FORMAS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO EVIDENCIADAS EM CONCEITOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRIA

Daniele Cristina Gonçalves
Universidade do Estado de Minas Gerais - UEMG
daniele.goncalves@yahoo.com.br

Maria Auxiliadora Lage
Faculdade de Ciências Administrativas e Contábeis de Itabira - FACCI
auxiliadoralage@gmail.com

Resumo:
Este artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa que teve por objetivo analisar e descrever algumas formas de pensamento matemático evidenciados nas estratégias de resolução em questões de trigonometria. Analisamos os registros escritos de três questões, dentre sete que foram aplicadas em uma turma de 2ª série do Ensino Médio de uma escola na cidade de Itabira, MG. Concluímos que as formas de pensamento identificadas na resolução das atividades dos alunos foram a visualização dos objetos matemáticos, a busca de regularidades, a exploração e a descrição formal de relações e processos matemáticos. As dificuldades apresentadas pelos alunos apontam a necessidade de enfatizar questões que envolvam a interpretação de textos e os processos de generalização, formalização e abstração.

Palavras-chave: Educação Matemática;Hábitos de Pensamento Matemático; Trigonometria.

1. Hábitos de Pensamento Matemático

Uma das preocupações da Educação Matemática tem foco na maneira pela qual os alunos pensam os objetos matemáticos e, em especial, o pensamento matemático desenvolvido pelos mesmos, seja de modo elementar ou de modo avançado. Esse trabalho trata do desenvolvimento de "hábitos de pensamento" matemático, definido por Goldenberg (1998a, p. 31) como "modos de pensar que adquirimos tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais".

Segundo Goldenberg (1998a), uma abordagem que enfatize o desenvolvimento de hábitos de pensamento pode ser utilizada nos diversos níveis de ensino, da Educação Básica ao Ensino Superior. Segundo o pesquisador, essa abordagem pode promover um estudo associado das diversas áreas da Matemática, unificando os raciocínios algébrico, geométrico e analítico, além de possibilitar a integração do próprio pensamento, relacionando diversas áreas do currículo.

Goldenberg (1998a) ressalta que o modo como os conteúdos matemáticos são selecionados e organizados determinam uma história diferente da Matemática, pois “a matemática não são os conteúdos, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a matemática é (em parte) um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento" (GOLDENBERG, 1998a, p.37).

Apresentamos a seguir alguns hábitos de pensamento que, ao serem desenvolvidos pelos alunos nas atividades matemáticas, podem contribuir para melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

1.1. Visualização

De acordo com Goldenberg (1998b), esse é um hábito de pensamento que deve ser privilegiado, tanto em situações matemáticas quanto em outros contextos, pois trata da capacidade de criar, manipular e compreender imagens mentais. Assim como outras habilidades, a visualização exige aprendizagem e pode ser desenvolvida por meio de atividades matemáticas e não matemáticas, como a criação e leitura de imagens mentais, análise de aspectos visuais. Costa (2002, p. 59) destaca que há um consenso em que a "visualização se foca na percepção e na manipulação de imagens visuais".

Gonçalves (2015) em sua pesquisa aponta que a manipulação de imagens visuais "confere à Matemática um caráter exploratório, expandindo as possibilidades de analisar, interpretar, descobrir variantes e compreender o conteúdo matemático, suas características e propriedades, estimulando a descoberta" (GONÇALVES, 2015, p. 111).Na análise de sua proposta, foi possível identificar também que

> As atividades elaboradas, além de abordar a visualização com um papel fundamental na resolução, buscaram estimular a percepção visual dos alunos na exploração dos conceitos e enfatizar a experimentação como um aspecto fundamental na proposta desenvolvida (GONÇALVES, 2015, p. 111).

Borba e Penteado (2001) tratam de atividades que possibilitem a experimentação com conteúdos matemáticos, que podem estimular a percepção visual do aluno. "As atividades, além de naturalmente trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação" (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 34).

1.2. Busca de regularidades

A busca por regularidades assume um importante papel na aprendizagem do aluno, que pode ser motivado a fazer descobertas e a participar da construção do seu conhecimento. Gonçalves (2015) considera que “a construção do conhecimento como um processo no qual o aluno participa ativamente de sua aprendizagem, realiza novas descobertas e estabelece conexões com seus conhecimentos prévios para constituir novos conceitos e significados” (GONÇALVES, 2015, p. 45).

