O GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO DE TEOREMAS DE REGIOMONTANUS

Luiz Felipe Araujo Mod
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
luizfelipemod@gmail.com

Celina A. A. P. Abar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
abarcaap@pucsp.br

Resumo:
Este trabalho é parte de uma pesquisa de Mestrado Acadêmico, em andamento, que procura investigar e explicar as demonstrações de Teoremas de Regiomontanus (1436-1476) com os movimentos dinâmicos do *software* GeoGebra. A pesquisa se dedica a uma análise do Livro I da obra *De Triangulis* no qual encontram-se Teoremas cujas demonstrações envolvem construções de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas. Neste trabalho, apresenta-se a exploração dinâmica do Teorema 40 na qual se verifica a necessidade de percorrer os diferentes papéis da demonstração descritas por alguns autores e a importância da utilização de um *software* como instrumento de investigação. Nesse caso foi possível identificar, por meio da função de descoberta, que algumas possibilidades não estavam contempladas na demonstração de Regiomontanus. Assim, procedimentos semelhantes de investigação de outras situações, se configuram como possibilidade a ser explorada na prática docente.
Palavras-chave: Regiomontanus, Demonstração, Geometria, GeoGebra.

1. Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa de Mestrado Acadêmico, em andamento, que procura investigar teoremas de Regiomontanus (1436-1476) e suas possíveis generalizações pelos movimentos dinâmicos permitidos pelo *software* GeoGebra.

Os *softwares* dinâmicos de Geometria possibilitam a elaboração de conjecturas a partir de verificações indutivas. Se a verificação não for suficiente para motivar a busca de uma demonstração, o desafio de tentar explicar o porquê de um resultado específico ser verdadeiro pode despertar a curiosidade para a construção de uma demonstração (VILLIERS, 2001).

É de extrema importância entender a função de uma demonstração no ensino de Matemática e, especialmente, da Geometria. De acordo com Villiers (2001, p. 32), a demonstração possui diversas funções:

- Verificação (dizendo respeito a verdade da afirmação);
- Explicação (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira);

- Sistematização (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
- Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados);
- Comunicação (a transmissão do conhecimento matemático);
- Desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Serão investigados os caminhos das demonstrações, de alguns teoremas, realizados por Regiomontanus, na tentativa de verificar e explicar, por meio do dinamismo do GeoGebra, os resultados obtidos, com a possibilidade de novas descobertas segundo Villiers (2001).

Uma demonstração não tem como único resultado verificar a conjectura que se está tentando provar pois, pode conduzir os matemáticos por caminhos que possibilitarão a construção de novos conceitos e teorias como se pode constatar nos exemplos citados por Villiers (2002).

Além disso, segundo Almouloud et al. (2008, p. 242), é necessário realizar “reflexões mais aprofundadas a respeito das concepções dos professores, não apenas sobre o que é demonstração, mas também sobre o que é explicar, argumentar e provar” e promover mudanças nestas concepções. Assim, os professores estarão preparados “para ensinarem seus alunos a raciocinar, argumentar, provar e demonstrar” (AMOULOUD *et al*, 2008, p. 243).

Existe uma falsa impressão de que matemáticos apenas resolvem problemas previamente conhecidos, porém, ao contrário disso, muitas vezes eles criam e resolvem problemas a partir de seus estudos e reflexões (VILLIERS, 1997). Uma possível causa desta impressão é que, de acordo com Villiers (1997, p. 15, tradução do autor), “existe uma tendência entre os matemáticos de divulgar somente seus resultados finais de forma clara e organizada, sem discutir ou refletir sobre o processo de descoberta ou investigação da demonstração” deste resultado.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003, p. 23) “o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa”.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental orientam, quanto aos recursos da História da Matemática, que:

ISSN 2178-034X

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático (BRASIL, 1997, p. 34)

Deste modo, o professor de Matemática pode propor atividades de investigação com base em resultados matemáticos historicamente comprovados.

