nosso trabalho e que busquem aprimorar nossas aulas, com o objetivo de ajudar no ensino e aprendizado dos nossos alunos. Nesse sentido, é importante que busquemos aprender sobre as tecnologias, em particular as digitais, que possam nos auxiliar em sala de aula, a fim de tornar nossas aulas mais atrativas e mais acessíveis aos alunos, fazendo com que os conteúdos se tornem algo que faça sentido para eles, não simplesmente símbolos e teorias vazias de significado prático.

O software utilizado para o desenvolvimento das atividades sobre funções e suas aplicações descritos neste trabalho foi o GeoGebra¹, criado pelo austríaco Markus Hohenwater. Este é um *software* multiplataforma distribuído gratuitamente, que serve para trabalhar conceitos de Matemática e que tem uma interface muito simples e de fácil utilização. Atualmente, o GeoGebra é denominado como aplicativo de Matemática Dinâmica, com recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. A escolha por esse aplicativo deu-se por ser um software acessível de forma livre, de interface em português, de fácil instalação, que permite fácil manipulação e a visualização gráfica e algébrica das funções trabalhadas.

Segundo Rezende (2012), outra vantagem do software GeoGebra que foi bastante explorada neste trabalho é que as funções podem ser definidas em termos de seus parâmetros, e estes, por sua vez, podem ser alterados dinamicamente através de controles deslizantes, permitindo aos alunos visualizarem as características variacionais da função (crescimento, concavidade e extremos) mudam de acordo com cada parâmetro.

2. Caracterização dos espaços

O conteúdo de funções é visto no primeiro e segundo anos do Ensino Médio, nesse artigo é sugerida uma atividade que pode ser realizada no segundo ano. Porém, acreditamos a mesma também é aconselhada para o terceiro ano, uma vez que serve de revisão para

¹ <http://www.geogebra.org>

concursos de

acessos às universidades, como o ENEM. A atividade proposta requer um conhecimento mínimo sobre funções trigonométricas, e também conhecimentos sobre conjuntos numéricos, intervalos, representação de pontos no plano cartesiano e regras básicas de álgebra serão necessários para realizá-las.

O projeto foi elaborado e aplicado no final do ano letivo de 2015, em uma escola estadual de Ensino Médio Politécnico do Estado do Rio Grande do Sul, que dispunha de uma sala de informática com 15 computadores. Porém, destes computadores, apenas sete estavam funcionando e tinham acesso à internet, desta forma, optamos por desenvolver as atividades em duplas. Assim, a oficina que iremos apresentar, na sequência, foi aplicada a um grupo de 14 alunos do segundo ano do Ensino Médio do turno da manhã, no contra turno. Salientamos que os alunos se dispuseram a trabalhar nesse turno e que a atividade não teve valor avaliativo. Os alunos já haviam visto na disciplina de Matemática o conteúdo de função seno, mas ainda não estudaram o tópico ondas na disciplina de Física.

Para o desenvolvimento das atividades, foi disponibilizado material impresso para as duplas, que continha os enunciados das atividades, onde os alunos deveriam escrever suas respostas. Os alunos foram orientados pela professora a abrir os arquivos previamente elaborado no software GeoGebra e disponibilizados no computador, correspondente a cada atividade que seria executada.