Lage (2008)afirma que “a procura por padrões e de invariantes atua como um conector entre conteúdos e ideias matemáticas, de maneira que os alunos possam descobrir relações, estabelecer leis, fazer generalizações, pensar de forma mais abstrata, desenvolvendo o poder da argumentação” (LAGE, 2008, p. 21).

De acordo com Goldenberg (1998b), a busca de regularidades deve ter uma atenção central nas atividades matemáticas, pois considerando que a Matemática é a ciência dos padrões, pode-se procurar uma estrutura comum entre os conceitos matemáticos.

1.3. Fazer experiências e explorações

No âmbito da sala de aula, é importante que o professor proponha atividades que estimulem os alunos a "desenvolver capacidades de questionar, relacionar ideias ao propor soluções, contribuindo para a formação do seu espírito crítico" (GONÇALVES, 2015, p. 109).

Gondenberg (1998b) defende que quando o próprio aluno explora uma situação problema, o ambiente da sala de aula possibilita a experimentação e permite ao aluno ampliar seus conhecimentos. Esse ambiente de investigação pode levar o aluno a"explorar as situações, formular questões, testar e verificar a veracidade de suas afirmações, verbalizar suas ideias, registrar suas estratégias e justificar seu pensamento" (GONÇALVES, 2015, p. 108).

1.4. Descrever, formal e informalmente, relações e processos

Para Goldenberg (1998b), é necessário desenvolver o hábito de estabelecer relações e fazer conexão entre as ideias, mas também é imprescindível ser capaz de descrevê-las. Em relação a esse hábito de pensamento, Lage (2008) destaca:

> Descrever é uma etapa importante para compreender, consistindo em: dizer o que significa; inventar a notação; discutir, tentar convencer os colegas que determinado resultado é verdadeiro ou plausível; descrever as evidências, mostrando os cálculos que constituem a prova; escrever resultados, conjecturas, argumentos, perguntas e opiniões sobre a situação em questão. (LAGE, 2008, p. 24).

A descrição pode ser feita inicialmente de modo informal, quando são discutidas as relações estabelecidas, para posterior formalização e registro escrito das conclusões, comunicando suas ideias. Nesse contexto, Goldenberg (1198b) destaca a importância de auxiliar os alunos a desenvolverem capacidades essenciais da comunicação matemática.

Em nossa concepção, quando o trabalho em sala de aula é pautado no desenvolvimento de hábitos de pensamento, é possível desenvolver outras habilidades que permitem melhor aprendizagem, como a capacidade de desenvolver diferentes formas de raciocínio, a criatividade e a aplicação dos conhecimentos em situações diversificadas, melhoria na argumentação e na justificação do seu raciocínio e a ampliação do conhecimento.

Essa pesquisa teve por objetivo analisar e descrever alguns hábitos de pensamento matemático identificados nas estratégias de resolução em questões de trigonometria. A partir das discussões travadas até aqui, elaboramos a seguinte questão a ser investigada: "Quais as formas de pensamento matemático evidenciados pelos alunos em resolução de questões envolvendo conceitos básicos de trigonometria?"

2. A pesquisa

A pesquisa foi realizada com 37 alunos matriculados na 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular, distribuídos em duas turmas, na qual uma das pesquisadoras era professora. A atividade proposta foi realizada ao final do estudo de todo o conteúdo de Trigonometria. A estratégia de ensino utilizada pela professora buscou privilegiar a representação geométrica no ciclo trigonométrico, com o objetivo de proporcionar um caráter visual dos conceitos e relações estudadas (COSTA, 2002).

A realização da atividade foi feita com os alunos trabalhando em dupla ou em trio, totalizando dezessete grupos. A opção por agrupá-los dessa forma foi feita com o intuito de propiciar um espaço para discussão das questões apresentadas, considerando que, "ao trabalhar em conjunto, produzem-se diálogos entre os alunos que mostram os processos seguidos ao resolver um problema de modo mais espontâneo" (VILLARREAL, 1999, p. 52), e "quando a atividade é realizada em dupla ou em grupo, ela proporciona a interação entre os estudantes e possibilita o compartilhamento de opiniões" (GONÇAVES, 2015, p. 51).