O objetivo deste trabalho é, com a utilização do GeoGebra, obter uma interpretação visual de fatos matemáticos observados, vivenciados e demonstrados por Regiomontanus por meio de construções geométricas a partir das demonstrações apresentadas pelo autor e verificar quais funções da demonstração segundo Villiers (2001) podem ser identificadas pela movimentação dos pontos da construção obtida no *software.*

Importante observar que deve haver um cuidado para não ser levado ao erro por desconsiderar casos especiais (ABAR, 2011). Ainda segundo Abar (2011, p. 4), "construções complicadas demoram muito tempo para serem feitas com o uso de compasso e régua e com a utilização de um software de Geometria Dinâmica uma construção incorreta é menos provável de ser obtida".

2. Regiomontanus e a obra *De Triangulis*

Johann Müller von Königsberg (1436-1476), conhecido também como Regiomontanus, se dedicou aos estudos em Matemática, Astronomia e Cosmologia. Seus tratados foram de grande relevância para a Matemática da época, por exemplo, ele concluiu o Epítome do *Almagesto* de Ptolomeu (trabalho iniciado por Peuerbach) que tinha por objetivo facilitar a compreensão desta obra fundamental da Astronomia. Além disso, escreveu a obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (escrita por volta de 1464 e publicada postumamente em 1533) que possui grande relevância na História da Matemática, por tratar da primeira a abordar a Trigonometria de modo independente da Astronomia na Europa (PEREIRA, 2010).

De acordo com Pereira (2010), a obra *De Triangulis* foi escrita quando, ao terminar o

> Epítome do *Almagesto*, em 1462, Regiomontanus sentiu a necessidade de escrever regras sobre Triângulos que seriam úteis aos leitores do Epítome. Peuerbach já havia pensado nisso, porém sua morte prematura o impediu de fazê-lo. (PEREIRA, 2010, p. 41).

A obra pode ser apreciada na versão original (editada por John Petreus) com uma tradução para o inglês no livro de Barnabas Hughes (1967) e na sua tradução para o português nos anexos da tese de doutorado de Ana Carolina Costa Pereira (2010).

O trabalho de Regiomontanus é dividido em cinco livros, sendo os dois primeiros dedicados à Trigonometria Plana e os três últimos à Trigonometria Esférica.

A pesquisa se dedica a uma análise do Livro I no qual encontram-se Teoremas sobre a construção de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas e de onde emerge a questão: *quais funções da demonstração, segundo Villiers (2001), podem ser identificadas nas construções geométricas de teoremas de Regiomontanus e com os movimentos dinâmicos permitidos GeoGebra?*

3. O Primeiro Livro

No Primeiro Livro, encontram-se as definições e axiomas que possibilitarão as demonstrações realizadas nos teoremas subsequentes. Os Teoremas 1 a 19 desse livro tratam de conceitos de grandezas e razões e os Teoremas 20 a 57 de propriedades e construções geométricas de triângulos retângulos, isósceles e escalenos, objetos de nossa investigação.