3. Proposta de abordagem e relato da experiência.

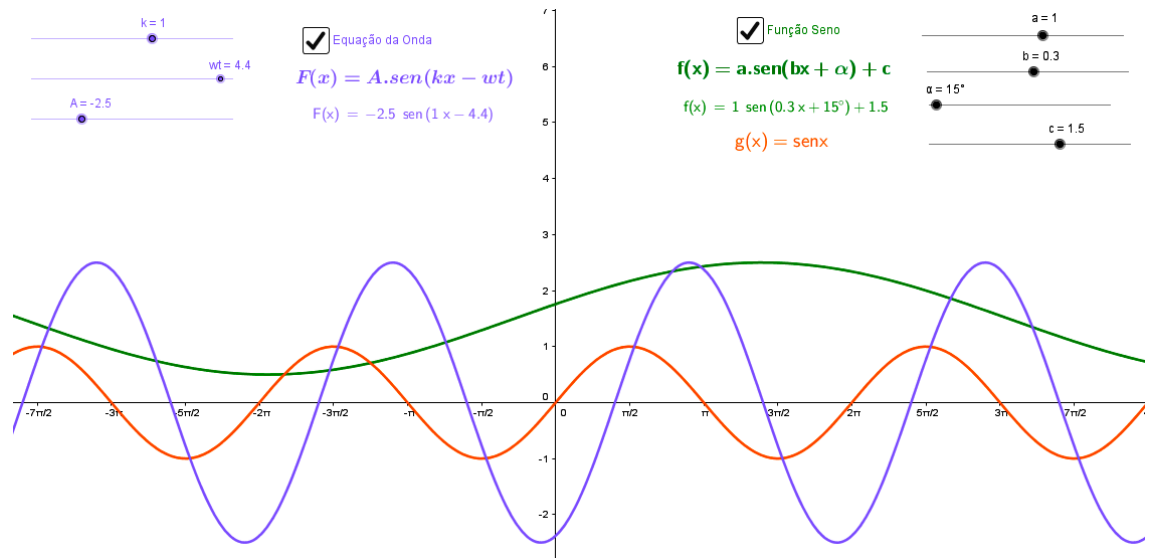
Nota-se frequentemente a necessidade de fazermos ligações entre as diferentes disciplinas e os assuntos estudados na escola básica, por isso e também pela imposição pelo currículo integrado, existente nas escolas públicas de Ensino Médio, surgiu a necessidade de fazer uma ligação entre o estudo da Matemática com as disciplinas da área da Natureza, uma vez que estas necessitam de conceitos matemáticos para serem desenvolvidas. Nada mais natural então que se utilizem dos conhecimentos compartilhados para tornar os conteúdos mais atrativos e conectados à realidade dos alunos. A seguir, apresentaremos as atividades que consideramos mais relevantes de uma das oficinas que foram propostas aos alunos, acompanhada dos objetivos e logo após o relato de experiência na turma onde foram aplicadas.

a. Oficina – Função Seno e Ondas Sonoras

Esta oficina tem por objetivo fazer com que o aluno consiga perceber que a equação da onda é uma função senoidal e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na disciplina de Matemática e, portanto, os conhecimentos utilizados na Matemática para o estudo gráfico dessa função podem ser transferidos para a Física.

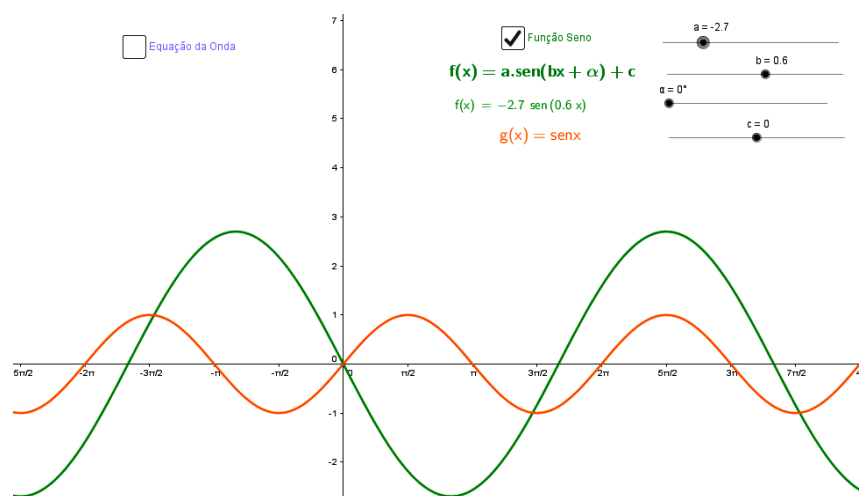
O aplicativo desenvolvido pela autora Ana Luiza Kessler e disponibilizado aos alunos para esta atividade tem a interface apresentada na Figura 01.