Foram apresentadas sete questões, resolvidas em duas aulas de cinquenta minutos cada. Escolhemos três para compor a análise da pesquisa, que serão analisadas a seguir.

3. Descrição e análise da atividade proposta

A atividade foi elaborada de forma a promover a participação e possibilitar um ambiente de discussão entre os alunos. Dessa forma, seria possível que os alunos vivenciassem processos característicos que se interagem no desenvolvimento de alguns hábitos de pensamento matemático como: visualizar, perceber regularidades, analisar, experimentar, generalizar, descrever, abstrair, provar, formalizar, entre outros (GOLDENBERG, 1998b).

Outro aspecto importante da atividade proposta é o possível estabelecimento de relações entre os conhecimentos já construídos e a atividade realizada, além da possibilidade de estabelecer relação entre as representações algébricas e geométricas envolvidas nos conceitos, propriedades e relações trigonométricas. Consideramos que a atividade foi adequada para que os participantes estabelecessem essas relações, uma vez que seria necessária a interação entre vários processos mentais e a mobilização das diversas formas de pensar em matemática.

Questão 1

Na questão 1, esperava-se que os alunos utilizassem alguma forma de representação geométrica e fizessem a análise das afirmativas baseados na simetria dos arcos e seus respectivos valores de tangente. De maneira proposital, os arcos contidos na questão não eram arcos notáveis, pois o objetivo era atingir a generalização e abstração nos alunos. Nesse caso, além desses processos, a questão exigia a visualização e a compreensão, para posterior generalização e abstração.

QUESTÃO 1 - Analise as afirmativas abaixo e classifique-as como verdadeiras ou falsas. Justifique.

I. tg 92º = – tg 88º	II. tg 178º = tg 88º
III. tg 268º = tg 88º	IV. tg 272º = – tg 88º

Dentre as dezessete duplas, apenas três não utilizaram a representação geométrica dos arcos na circunferência trigonométrica como forma de contribuição para a visualização e compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Das estratégias de resolução, foram utilizadas a comunicação verbal para justificar as escolhas e a representação geométrica para justificar as ideias. Apresentamos algumas estratégias utilizadas pelos alunos, a seguir.

Na resolução do item I, apresentada na figura 1, a dupla utilizou a estratégia de analisar a simetria dos arcos envolvidos, embora não tenham feito uma representação geométrica para essa análise. Pode-se perceber que foi mobilizado o hábito de pensamento matemático de visualização, mas esse processo se deu por meio da imagem mental, pois não foi necessária nenhuma forma de representação para a compreensão e comunicação do raciocínio (GOLDENBERG, 1998b).

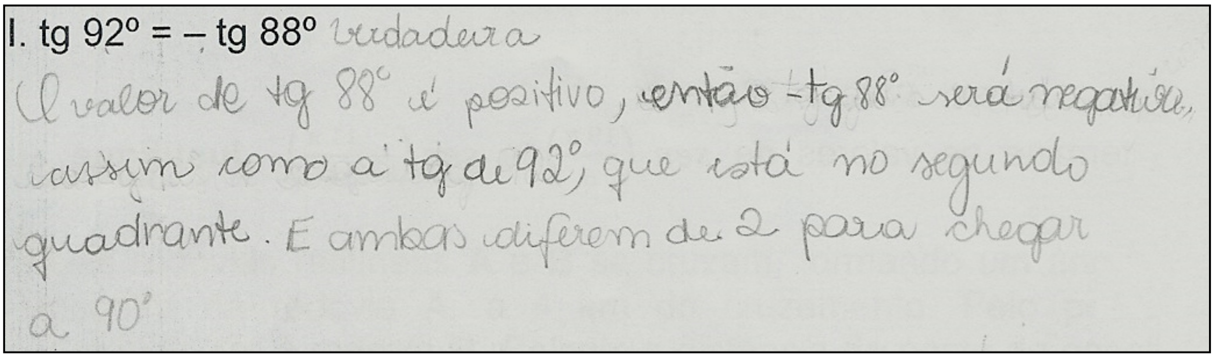

I. tg 92º = – tg 88º verdadeira
O valor de tg 88º é positivo, então -tg 88º será negativo, assim como a tg de 92º, que está no segundo quadrante. E ambos diferem de 2 para chegar a 90º

