

ANÁLISE DE UMA TAREFA DE COMPARAÇÃO DE ÁREA NOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS, MATERIAIS MANIPULATIVOS E NO APPRENTI GÉOMÈTRE 2

Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva
Universidade Federal de Pernambuco
anderdouglasprs@gmail.com

Paula Moreira Baltar Bellemain
Universidade Federal de Pernambuco
Paula.baltar@terra.com.br

Resumo:

Este estudo apresenta um recorte de uma dissertação (SILVA, 2016) que teve como objetivo investigar o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido a área como grandeza, em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e no software de geometria *Apprenti Géomètre 2* (AG2). Como suporte teórico, utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, a abordagem de área como grandeza geométrica e o conjunto de situações que dão sentido à área como grandeza (comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície). Nos procedimentos metodológicos foram utilizados elementos da Engenharia Didática. Na tarefa proposta os sujeitos da pesquisa mostraram domínio de procedimentos de inclusão, sobreposição, decomposição e recomposição de figuras. Os resultados mostraram que a pluralidade de recursos nos ambientes materiais manipulativos e AG2 proporcionou condições favoráveis à aprendizagem.

Palavras-chave: Recursos; Área; Grandeza Geométrica.

1. Introdução

Várias pesquisas no âmbito da Educação matemática ao longo dos anos têm utilizado uma diversidade de recursos como forma de diagnosticar e por vezes de intervir nas dificuldades dos alunos na aprendizagem de área, como o uso do tangram (DUARTE, 2002), papel e lápis (FERREIRA, 2003) e malhas quadriculadas (PESSOA, 2010).

Outros estudos como os de Baldini (2004), CREM¹ (2007) e Gobbi (2012) utilizaram softwares de geometria com alunos de diferentes níveis de escolaridade como forma de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de área de figuras planas.

Nesse texto, discute-se como alunos de 6º ano do ensino fundamental lidam com uma tarefa de comparação de áreas de figuras planas. Trata-se de um recorte de uma pesquisa (SILVA, 2016) cujo objetivo foi investigar o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido a área como grandeza (comparação de área, medida

¹ Centre Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

de área, mudança de unidade e produção de superfície) em ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria.

Em virtude das limitações próprias desse tipo de texto, nos limitaremos a apresentar uma análise a priori e a posteriori de uma tarefa de comparação de área com o objetivo de verificar os procedimentos e teoremas em ação que surgiram nos três ambientes a partir da resolução desse tipo de situação por alunos do 6º ano do ensino fundamental, sujeitos da pesquisa de Silva (2016).

Portanto, apresentaremos a seguir, o referencial teórico adotado, os procedimentos metodológicos (as análises a priori e a posteriori). Por fim, nossas considerações finais e referências.

2. Referencial Teórico

Adotamos em nossa pesquisa a abordagem de área como grandeza geométrica a partir dos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989). Essas pesquisadoras observam diversos erros cometidos por alunos franceses com relação ao conceito de área, tais como:

A superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que a possibilidade de medida de uma superfície dependa de S ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma. Assim, os alunos encontram dificuldade para exprimir a área de um triângulo em cm^2 (centímetros quadrados), dada a impossibilidade de cobri-lo com número finito de quadrados.

A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície;

Se o perímetro de uma superfície se altera sua área também (e reciprocamente).

Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.

Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas: por exemplo, produto de duas “dimensões” para obter a área de um paralelogramo ou o produto das três “dimensões”, no caso de um triângulo (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394)².

Essas dificuldades observadas na resolução de tarefas sobre a área ocorrem segundo as pesquisadoras, como consequência do tratamento dado por alguns alunos aos problemas sobre área com base em uma “concepção forma” ligada ao quadro geométrico, ou uma “concepção número” vinculada ao quadro numérico, ou às duas simultaneamente, mas sem estabelecer relações entre elas. A mobilização de concepções numéricas corresponde a considerar apenas os aspectos pertinentes para o cálculo de área e as concepções geométricas são aquelas segundo as quais os alunos confundem área e figura, assim como perímetro e contorno.