Figura 01: Interface da atividade seno e equação da onda.



Na primeira etapa da oficina, os alunos fizeram a manipulação do aplicativo da função seno conforme a Figura 02.

Figura 02: Aplicativo para manipulação da função seno.



A seguir, os alunos modificaram os parâmetros por meio dos controles deslizantes, foi possível responder às questões abaixo descritas:

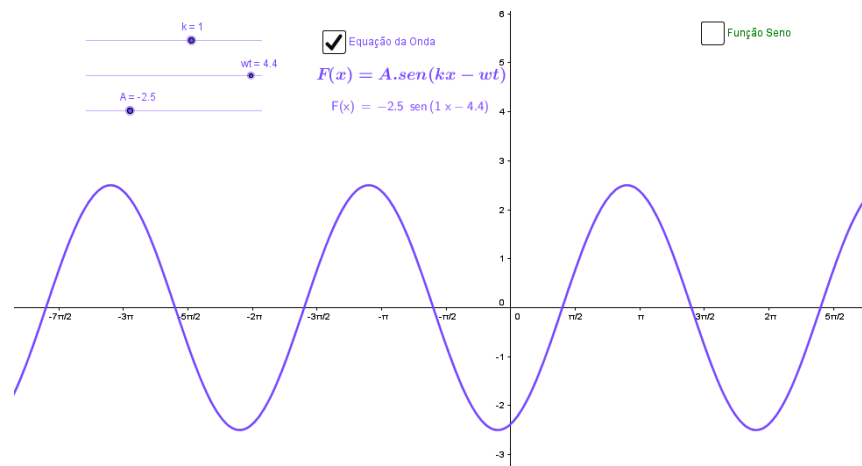
1. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = a \text{sen}(1x + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de a para valores $a > 0$? E o que ocorre com a amplitude do gráfico da função?
2. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = a \text{sen}(1x + 0) + 0$ quando diminuimos o valor de a para valores $a < 0$? E o que ocorre com a amplitude do gráfico da função?
3. O que podemos concluir sobre a variação do gráfico da função $f(x) = a \text{sen}(bx + \alpha) + c$ quando variamos o parâmetro a ?

Foram realizadas atividades similares variando os valores de b e α , questionando também, nesse caso, sobre o período da função. Observamos, durante a aplicação, que os alunos não tiveram dificuldades para realizar as atividades, respondendo de acordo com o esperado.

i. Aplicação na Física

Para esta etapa da oficina, os alunos foram orientados a desativar a caixa *Função Seno* e ativar a caixa *Equação da Onda* no aplicativo (Figura 01) que estava sendo utilizado, ficando com a interface da Figura 03 para manipulação.

Figura 03: Interface para manipulação da equação da onda.



A seguir, os alunos foram orientados a modificar os parâmetros por meio dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas:

1. Se aumentarmos o valor do parâmetro A, o que ocorre com a qualidade do som?

2. Se diminuirmos o valor do parâmetro A, o que ocorre com a qualidade do som?

Observamos que, apesar de os alunos não terem visto o conteúdo de equação da onda na disciplina de Física, com as informações contidas no texto e a manipulação do aplicativo, foram capazes de responder às questões 1 e 2 conforme o esperado.

Para responder à questão de número 3, foi importante salientar informações da Física, ou seja, que equações da onda são descritas pela Equação da Onda:

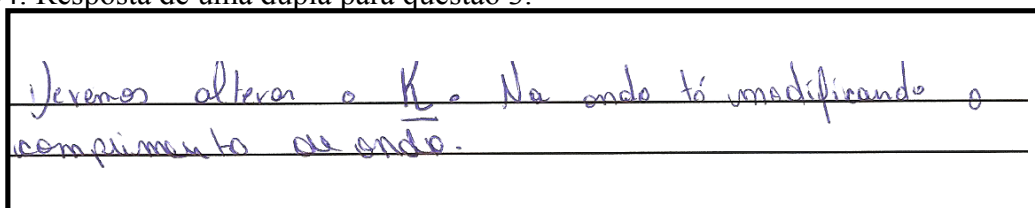
$$F(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t),$$