Figura 1 - Resolução da questão 1, item I, apresentada pela dupla 16

A resolução dos itens II, III e IV mostra que os alunos utilizaram a representação geométrica do círculo trigonométrico, marcaram os ângulos e utilizaram a análise de simetria entre os arcos e a exploração de regularidades. Foi analisado também o sinal da tangente em cada quadrante para elaborar conclusões quantos à veracidade das afirmativas. Apresentamos a seguir a resolução do item III, feita pela dupla 17.

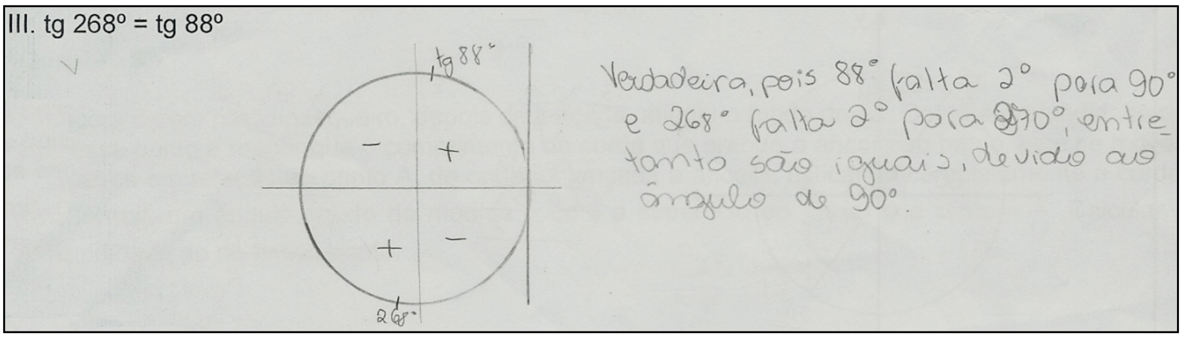


Figura 2 - Resolução da questão 1, item III, apresentada pela dupla 17

ISSN 2178-034X

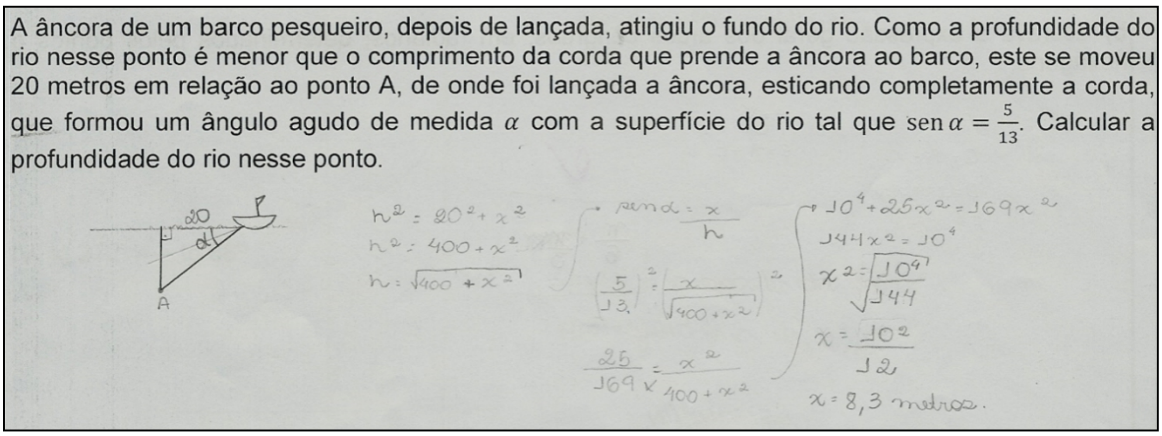
Pela análise da questão 1, podemos perceber que foram mobilizados hábitos de pensamento relacionados à visualização, tanto de forma mental quanto na representação geométrica, além da exploração e percepção de regularidades. Foi possível perceber também que os alunos foram capazes de generalizar as relações estudadas de simetria de arcos, uma vez que os ângulos contidos na questão não eram notáveis (GOLDENBERG, 1998b).