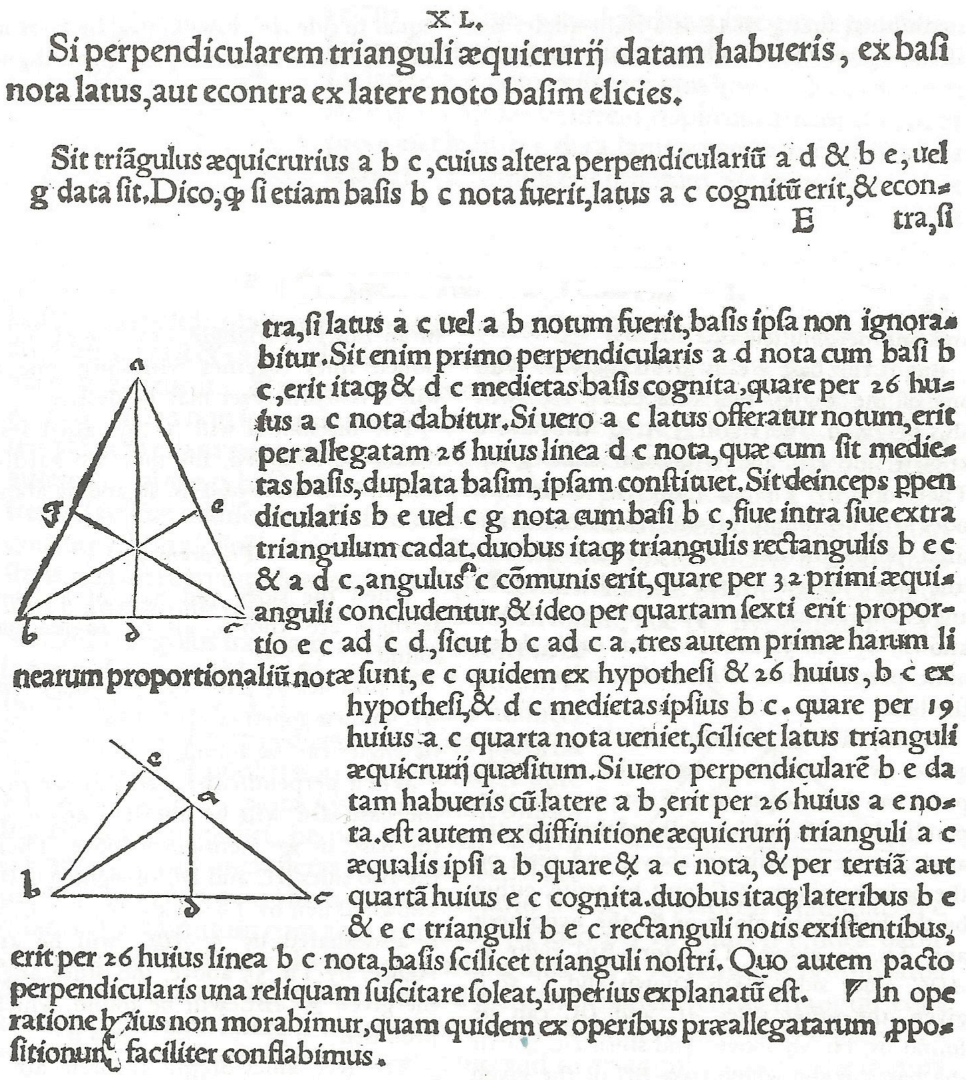
Selecionamos, para este trabalho, o Teorema 40 (Figura 1) para discutir a relevância da utilização do GeoGebra como instrumento de investigação das funções da demonstração no respectivo teorema.

Teorema 40. Se a medida de uma das alturas de um triângulo isósceles e a medida de um de seus lados forem conhecidas, então as medidas dos demais lados podem ser determinadas (HUGHES, 1967, p. 83, tradução do autor)[1].

O enunciado do teorema tem como hipótese que duas medidas são conhecidas: de uma das alturas de um triângulo isósceles e de um de seus lados. Serão considerados AD, BE e CG respectivamente as alturas relativas aos lados BC, AC e AB do triângulo isósceles ΔABC de base BC.

[1] Theorem 40. If the perpendicular of an isosceles triangle is given, then either the side can be found when the base is known or the base can be found when the side is known (HUGHES, 1967, p. 83, tradução do autor).

Figura 1 – Teorema 40



X L.

Si perpendicularem trianguli æquicrurij datam habueris, ex baſi nota latus, aut econtra ex latere noto baſim elicies.

Sit triãgulus æquicrurius a b c, cuius altera perpendiculariũ a d & b e, uel g data ſit. Dico, φ ſi etiam baſis b c nota fuerit, latus a c cognitũ erit, & econ- E tra, ſi