onde a amplitude A da onda medida em metros; ω é a frequência angular calculada por $\omega = 2\pi f$; f é a frequência quantificada em hertz (Hz); $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda angular; λ é o comprimento da onda medido em metros (equivalente a uma volta no ciclo trigonométrico); t é o tempo; x é a posição e v é a velocidade de propagação de uma onda em um meio é constante e determinada por $v = \lambda f$. Observou-se que essa função não é uma função real a variáveis reais, mas sim uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Observamos aos alunos que no Ensino Médio não trabalhamos este tipo de função, então optamos por não considerar o tempo como uma variável, e portanto, trabalharemos a “Equação da Onda” de forma mais simples onde o tempo é uma constante logo a função considerada foi $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = A \text{sen}(kx - \omega t)$. Dessa forma, foi possível que os pudessem responder às seguintes questões:

3. O que devemos alterar na equação da onda para alterarmos a frequência f ?

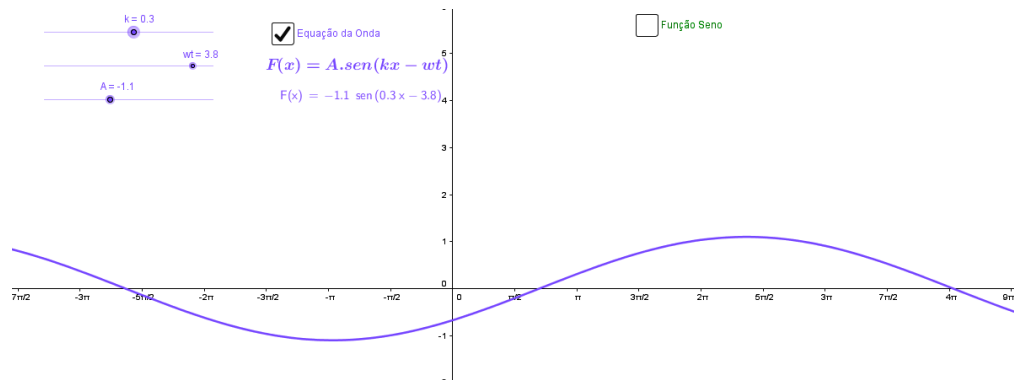
Observamos, durante a oficina, que os alunos ficaram com certo receio em relação a esta questão, pois não souberam fazer a relação através das equações sugeridas, então a professora orientou que eles utilizassem os controles deslizantes para responder à questão, assim eles conseguiram visualmente reconhecer a modificação necessária para alterar a frequência. Podemos observar, na Figura 04, a resposta de uma dupla.

Figura 04: Resposta de uma dupla para questão 3.



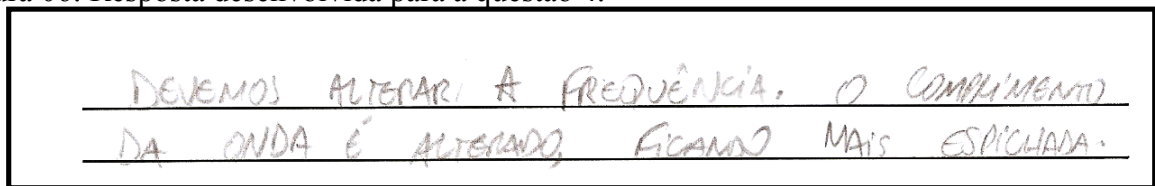
4. Para tornar o som mais grave, devemos alterar que parâmetro na equação da onda? O que ocorre com o valor de λ ? A resposta esperada foi que *Para tornar mais grave é preciso diminuir a frequência, ou seja, diminuir o valor de k , para isso o λ deve ser aumentado, pois como a velocidade é constante, quando diminuimos a frequência, consequentemente o λ comprimento de onda deve ser aumentado, conforme podemos observar na Figura 05.*

Figura 05: Exemplo de gráfico de baixa frequência e grande comprimento de onda.