Questão 2

A questão 2, descrita a seguir, apresenta uma situação em que seria necessária a mudança entre a linguagem verbal para a linguagem matemática. Esperava-se que os alunos fizessem uma representação da situação por meio de um triângulo retângulo adequado ao contexto da questão e, a partir da figura, escolhessem uma estratégia de resolução que envolvessem razões trigonométricas e relações no triângulo retângulo.

QUESTÃO 2 - A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 metros em relação ao ponto A, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio tal que $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Calcular a profundidade do rio nesse ponto.

Nessa questão, muitas duplas tiveram dificuldade em representar a situação proposta em forma de figura. Os principais erros foram referentes à posição do ângulo α e da medida de 20 metros, que foram representadas como a medida do cateto oposto ao ângulo α ou como a medida da hipotenusa. Algumas duplas representaram uma figura que não faz sentido no contexto da questão e uma deixou a questão em branco. Apenas três resoluções estavam completamente corretas, apresentamos duas delas por se tratarem de estratégias distintas de resolução.



A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 metros em relação ao ponto A, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$. Calcular a profundidade do rio nesse ponto.

20

α

A

$h^2 = 20^2 + x^2$

$h^2 = 400 + x^2$

$h = \sqrt{400 + x^2}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{h}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{400+x^2}}\right)^2$

$\frac{25}{169} = \frac{x^2}{400+x^2}$

$10^4 + 25x^2 = 169x^2$

$144x^2 = 10^4$

$x^2 = \sqrt{\frac{10^4}{144}}$

$x = \frac{10^2}{12}$

$x = 8{,}3$ metros.

Figura 3 - Resolução da questão 2, apresentada pela dupla 10

Nesta resolução, apresentada na figura 3, a dupla mobilizou as seguintes formas de pensamento: visualização,descrição formal de relações por meio de equações matemáticas.. Como recurso inicial de resolução, foi utilizado o teorema de Pitágoras para determinar a medida do cateto oposto em função da medida da hipotenusa do triângulo. Em seguida, foi montada uma equação por meio da igualdade $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, contida no enunciado. O desenvolvimento dessa equação resultou em uma equação irracional, que foi transformada em uma equação incompleta de segundo grau, resolvida de forma correta e organizada.

A dupla 3 também mobilizou todos os processos matemáticos citados na análise anterior, porém utilizou uma estratégia diferente de resolução. Após a representação geométrica da situação, foi utilizada a relação fundamental da trigonometria para determinar o valor do cosseno do ângulo α, em seguida utilizou a relação da tangente como sendo a razão entre o seno e o cosseno do ângulo e finalizou encontrando a profundidade do rio no ponto A. Para desenvolver esse raciocínio, a dupla apresentou um registro de forma desorganizada e, em seguida, numeraram as etapas como forma de orientar o acompanhamento do seu raciocínio como consta na figura 4.

