

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: ATIVIDADES ENVOLVENDO CONCEPÇÕES ALGÉBRICAS

Marli Teresinha Quartieri
Centro Universitário UNIVATES
mtquartieri@univates.br

Ludmila Maccali
Centro Universitário UNIVATES
ludmilamaccali@yahoo.com.br

Ieda Maria Giongo
Centro Universitário UNIVATES
igiongo@univates.br

Resumo:

No presente trabalho relatam-se atividades que estão sendo desenvolvidas com o objetivo de analisar as conjecturas elaboradas por alunos do 7º ano e 9º ano do Ensino Fundamental ao realizarem atividades em grupo, utilizando a Investigação Matemática e envolvendo concepções algébricas. A presente pesquisa é de cunho qualitativo, sendo a coleta de dados realizada por meio da observação dos educandos durante a realização das atividades, bem como o diário do aluno e do professor, além de gravações em áudio. Os resultados iniciais estão demonstrando que as atividades de Investigação Matemática auxiliam na potencialidade do trabalho em grupo, pois os alunos, em conjunto, encontram diferentes estratégias para as situações problematizadas, indiferente de seu nível de ensino.

Palavras-chave: Investigação Matemática; concepções da álgebra; Ensino Fundamental.

1. Introdução

O presente trabalho socializa alguns resultados decorrentes de atividades alicerçadas a uma pesquisa no campo da Investigação Matemática com o intuito de explorar conteúdos que envolvem as concepções da álgebra, propostas por Usiskin, 1995. Esta pesquisa está vinculada ao Programa do Observatório da Educação no Centro Universitário UNIVATES, o qual se intitula “Estratégias metodológicas visando à inovação e reorganização curricular no campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental” e conta com o apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). A intervenção do Observatório da Educação é realizada em seis escolas públicas do Vale do Taquari - RS. Fazem parte do referido grupo de pesquisa seis professores representantes de cada escola parceira, três mestrandos do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, seis alunos

oriundos de cursos de graduação da Instituição, além de três professoras/pesquisadoras do Centro Universitário UNIVATES e três professores voluntários.

O referido Observatório tem por objetivo problematizar e propor estratégias metodológicas, com vistas à implementação de práticas pedagógicas inovadoras e reorganização curricular da disciplina Matemática, em Escolas de Educação Básica, contempladas no projeto, que possuem considerável distância entre o IDEB relativo à 4ª série/5º ano e 8ª série/9º ano. Para contemplar tal objetivo o grupo de pesquisadores, problematiza três tendências para o ensino da Matemática: Modelagem Matemática, Etnomatemática e a Investigação Matemática. Salienta-se que tais tendências são exploradas na prática pedagógica dos professores das escolas parceiras e seus resultados discutidos com o intuito da reorganização curricular.

Este artigo apresenta resultados iniciais de uma intervenção pedagógica realizada com alunos do 7º e 9º ano de duas escolas parceiras do referido Observatório da Educação, alicerçada na Investigação Matemática. Esta metodologia possibilita ao educando desenvolver habilidades de pensamento e de elaboração de conjecturas (hipóteses), sendo o mesmo responsável pelo seu próprio conhecimento. A Investigação Matemática, segundo Lamonato e Passos (2011), está associada à ideia de procurar, questionar, querer saber. Neste contexto, compete ao professor proporcionar atividades que desafiem os educandos nas aulas de matemática, tornando as aulas mais atrativas.

Como problema de pesquisa que norteia este trabalho tem-se: que conjecturas são elaboradas por alunos do 7º e 9º ano ao realizarem atividades de investigação matemática, envolvendo as concepções da álgebra? E, portanto, como objetivo geral elenca-se: analisar as conjecturas elaboradas por alunos do 7º e 9º anos ao realizarem atividades em grupo, utilizando a Investigação Matemática e envolvendo concepções algébricas. Os objetivos específicos deste trabalho são: proporcionar atividades, envolvendo investigação matemática e as concepções da álgebra; possibilitar aos educandos, momentos de trabalho em grupo para a elaboração de conjecturas; incentivar o desenvolvimento, nas turmas mencionadas da escrita matemática; identificar e analisar as conjecturas elaboradas pelos grupos de alunos do 7º e 9º anos ao se envolverem em atividades investigativas, com foco em concepções algébricas.