tra, ſi latus a c uel a b notum fuerit, baſis ipſa non ignorabitur. Sit enim primo perpendicularis a d nota cum baſi b c, erit itaq; & d c medietas baſis cognita, quare per 26 huius a c nota dabitur. Si uero a c latus offeratur notum, erit per allegatam 26 huius linea d c nota, quæ cum ſit medietas baſis, duplata baſim, ipſam conſtituet. Sit deinceps ppendicularis b e uel c g nota cum baſi b c, ſiue intra ſiue extra triangulum cadat, duobus itaq; triangulis rectangulis b e c & a d c, angulus c cõmunis erit, quare per 32 primi æquianguli concludentur, & ideo per quartam ſexti erit proportio e c ad c d, ſicut b c ad c a, tres autem primæ harum linearum proportionaliũ notæ ſunt, e c quidem ex hypotheſi & 26 huius, b c ex hypotheſi, & d c medietas ipſius b c. quare per 19 huius a c quarta nota ueniet, ſcilicet latus trianguli æquicrurij quæſitum. Si uero perpendicularẽ b e datam habueris cũ latere a b, erit per 26 huius a e nota. eſt autem ex diffinitione æquicrurij trianguli a c æqualis ipſi a b, quare & a c nota, & per tertiã aut quartã huius e c cognita. duobus itaq; lateribus b e & e c trianguli b e c rectanguli notis exiſtentibus, erit per 26 huius linea b c nota, baſis ſcilicet trianguli noſtri. Quo autem pacto perpendicularis una reliquam ſuſcitare ſoleat, ſuperius explanatũ eſt. In operatione huius non morabimur, quam quidem ex operibus præallegatarum ppoſitionum faciliter conflabimus.

Fonte: HUGHES, 1967, p. 82 e 84 – adaptado

Quadro 1 – Demonstração do Teorema 40

Demonstração	Justificativa apresentada	Construção no GeoGebra
	Função de Sistematização segundo Villiers (2002)	

Sejam AD, BE e CG respectivamente as alturas relativas aos lados BC, AC e AB do triângulo isósceles ΔABC de base BC.		
Caso 1. Suponha que a medidas de AD e BC são conhecidas. Então, a medida de DC será metade da medida de BC. Logo, a medida de AC pode ser determinada e AB será congruente a AC (Figura 1).	Pelo Teorema 26[2] e por definição de triângulo isósceles.	Construir um segmento BC com a medida conhecida; determinar seu ponto médio D (por onde passará a altura relativa ao vértice A); determinar o ponto A na reta perpendicular à BC passando por D de modo que AD tenha a medida da altura conhecida; obter o triângulo ΔABC.
Caso 2. Suponha, agora, que as medidas de BE (ou CG) e BC são conhecidas. Então, o ângulo <C é comum aos dois triângulos retângulos ΔBEC e ΔADC e, consequentemente, os triângulos possuem os mesmos ângulos (Figura 2).	Pela Proposição 32 do Livro I dos Elementos de Euclides[3].	Construir um segmento BC com a medida conhecida; construir a circunferência de centro B e raio igual a medida da altura; obter uma das tangentes a circunferência passando por C e marcar o ponto de tangência E; obter a mediatriz de BC e marcar o ponto A de intersecção da mediatriz com uma das retas tangentes; obter o triângulo ΔABC.
Assim, a razão de EC para CD será como a razão de BC para CA onde as medidas de EC e BC são conhecidas por	Pela Proposição 4 do Livro VI dos Elementos de Euclides[4].	

---

[2] Teorema 26. Se as medidas de dois lados de um triângulo retângulo forem conhecidas, então a medida do terceiro lado poderá ser determinada (HUGHES, 1967, p. 65, tradução do autor).

[3] Proposição 32.I: Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos. (BICUDO, p. 122, 2009)

[4] Proposição 4.VI: Os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos eqüiláteros estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos. (BICUDO, p. 235, 2009)

ISSN 2178-034X

hipótese e a medida de DC é metade de BC.		
Consequentemente, a medida de AC pode ser determinada.	Pelo Teorema 19[5].	
Caso 3. Suponha, agora, que as medidas dos segmentos BE e AB são conhecidas. Logo, as medidas dos segmentos AC e AE podem ser determinadas (Figura 3).	Por definição e pelo Teorema 26.	Construir um segmento AB com a medida conhecida; construir a circunferência de centro A e raio AB; construir a circunferência de centro B e raio igual a medida da altura obtendo uma das tangentes a ela passando por A e marcar o ponto de tangência E; marcar o ponto C de intersecção da tangente com a primeira circunferência construída; obter o triângulo ΔABC.
Tem-se ainda que a medida de EC pode ser determinada.	Pelo Teorema 3[6] ou 4[7].	
Como as medidas dos lados BE e EC do ΔBEC retângulo são conhecidas, a medida de BC também será determinada. Além disso, como já foi explicado, uma perpendicular pode revelar a outra.	Pelo Teorema 26.	