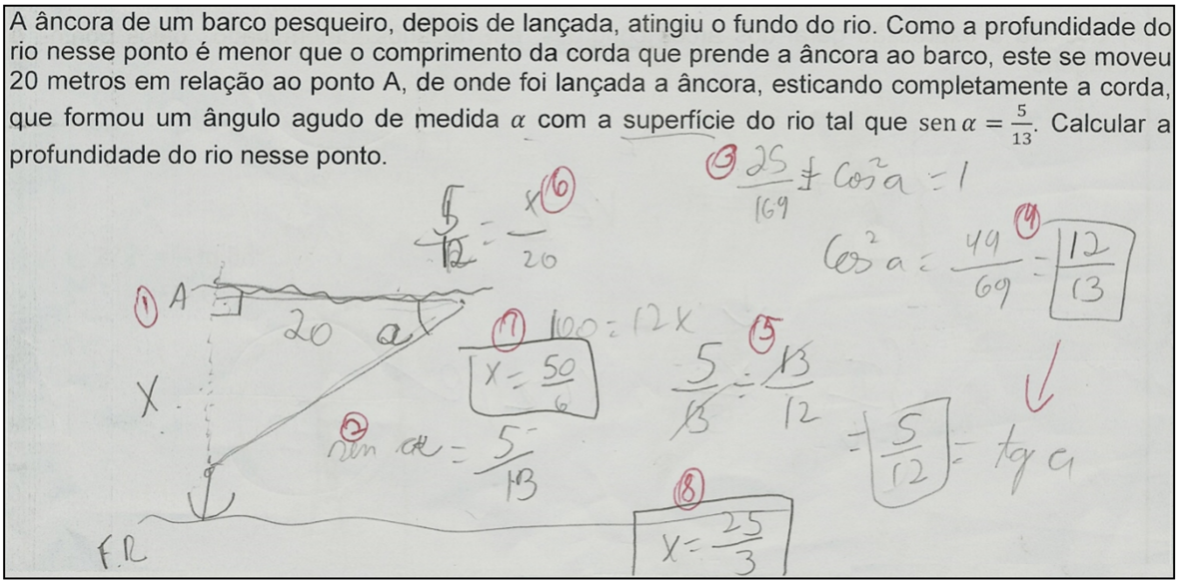


Figura 4 - Resolução da questão 2, apresentada pela dupla 3

Podemos evidenciar na resolução da questão 3 a utilização da exploração visual e do texto matemático por meio da representação do triângulo retângulo adequado, que permitiu a descrição formal das relações entre lados e ângulo e a resolução correta da questão.

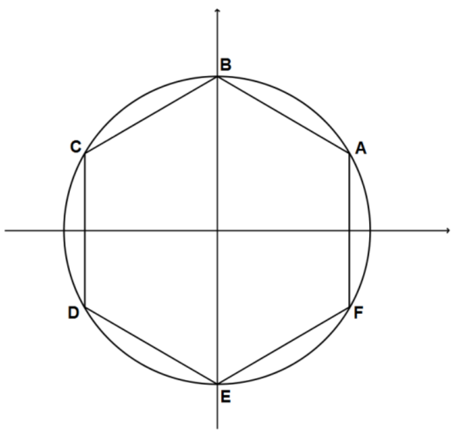
ISSN 2178-034X

Questão 3

A questão 3, apresentada a seguir, tinha por objetivo explorar a visualização e análise de um hexágono regular inscrito na circunferência trigonométrica e a interpretação das orientações contidas no texto e na figura, para ser possível traçar uma estratégia para determinar os ângulos correspondentes aos vértices do hexágono.

Para a resolução do item "a", seria necessário a percepção da regularidade de que a circunferência foi dividida em 6 partes e que o vértice A, inicia em $\frac{\pi}{6}$. O item "b" exige uma maior compreensão de conceitos matemáticos, sendo necessária fazer a descrição formal para uma linguagem matemática de uma representação geométrica por meio de uma generalização da expressão geral dos arcos côngruos..

QUESTÃO 3 -Na figura, o hexágono regular ABCDEF está inscrito na circunferência trigonométrica.



a) Determine em radianos os números que correspondem aos vértices do hexágono.

b) Escreva a expressão geral dos arcos côngruos, em radianos, determinados pelos pontos do hexágono.

Todas as duplas acertaram o item "a", sendo que cinco delas explicitaram em suas estratégias de resolução que foram identificados seis triângulos equiláteros. Três duplas iniciaram a resolução a partir do ângulo central formado entre dois vértices, calculando 360º: 6, obtendo assim o ângulo central de 60º.

Em todas as resoluções, ficou explícita alguma estratégia de visualização para determinar os números correspondentes aos vértices do hexágono, como a observação da simetria entre os vértices, a identificação do intervalo de variação angular entre os vértices, dentre outros. Apresentamos a seguir a resolução da dupla 16, conforme as figuras 5 e 6.