Em relação aos alunos que participam da intervenção, destacam-se que na escola A, a turma de 7º ano tem 21 alunos, todos participativos durante a realização das atividades

propostas. Já a turma de 9º ano, desta escola, possui 23 alunos, e observa-se que alguns não são muito participativos. Na escola B, o 7º ano é composto por 25 alunos e o 9º ano 24 alunos, participativos durante a realização das atividades. A escolha das turmas ocorreu pelo fato de que no 7º ano os alunos ainda não tem muito conhecimento sobre o conteúdo de álgebra, já no 9º ano os alunos já possuem algum conhecimento. Assim pretende-se verificar quais são as conjecturas que ambas as turmas irão formular durante a realização das atividades de investigação envolvendo as concepções da álgebra.

2. Investigação Matemática em sala de aula e as concepções algébricas

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a Investigação Matemática consiste em quatro momentos: inicia-se com a formulação de uma questão aberta; em seguida, os alunos formulam suas conjecturas; testam e reformulam as mesmas; e, por último apresentam os resultados e as conjecturas formuladas são avaliadas. No quadro 1, estão identificados tais momentos.

Quadro 1: Momentos para realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer uma situação problema • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Teste e reformulação	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> • Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Adaptado de Ponte; Brocardo; Oliveira (2009, p. 21)

Para que ocorram discussão e socialização das conjecturas, o trabalho em grupo é considerado uma estratégia importante. Segundo Brunheira e Fonseca (1995, p. 4) “As atividades de Investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos trabalharem em grupo. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades”. Ainda para os autores, em grupo, os alunos adquirem confiança e segurança para socializarem suas ideias ao resolverem os problemas solicitados. Ponte, Brocardo, Oliveira (2009, p. 30) preconizam que:

A situação de trabalho em grupo potencia o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa, o que numa fase inicial pode ser complicado em termos de autogestão do grupo. Muitas vezes, um ou dois alunos tomam a

liderança e levam o grupo a centrar-se em certas ideias, facilitando, assim, o trabalho conjunto.

Assim, partindo dos estudos realizados, levando-se em consideração a potencialidade do trabalho em grupo, destaca-se a importância dos processos de ensinar e aprender álgebra na educação básica. Apresentam-se as quatro concepções da álgebra que sustentaram a elaboração das atividades que estão sendo propostas na intervenção pedagógica nas duas turmas.¹ As concepções estudadas para elaboração das atividades são: traduzir e generalizar; a álgebra como meio de resolver certos problemas; a álgebra como estudo de relações entre grandezas; a álgebra como estudo das estruturas.

Em relação à aritmética generalizada, Usiskin (1995, p. 13, grifos do autor) comenta que “Dentro dessa concepção de álgebra, as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar*. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética”. Quanto à álgebra como um processo de resolução de problemas, segundo Usiskin (1995, p. 15, grifos do autor), “nesta concepção de álgebra, as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes*. Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, neste caso as instruções-chave são simplificar e *resolver*”. Em relação à concepção da álgebra como estudo de relações entre grandezas, tem-se o uso de variáveis. Em efeito:

Dentro dessa concepção, uma variável é um agrupamento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é representa um número do qual dependem de outros números). Só no contexto dessa função existem as noções de variável independente e variável dependente. As funções surgem quase imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem de um argumento ou parâmetro x (USISKIN, 1995, p. 16).

A álgebra como estudo das estruturas, segundo Coxford, Shulte, Domingues (1995, p. 18) é importante, pois “[...] reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos as operações com números reais e polinômios”.

Diante deste contexto, considerando os referenciais estudados em relação a Investigação Matemática e as concepções algébricas, foi planejada a metodologia desta pesquisa, que será apresentada a seguir.