Podemos observar, na Figura 06, as respostas de uma dupla para a questão 4. Percebemos que os alunos não tiveram dificuldade de determinar a resposta esperada, porém sem o formalismo que deve-se ao fato de não possuírem conhecimento do tópico ondas.

Figura 06: Resposta desenvolvida para a questão 4.



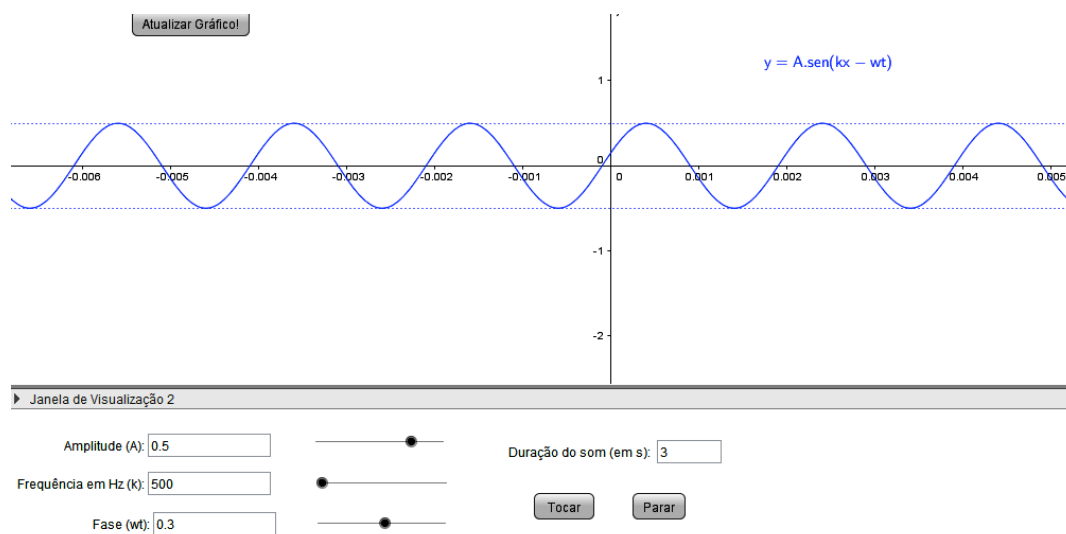
Foram realizados outros questionamentos, em relação ao que era necessário fazer para tornar o som mais agudo. A terceira e última parte desta oficina consiste em uma atividade prática sobre o movimento senoidal e a equação da onda.

ii. “Ouvindo uma Onda Senoidal”

Para esta atividade, os alunos foram orientados a abrir o applet *Ouvindo uma Onda Senoidal*², que consiste em uma atividade prática onde o aluno poderá perceber essas variações na qualidade do som. Este applet foi desenvolvido por BORTOLOSSI (2013) no software GeoGebra. A Figura 07 apresenta a interface do aplicativo.

² <https://www.geogebra.org/material/simple/id/48682>

Figura 07: Applet “Ouvindo uma onda senoidal”.



Foi solicitado aos alunos modificar os parâmetros por meio dos controles deslizantes e seguir uma sequência de procedimentos descritos no roteiro, previamente entregue. Assim, foi possível ouvir o som produzido e responder às questões abaixo descritas:

1. Altere, através do controle deslizante, o valor da Amplitude e observe o que ocorre com o som.
 - a) Descreva o que você pode constatar em relação às qualidades do som. Resposta esperada: *Quanto maior a amplitude mais forte é o som, maior volume. Menor amplitude, som mais fraco.*
 - b) Você percebeu alguma semelhança no som quando a amplitude era negativa ou positiva? Se percebeu, que semelhança é essa? Resposta esperada: *Independente do sinal, quanto maior o valor absoluto da amplitude, mais forte o som.*
2. Altere através do controle deslizante o valor da Frequência, medida em Hz (Hertz).
 - a) Descreva o que você pode observar em relação as qualidades do som. Resposta esperada: *A frequência altera a altura do som, som agudo ou grave.*
 - b) O que ocorre quando aumentamos a frequência? E quando diminuimos? Resposta esperada: *Quanto maior a frequência mais agudo é o som. Quanto menor a frequência mais grave é o som.*