² Essa citação trata-se de uma tradução livre do texto original em francês *UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DU CONCEPT D'AIRE DE SURFACE PLANE* (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 394).

Douady e Perrin-Glorian (1989) entendem que na aprendizagem da área devem ser considerados três quadros: o quadro geométrico, o quadro das grandezas e o quadro numérico. O quadro geométrico refere-se às superfícies planas; o quadro numérico refere-se às medidas da área das superfícies, interpretadas como números reais não negativos; e o quadro das grandezas refere-se ao estabelecimento de classes de equivalência formadas por figuras de mesma área.

Essas pesquisadoras defendem que a abordagem da área como uma grandeza favorece as articulações pertinentes entre os quadros geométrico e numérico, o que contribui para a superação de dificuldades de aprendizagem e erros como aqueles citados anteriormente. Afirmam também que para construir a noção de área como grandeza, é preciso tanto distinguir área e superfície, como área e número.

Adotamos ainda como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud que reúne com êxito contribuições da Psicologia Cognitiva, da Didática da Matemática e da Matemática. As pesquisas que adotam esse marco teórico vêm ajudando a entender melhor como as crianças formam e desenvolvem conceitos matemáticos, a partir da observação de suas estratégias de ação (GITIRANA, et. al. 2014, p.7). Essas autoras, com base nos estudos de Vergnaud, afirmam que diversos fatores influenciam e interferem na formação e desenvolvimento de conceitos e que o conhecimento conceitual emerge a partir da resolução de situações de caráter teórico ou prático.

Com base em Vergnaud (1996), consideramos que um conceito é constituído por uma tríade $C = (S, I \text{ e } R)$, na qual **S** é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), **I** é o conjunto de invariantes sobre os quais se assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado) e **R** é o conjuntos das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante).

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, para ganhar significado um conceito deve ser apresentado em uma grande variedade de situações e quando estamos diante de situações conhecidas, utilizamos esquemas já conhecidos. Os esquemas são formados por regras de ações, antecipação, inferências e invariantes (conceitos em ação e teorema em ação).

Como destacam Gitirana et al. (2014), os alunos estabelecem e usam implicitamente relações lógicas sofisticadas, que possuem- ou não- relações matemáticas correspondentes e o mapeamento dessas relações contribui para a compreensão do desenvolvimento conceitual e da aprendizagem. Em nossa pesquisa focamos nas situações que dão sentido à área e nos invariantes operatórios, mais especificamente os teoremas em ação que são proposições, que

podem ser verdadeiras ou falsas. Essas proposições permanecem, em grande parte, implícitas nas ações do sujeito.

Em seu estudo sobre área e perímetro como grandezas, Ferreira (2010) adota como marco teórico a TCC. Adotamos aqui a classificação das situações que dão sentido a área como grandeza proposta por essa autora, a partir de uma classificação elaborada por Baltar (1996). Ferreira (2010) identifica quatro grandes classes, a saber: comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície.

As situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas. (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Ferreira (2010) coloca que esse tipo de situação de comparação de área é escasso em livros didáticos. Essa autora observa a predominância de tarefas que tratam apenas da medida de área e que esse fator pode conduzir os alunos a compreensão de área como um número, ou seja, a chamada concepção numérica.

No recorte da pesquisa que é objeto desse artigo, nosso interesse se volta para o modo como alunos lidam com uma tarefa de comparação.

3. Procedimentos Metodológicos

Nossa metodologia de pesquisa é baseada em elementos da Engenharia Didática³ (ARTIGUE, 1996), mais especificamente as fases de análise a priori e a posteriori.

A fase de análise a priori nos permitiu a partir da revisão de literatura elaborar uma tarefa de comparação de área. Na análise a posteriori, os procedimentos de resolução utilizados pelos alunos são confrontados com o que foi antecipado na análise a priori, destacando os teoremas em ação que surgiram por meio desses procedimentos.