3. Metodologia

¹ Esta intervenção está em fase de desenvolvimento, mas até o dia do evento já estará concluída e com os dados analisados.

Este trabalho está sendo desenvolvido dando ênfase a procedimentos metodológicos que visam a pesquisa qualitativa e o estudo de caso. Os dados qualitativos podem dar suporte à análise dos resultados obtidos. “Eles não incluem contagens e medidas, mas sim praticamente qualquer forma de comunicação humana escrita, auditiva ou visual; por comportamento, simbolismos ou artefatos culturais” (GIBBS, 2009, p. 17). De acordo com Yin (2010, p. 136), “como o estudo de caso deve ocorrer no ambiente natural do “caso”, você está criando a oportunidade para observações diretas”. Enquanto os alunos desenvolvem as questões serão observados, principalmente, nas estratégias que utilizam para resolver as atividades, bem como no envolvimento com o trabalho coletivo. Neste sentido, as gravações em áudio e o diário de campo estão sendo utilizados para coleta dos dados. Além disso, estão sendo proporcionados aos educandos momentos de discussões, pois acredita-se que assim, muitos de seus pensamentos irão emergir durante as conversas em grande grupo.

A seguir apresentam-se algumas atividades que estão sendo desenvolvidas com alunos do 7º e 9º ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas do Vale do Taquari/RS. Salienta-se que todas as atividades serão realizadas em grupos. Estes formados de acordo com as afinidades dos alunos, para que assim os mesmos possam discutir e formular as conjecturas acerca das atividades propostas².

Na concepção da aritmética generalizada as atividades, têm por objetivo observar as diferentes formações de sequências e descobrir estratégias para encontrar as próximas figuras de cada sequência. No quadro 2, apresenta-se uma das atividades que já foi desenvolvida nas turmas de 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Quadro 2: Atividade da concepção da aritmética generalizada

Atividade 3:

Encontrar relações entre cada par de sequências abaixo e indicar quais são os próximos termos de cada uma delas.

a) 

0 2 5 9 ...

b)

1	8	27	125...
1	4	9	25...

² Neste texto apresenta-se apenas uma atividade de cada concepção devido o espaço limitado para escrita.

- c) $\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 11... \\ 1 & 1 & 1 & 1... \end{matrix}$
- d) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4... \\ 10 & 100 & 1000 & 10000... \end{matrix}$
- e) $\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 8... \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125... \end{matrix}$

Fonte: dos autores.

Na atividade do Quadro 3, relacionada à concepção do estudo de relações entre grandezas, o objetivo é oportunizar aos educandos a análise do valor de áreas e perímetros de diferentes figuras.

Quadro 3: concepção do estudo de relações entre grandezas

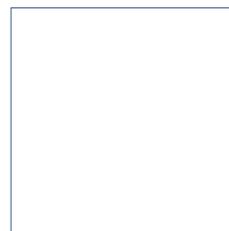
Atividade 1:

Utilizando os seguintes materiais: barbante, régua, quadrados de papel 1cm X 1cm, comprovar que os quadrados e retângulos possuem o valor da área e do perímetro especificado em cada item

a) Área: 28cm^2
Perímetro: 22cm



b) Área: 9cm^2
Perímetro: 12cm



c) Área: 25cm^2
Perímetro: 20cm



d) Área: 16cm^2
Perímetro: 20 cm



Depois da comprovação dos resultados acima, responder:

O que representa a área de uma figura?

O que representa o perímetro de uma figura?

Como poderíamos calcular a área de qualquer quadrado ou retângulo? E o perímetro?

Fonte: dos autores.

Na atividade do quadro 4, que se relaciona com a concepção algébrica que explicita o estudo das estruturas, pretende-se investigar que conjecturas os alunos formulam quando manipulam material concreto, na formulação de conceitos em relação ao conteúdo de produtos notáveis.