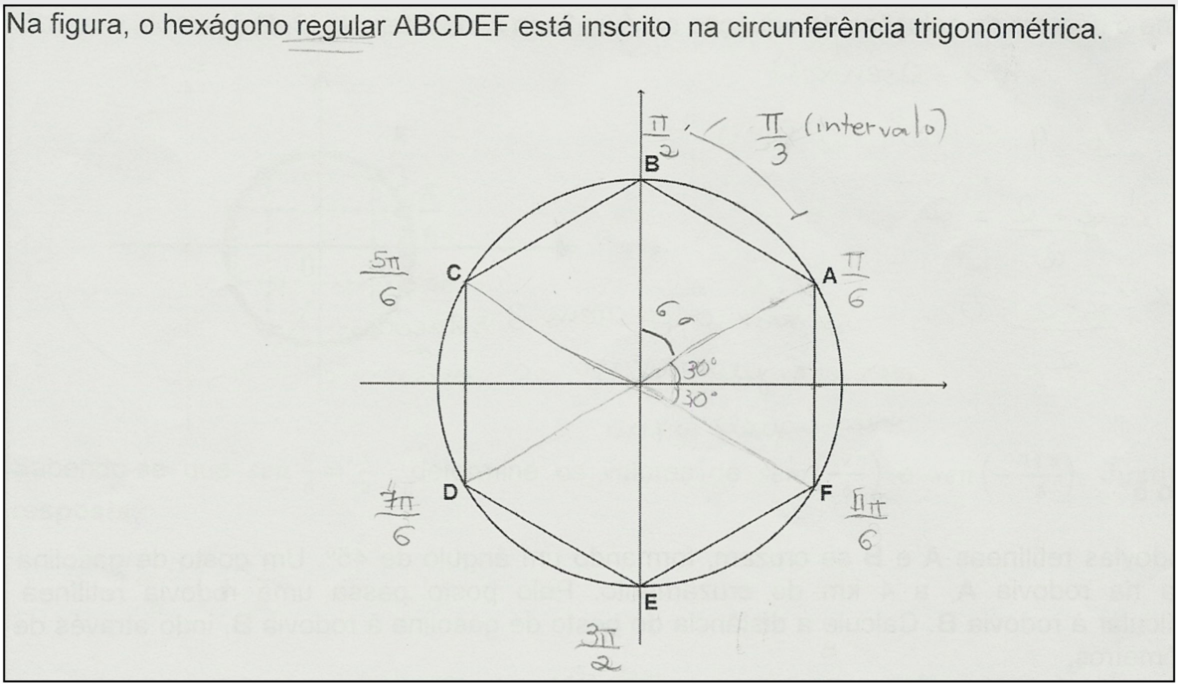
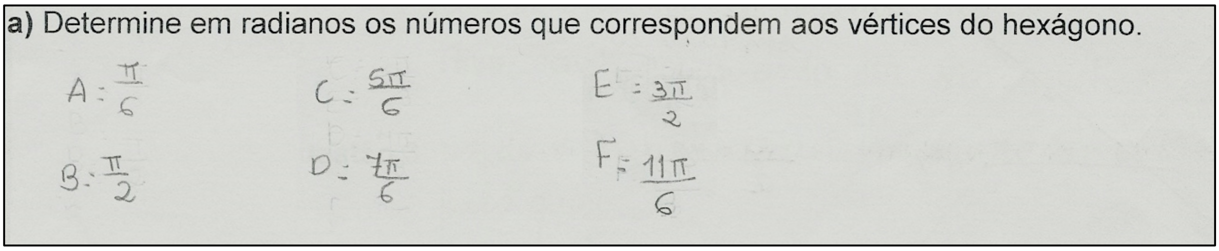


Figura 5 - Resolução da questão 3, item "a", apresentada pela dupla 16



a) Determine em radianos os números que correspondem aos vértices do hexágono.

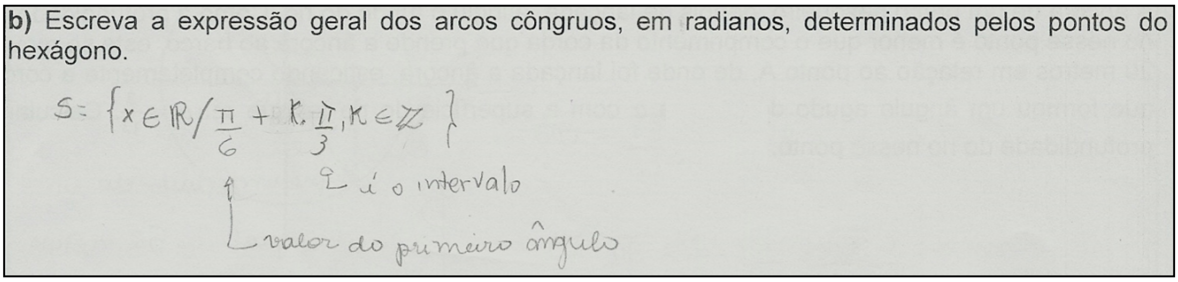
$A: \frac{\pi}{6}$ $C: \frac{5\pi}{6}$ $E: \frac{3\pi}{2}$