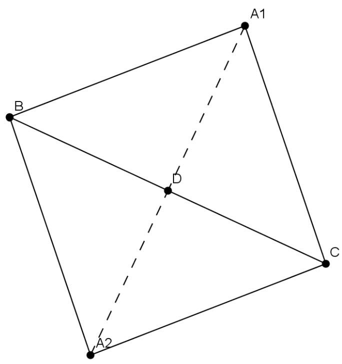
Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se que a demonstração de Regiomontanus contempla três casos onde são conhecidas algumas medidas conforme segue:

[5] Teorema 19: Se, de quatro quantidades proporcionais, três são conhecidas, a quarta que resta também será conhecida (PEREIRA, 2010, p. 114).
[6] Teorema 3: Se várias quantidades são dadas em termos uma da outra, sua soma pode ser encontrada (PEREIRA, 2010, p. 94).
[7] Teorema 4: Quando duas quantidades desiguais forem dadas em termos uma da outra, sua diferença pode ser encontrada (PEREIRA, 2010, p. 95).

- *Caso 1*: AD e BC (Figura 2);

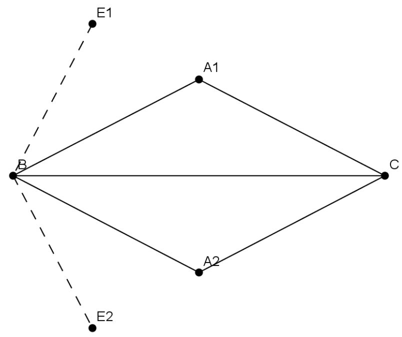
Figura 2 – Caso 1



Fonte: elaborada pelo autor no GeoGebra

- *Caso 2*: BE e BC ou CG e BC (Figura 2);

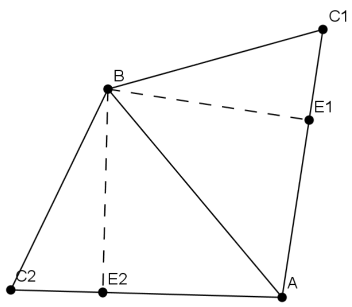
Figura 3 – Caso 2



Fonte: elaborada pelo autor no GeoGebra

- *Caso 3*: BE e AB (Figura 3).

Figura 4 – Caso 3



Fonte: elaborada pelo autor no GeoGebra

Neste momento se observa a função de verificação segundo Villiers (2002)

Com o uso do *software* GeoGebra foi possível notar que, para cada um dos casos, existem dois triângulos congruentes que podem ser construídos nessas condições.

ISSN 2178-034X

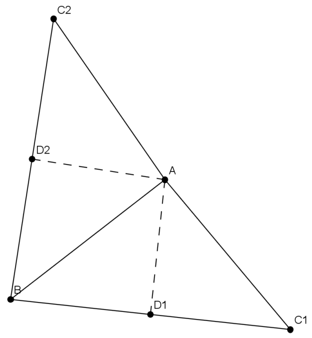
As construções foram realizadas como indicado na terceira coluna do Quadro 1, utilizando ferramentas e objetos matemáticos não especificados na demonstração do Teorema, a saber: retas perpendiculares e paralelas para construção das alturas (régua) e circunferências para construção dos triângulos isósceles (compasso), caracterizando a função de explicação

Nesse momento a função de descoberta (VILLIERS, 2002) se configura para este teorema, pois com o auxílio do *software*, foi possível observar que a verificação seria análoga a do *Caso 3* se as medidas de CG e AC fossem conhecidas. Todavia, dois novos casos se evidenciaram onde são conhecidas as medidas dos segmentos:

- *Caso 4*: AD e AB (ou analogamente AD e AC) (Figura 4);
- *Caso 5*: AB e CG (ou analogamente AC e BE) (Figura 5).