Quadro 4: atividades relacionadas com o estudo das estruturas

Atividade 1:
Cada grupo de trabalho precisará de:

- Uma folha retangular com medidas 50 cm e 30 cm;
- 10 tiras laranja de 15 cm;
- 10 tiras rosa de 20 cm;
- 10 tiras verde de 10 cm.

Realizar os seguintes procedimentos e escrever os resultados no quadro que segue:

- Medir os lados do retângulo com tiras de uma cor e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação as tiras que foram utilizadas.
- Medir os lados do retângulo com tiras de duas cores e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação a quantidades de tiras utilizadas.
- Medir os lados do retângulo com tiras de três cores e escrever as medidas dos lados do retângulo em relação a quantidades de tiras utilizadas.

	Lado Maior	Lado Menor	Perímetro
Uma cor			
Duas cores			
Três cores			

Comparar o resultado do grupo com os de outros grupos. Todos obtiveram os mesmos resultados? Por quê?

Fonte: adaptado de Schmidt (2000) e Quartieri, Giongo (2011).

Como atividade que contempla a concepção da álgebra como resolução de problemas (quadro 5), a proposta é que os educandos encontrem estratégias para calcular o volume de uma caixa, levando em consideração algumas medidas pré-definidas, além de resolver e formular conjecturas sobre problemas propostos.

Quadro 5: Atividades acerca da concepção da álgebra como resolução de problemas

Atividade 1:
Cada grupo de alunos receberá uma folha retangular de 20 cm x 16 cm. Construir uma caixa aberta, retirando de cada canto desta folha um quadrado de lado x .

Responder:

- a) Qual é o volume da caixa que o grupo montou? Explicar o procedimento utilizado para encontrar o volume da caixa.
- b) Agora construir novos retângulos com a mesma medida. Variar o tamanho dos quadrados dispostos nos cantos e recortá-los montando novas caixas. Preencher a tabela abaixo com os resultados obtidos.

Lado do quadrado recortado	Comprimento da caixa	Altura da caixa	Largura da caixa	Volume

- | | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|
- c) Se o lado do quadrado recortado fosse x . Quais seriam as medidas da caixa? E o volume?
d) Existem valores inteiros para x que não possibilitem a construção da caixa? Explicar a resposta.

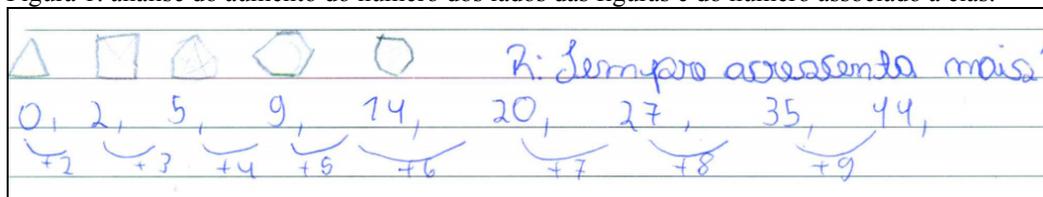
Fonte: adaptado de Teles (2010).

4. Resultados e discussões

Como esta pesquisa ainda está sendo desenvolvida, salienta-se que as atividades relacionadas a primeira concepção – álgebra como aritmética generalizada – já foram exploradas com os alunos das duas escolas. Como estas foram as primeiras atividades realizadas nas turmas, utilizando-se a Investigação Matemática, percebeu-se que para os educandos dialogarem foi necessário questioná-los bastante, incentivando-os a expressarem suas opiniões. Observou-se que estavam acostumados a questões com uma única resposta e a fazer apenas cálculos. A dificuldade encontrada foi a realização das anotações, pois de acordo com os alunos eles não estavam acostumados a escrever nas aulas de Matemática. Como os estudantes escolherem seus grupos de trabalho, evidenciou-se que durante a atividade todos participavam e discutiam as questões.