3. Quando alteramos a fase (wt) ocorre alguma alteração no som? Resposta esperada: *Não*.

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades nas questões de 1 a 3, respondendo conforme o esperado. Ao final da atividade, os alunos foram questionados sobre suas percepções acerca da atividade e em relação ao conteúdo trabalhado. Após a realização dessas atividades, acreditamos que o próximo passo seria mostrar aos alunos como manipular o software para que os mesmos tivessem condições de construir os gráficos de aplicações vistas em sala de aula sobre cada um dos assuntos trabalhados, ou até mesmo o professor disponibilizar aos alunos outros exemplos de atividades para que os mesmos construíssem seus gráficos e resolverem os problemas por meio do GeoGebra.

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar e aplicar propostas de atividades que integrassem os conteúdos de funções estudados na área da Matemática com aplicações em problemas da área da Física por meio do GeoGebra. Para isso, abordamos sobre o uso de tecnologias e, em especial, o software GeoGebra. Além disso, fizemos uma pesquisa na Proposta Pedagógica para o Ensino Politécnico do Estado do Rio Grande do Sul, assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais, além de livros didáticos atuais utilizados no Ensino Médio Politécnico sobre a importância e a utilização das funções em outras áreas do conhecimento.

Percebemos, durante a aplicação da oficina, que foi bastante motivador para os alunos realizarem um trabalho diferenciado por meio de software, tornando a aula mais dinâmica. Apesar da pouca infraestrutura disponível nas salas de informática utilizadas, fazendo com que os alunos tenham que trabalhar em duplas e por vezes em trios, mesmo assim, o trabalho foi realizado com êxito. Acreditamos que, para um melhor aproveitamento nas oficinas, é importante que os alunos tenham estudado os conteúdos previamente em sala de aula com o professor, e, posteriormente, sejam utilizadas as atividades sugeridas neste trabalho. Acreditamos também que recordar os conteúdos por meio dos aplicativos em sala de aula, no momento em que estes forem retomados, seja importante para que a oficina não seja um momento isolado do resto das aulas. Além disso, ter o feedback em sala de aula é importante para os alunos relacionarem o que viram no laboratório com o que é trabalhado no seu dia a dia.

O trabalho integrado com os professores das demais disciplinas seria o ideal, pois os alunos poderiam relacionar o que foi trabalhado na oficina com o que é trabalhado em sala de aula, fazendo a relação com a Matemática e dando continuidade ao trabalho de forma independente. O ideal é trabalhar com turmas em que o professor atua, para, posteriormente, utilizar os recursos abordados neste trabalho, e, assim, poder trabalhar de forma integrada com os professores das demais disciplinas que atuam nessas turmas, fazendo um trabalho conjunto e integrado.

Após a aplicação das oficinas, acreditamos que as atividades possam ser um recurso útil a ser utilizado pelos professores de forma a complementar suas aulas. Observamos que pensamos em termos complementar, no que tange ao uso das mesmas nas disciplinas de Seminários Integrados, visto que acreditamos que as atividades isoladas não garantem a aprendizagem. As escolas estão cada dia sendo mais equipadas com computadores e outras tecnologias e acreditamos que o professor deve estar preparado para utilizar adequadamente estes recursos e promover não somente a inserção dos alunos no mundo tecnológico, mas, acima de tudo, garantir que estes entes promovam a aprendizagem de novos saberes.

Referências

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BORTOLOSSI, H. J. **Ouvindo uma onda senoidal**. 2013. Disponível em: <<http://www.geogebraTube.org/material/show/id/48682>> Acesso em: 23 nov. 2014.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. Campinas, SP. Papyrus, 2007. (Coleção Papyrus Educação).

REZENDE, W. M. et al. **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra. ISSN 2237-9657, pp.74 - 89, 2012.

SEDUC - RS. **Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (2011 – 2014)**. Governo do Estado do Rio Grande do Sul: SEDUC, 2011.