No *Caso 4*, foi novamente constatado que dois triângulos congruentes podem ser construídos nessas condições:

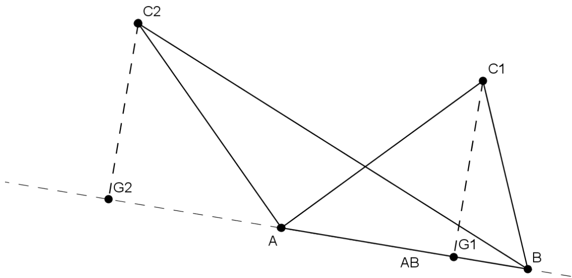
Figura 5 – Caso 4



Fonte: elaborada pelo autor no GeoGebra

No entanto, no *Caso 5*, ficou claro que as condições propiciam a construção de dois triângulos não congruentes. Esse fato evidencia a importância da investigação por meio do dinamismo e movimento permitido, nesse caso, pelo *software* GeoGebra.

Figura 5 – Caso 5



Fone: elaborada pelo autor no GeoGebra

4. Considerações Finais

Villiers sugere que os alunos sejam iniciados nas várias funções da demonstração numa sequência (Explicação – Descoberta – Verificação – Desafio Intelectual – Sistematização) não de uma maneira estritamente linear, mas numa espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas (VILLIERS, 2001). Seguindo esta sequência, é possível "(re)descobrir" o resultado proposto por Regiomontanus no Teorema 40 do Livro I da obra *De Triangulis* e, mais do que isso, verificar novas possibilidades não indicadas pelo autor na época o que indica a importância em atender as indicações de Villiers (2002) quanto às funções da demonstração

Num processo de investigação matemática em sala de aula, como propõem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), cuja temática fosse o teorema citado; o desafio intelectual de representar geometricamente os diferentes casos possíveis a partir das hipóteses e identificar situações não previstas poderia instigar o estudante a novos estudos e indicar que

> (…) se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

O *software* foi uma ferramenta importante para auxiliar na construção de argumentos a respeito do teorema citado, pois foi por meio da movimentação dos pontos que se constatou que alguns casos não estavam contemplados na demonstração.

A riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração, pois "uma dada conjectura ser ou não verdadeira é muitas vezes uma questão irrelevante em matemática" (VILLIERS, 2002, p. 1), a exemplo da demonstração do Último Teorema de Fermat demonstrado por Andrew Wiles pode-se dizer que

> O valor real do que Wiles e os seus colaboradores fizeram é muito maior do que a mera demonstração de uma conjectura excêntrica. A importância da demonstração do último teorema de Fermat reside na abertura de novas possibilidades para a matemática. ... O valor da demonstração de Wiles não está naquilo que demonstra, mas naquilo que torna acessível, no que possibilita (ROTA, 1997, p. 190 apud VILLIERS 2002, p. 2).

Nesta linha de pesquisa outros teoremas de Regiomontanus estão sendo estudados dinamicamente com a utilização do GeoGebra e novas descobertas têm se revelado, o que sugere uma possibilidade a ser explorada na prática docente.

5. Agradecimentos

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa-taxa concedida para realização do Mestrado em Educação Matemática na PUC-SP desde agosto de 2015.

6. Referências

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. **A Contribuição da Geometria Dinâmica na Resolução de Problemas.** In: II SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. Rio Claro: UNESP, 2011.

ALMOULOUD, Saddo Ag et al. **Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 2, p.217-246, 2008.

BICUDO, Irineu. **Euclides: Os Elementos.** São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais. Ensino Fundamental: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

HUGHES, Barnabas. **Regiomontanus on Triangles**. Madison, Milwaukee and London: University of Winsconsin Press, 1967.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A obra De Triangulis Omnimidis Libri Quinque de Johann Muller Regiomontanus 1436-1476: uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria.** Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2010.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2003 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

VILLIERS, Michael de. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad.** Educação e Matemática - APM, Portugal, n. 62, p.31-36, mar./abr. 2001.

VILLIERS, Michael de. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.** Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue, Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em: < http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/profmat2.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2016.

VILLIERS, Michael de. **The role and function of proof in dynamic geometry: Some personal reflections.** In: KING, James; SCHATTSCHNEIDER, Doris (Ed.). Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research. Washington: Mathematical Association of America Notes, 1997. p. 15-24.

ISSN 2178-034X