Diversas possibilidades de resultados emergiram durante a realização da atividade da primeira concepção (Quadro 2), relacionada a sequência “a” da atividade. Uma delas foi a análise de como a quantidade de lados das figuras aumentava. Além disso, uma das análises feitas pelos estudantes relaciona-se ao aumento do número que está associado a cada figura. Os estudantes evidenciaram que do triângulo para o quadrado o aumento deste número era 2, já do quadrado para o pentágono, o aumento foi 3 e assim sucessivamente (ver Figura 1).

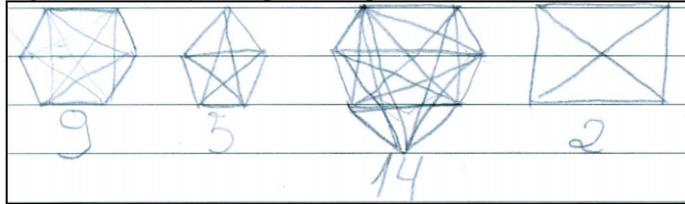
Figura 1: análise do aumento do número dos lados das figuras e do número associado a elas.



Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Neste contexto evidenciou-se que os alunos realizavam análises separadas de como aumentava a sequência de figuras e como aumentava a sequência de números, sem relacionar o par de sequências como solicitava o enunciado da questão. Apenas quatro grupos dos 24 conseguiram associar os polígonos com os números integrados a eles, levando em consideração o número de diagonais (conforme Figura 2).

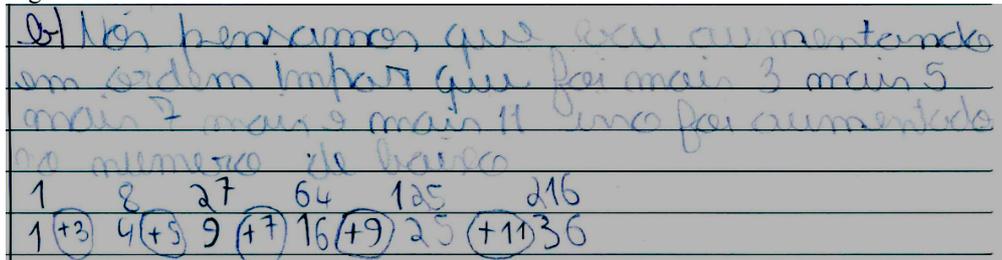
Figura 2: associação do par de sequência



Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Na sequência “b”, os alunos formularam suas conjecturas, baseando-se em como os valores da linha inferior aumentava. Considerando que o múltiplo de quatro não estava inserido na sequência, um dos grupos validou seus resultados inserindo este número na atividade, assim evidenciando que os valores da segunda linha eram somados sempre a números ímpares, como mostra a figura 3:

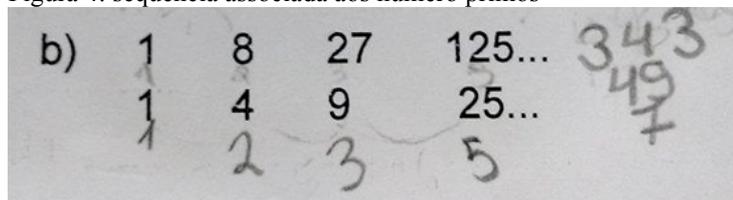
Figura 3: aumento do valores das linhas



Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016..

Ainda referente a questão “b”, alguns grupos dividiram os números da primeira linha pelos da segunda, obtendo como resultados os valores: 1, 2, 3 e 5 respectivamente. Considerando esses valores o próximo número da sequência seria o 7, levando em consideração que os demais valores foram associados aos número primos (figura 4).