$B: \frac{\pi}{2}$ $D: \frac{7\pi}{6}$ $F: \frac{11\pi}{6}$

Figura 6 - Resolução da questão 3, item "a", apresentada pela dupla 16

No item "b", apenas seis duplas acertaram completamente o que foi solicitado, registrando a expressão geral dos arcos determinados pelos vértices do hexágono. Algumas duplas acertaram parcialmente esse item. Dentre os erros, os mais comuns foram: erro ao determinar o ângulo inicial, na variação angular ou calcularam o comprimento do arco entre dois vértices, ou seja, não conseguiram interpretar as orientações contidas no texto e na figura.

Apresentamos, na figura 7, a resolução da dupla 16, que explicitou em sua resolução o ângulo inicial e a variação angular.



b) Escreva a expressão geral dos arcos côngruos, em radianos, determinados pelos pontos do hexágono.

$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

é o intervalo

valor do primeiro ângulo

Figura 7 - Resolução da questão 3, item "b", apresentada pela dupla 16

Percebemos que a maior dificuldade dos alunos na resolução dessa questão foi no processo de generalização, que exigia um pouco de abstração para se obter a expressão geral dos arcos correspondentes aos vértices do hexágono. Esse fato já era esperado, pois a partir da nossa experiência e de outras pesquisas realizadas, percebemos que a generalização e a formalização são processos matemáticos de grande dificuldade. Em muitos casos, como identificado nessa questão, os alunos foram capazes de, a partir da figura, identificar os arcos da primeira determinação positiva, mas a maioria não foi capaz de generalizar para os arcos côngruos. Podemos identificar que o mesmo ocorreu nessa pesquisa, em que apenas 35% das duplas foram capazes de resolvê-la corretamente.

Podemos perceber que na resolução dessa questão os alunos mobilizaram as formas de pensamento matemático de visualização, buscas de regularidades, fazer explorações e descrever formalmente relações e processos matemáticos..

4. Considerações Finais

Este artigo teve como propósito apresentar resultados de nossa pesquisa realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio em uma escola particular no município de Itabira, Minas Gerais. Apresentamos o resultado da análise de três questões envolvendo o conteúdo de trigonometria, cujo objetivo das atividades propostas foi analisar e descrever algumas formas de pensamento matemático mobilizadas nas resoluções das questões pelos alunos.

Percebemos que os processos de representação de conceitos e propriedades, tanto de forma mental quanto geométrica, foram evidenciados na resolução das atividades como forma de contribuição para a visualização dos objetos matemáticos. Em diversas situações, os alunos utilizaram a busca de regularidades para descobrir as relações, fazer generalizações e justificar seu pensamento (GOLDENBERG, 1998b; GONÇALVES, 2015).

Identificamos, a partir da dificuldade dos alunos, a necessidade de uma atenção especial do professor, para que sejam trabalhadas questões que exijam a interpretação de textos e que sejam incentivadas a descrição formal das relações e processos matemáticos. Também é preciso trabalhar os conteúdos como um processo de evolução, desde o mais elementar ao mais formal, para que o aluno tenha a oportunidade de desenvolver os processos de generalização, formalização e abstração.

5. Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J. P. (Org.). **Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Coimbra: Escola Superior de Educação de Coimbra, 2002. p. 257-273.

GOLDENBERG, E. P. (1998 a). **"Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35.

GOLDENBERG, E. P. (1998 b). **"Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (II).** Educação e Matemática, 48, 37-44.

GONÇALVES, D. C. **Máximos e mínimos de funções no contexto da investigação matemática e tecnologias.** Curitiba: Appris, 2015.

LAGE, M. A. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.

ISSN 2178-034X