Figura 4: sequência associada aos número primos

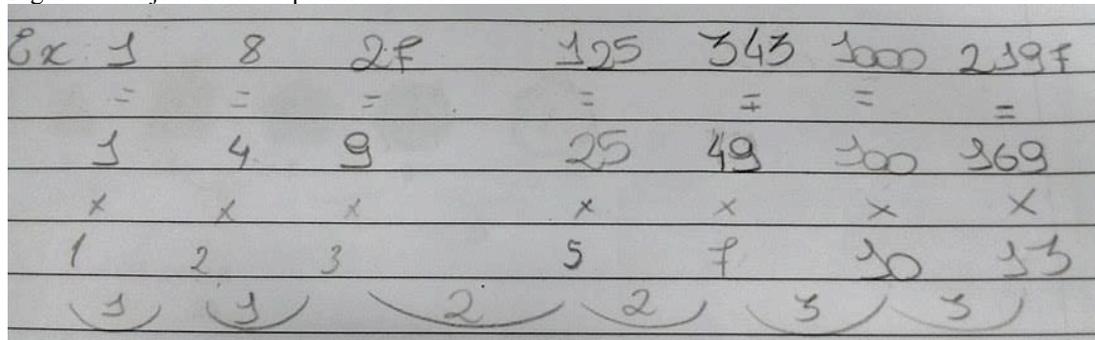


Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Analisando as respostas dos grupos, uma delas também está associada a divisão dos números da primeira linha pelos números da segunda, conforme Figura 5. O grupo obteve como resultados da primeira, segunda, terceira e quarta colunas, 1, 2, 3 e 5 respectivamente. Entretanto, os alunos analisaram o resultado das divisões associando o aumento da sequência da seguinte maneira: da primeira coluna até a segunda, acrescentou-se 1; da segunda coluna até a terceira também. Já da terceira para a quarta o acréscimo foi de 2, os alunos então,

supuseram que para encontrar o próximo termo teriam de, novamente acrescentar 2, obtendo como resultado 7. Para encontrar os dois próximos valores, os estudantes somaram 3, e assim sucessivamente.

Figura 5: conjectura da sequência “b” da atividade 3.

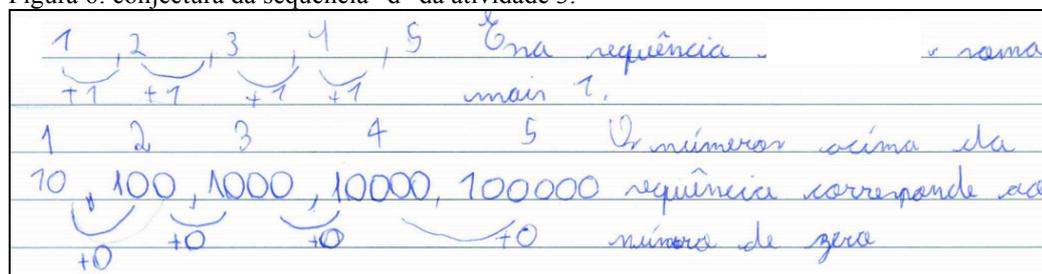


Ex: 1	8	27	125	343	1000	2197
=	=	=	=	=	=	=
1	4	9	25	49	100	369
x	x	x	x	x	x	x
1	2	3	5	7	10	13
(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	

Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Outras conjecturas que emergiram durante a realização da atividade três está relacionada a sequência “d”. Nesta, os alunos associavam os pares de sequências relacionando os valores da primeira linha com a quantidade de zeros dos números da segunda linha (ver Figura 6).

Figura 6: conjectura da sequência “d” da atividade 3.

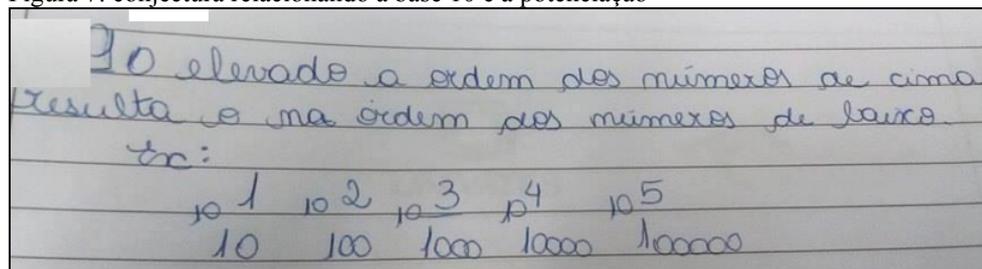


1	2	3	4	5	É uma sequência... e soma mais 1.
1	2	3	4	5	Os números acima da
10	100	1000	10000	100000	sequência corresponde ao
+0	+0	+0	+0	+0	número de zero

Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Evidenciou-se que alguns grupos, tanto do 7º como no 9º ano, utilizavam a potenciação para fazer analogia entre os pares de sequências. A base 10 sempre é elevada ao número da primeira linha, como exemplo pode-se citar: 10^1 , 10^2 , e assim sucessivamente. A conjectura formulada pelos alunos é apresentada na figura 7.

Figura 7: conjectura relacionando a base 10 e a potenciação



10 elevado a ordem dos números de cima resulta a na ordem dos números de baixo.

ex:

10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
10	100	1000	10000	100000

Fonte: produção de um dos alunos da pesquisa, 2016.

Concomitante a realização das atividades propostas, cada grupo apresentou os resultados obtidos para os demais colegas. Neste contexto, este fato corrobora com Ponte (2005) que diz que ao realizar uma investigação o papel do aluno não é só realizar provas e refutações, mas também a apresentação e discussão dos resultados, argumentando os mesmos com os colegas.

5. Considerações Finais

O trabalho em grupo pode auxiliar na resolução de atividades envolvendo a Investigação Matemática, pois os alunos, em conjunto, sentem-se mais seguros na realização das atividades. Ademais, a discussão possibilita encontrarem diferentes estratégias para as situações problematizadas, indiferente de seu nível de ensino. Percebeu-se com a realização das atividades que os alunos tiveram dificuldades em escrever conjecturas, pois diversas vezes foi necessário solicitar que os grupos, além de demonstrar as contas que realizavam, escrevessem a estratégia utilizada para resolver a questão. Mesmo os alunos sendo de anos de escolaridade diferente, ambas as turmas elaboraram conjecturas matemáticas coerentes.

Durante a realização das atividades, percebeu-se que os educandos apresentavam algumas dificuldades para formularem suas conjecturas. Entretanto, ao serem questionados e desafiados os grupos discutiam diversas possibilidades de respostas para cada sequência. Assim, trabalhar com colegas no qual os educandos possuíam mais afinidade favoreceu a discussão e formulação de conjecturas acerca das atividades, bem como proporcionou conhecimentos matemáticos e desenvolveu habilidades de argumentação. Ademais, a socialização das conjecturas encontradas permitiu a interação entre os alunos, bem como possibilitou integração entre todos da turma.

Ademais, com essas atividades acredita-se proporcionar melhoria nos processos de ensino e de aprendizagem de alguns conceitos algébricos. Destaca-se que até o evento serão realizadas todas as atividades propostas e, portanto, outros resultados poderão ser apresentados. Espera-se que os educandos continuem participando e formulando conjecturas em relação às demais atividades.

6. Referências

BRUNHEIRA, L. FONSECA, H. Investigar na aula de Matemática. **Revista Educação Matemática**, n.35 (3º semestre de 1995). Disponível em:
<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto3PDF>>.

LOMONATO, M.; PASSOS, C. L. B.; **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática**: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké*, FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemática na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

QUARTIERI, Marli T.; GIONGO, Ieda M.; REHFELDT, Márcia J. H. **Problematizando a Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental - Módulo II**. 2011. (Curso de curta duração ministrado/Extensão).

SCHMIDT, Isolde L. **A investigação da Evolução de concepções e práticas de ensino-elaboração e análise de propostas inovadoras no espaço do laboratório de ensino de matemática**. Pró-reitoria de pesquisa e extensão – PROPEX. Centro Universitário UNIVATES, 2000.

TELES, Rosinalda A. de M. **Um estudo sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolvem fórmulas de área**. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.12, n.1, pp.129-142, 2010.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As ideias da álgebra**. Trad. DOMINGUES, H. H. São Paulo: Atual, 1995.

YIN, Robert K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.