Os sujeitos da pesquisa foram 12 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal localizada na zona da mata norte do estado de Pernambuco. Os alunos trabalharam em duplas. Cada dupla de alunos realizou a tarefa de comparação de área em um dos três ambientes, portanto, duas duplas realizaram as tarefas em cada ambiente. A tarefa era similar nos três ambientes (papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2).

³ A engenharia didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 196).

A escolha do 6º ano se deu por ser um período de transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental e também com base na análise dos referenciais curriculares segundo os quais o estudo da área de figuras planas deve ser iniciado no 4º a 5º ano do ensino fundamental e consolidado no 6º ano.

Para termos acesso aos extratos dos protocolos dos alunos, além das respostas que deveria constar na ficha da tarefa, filmamos cada dupla e gravamos a interface do computador das duplas que responderam a tarefa no ambiente Apprenti Géomètre 2.

O recorte dessa pesquisa apresentado no presente artigo diz respeito ao modo como os estudantes lidam com uma tarefa de comparação de áreas de figuras planas, na qual o aspecto numérico está presente.

4. Análise a priori da tarefa de comparação de área com a intervenção do aspecto numérico

Como já foi dito, havia três versões similares de cada tarefa: uma no ambiente papel e lápis, outra no ambiente materiais manipulativos e a terceira no Apprenti Géomètre 2 (AG2). A versão desta tarefa no ambiente AG2 encontrava-se da seguinte forma:

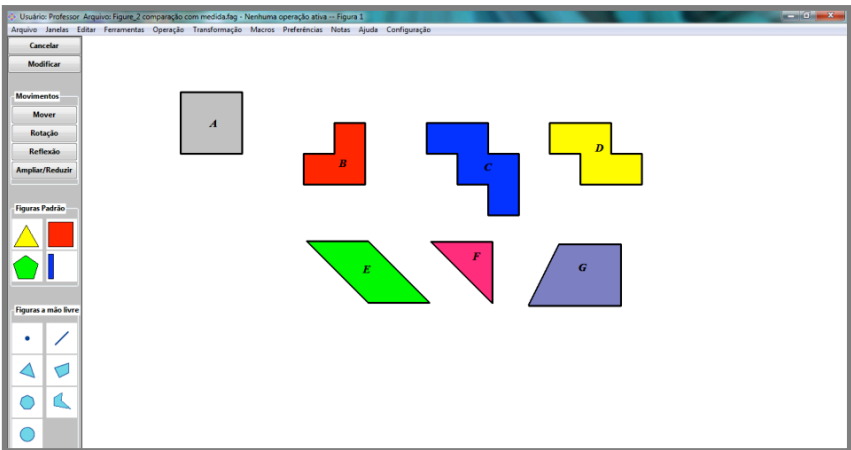
A tarefa é representante da classe de situação de comparação de área de duas figuras e está em jogo ora a articulação entre os quadros geométricos e das grandezas sem a intervenção do quadro numérico, ora a articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico, uma vez que, os alunos terão a possibilidade de recorrer à medida para comparar as áreas de algumas das figuras representadas. Não se trata de uma situação de medida, pois embora os sujeitos possam medir as áreas das figuras e usar o valor da medida para responder as perguntas, o que se pede é que eles comparem as áreas das figuras para decidir quais delas têm mesma área que A, quais têm área menor e quais têm área maior que A.

Formulamos essa tarefa de maneira que os alunos pudessem utilizar para comparar as áreas das figuras procedimentos de inclusão, sobreposição, composição, decomposição e recomposição (não numéricos), e também pudessem comparar as medidas de área usando uma unidade dada.

Abra o arquivo “**Tarefa Figure_2_ag2**” que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seus nomes, após esses procedimentos, vocês devem escolher o menu AB ou AG que contém todas as ferramentas do **Apprenti Géomètre 2** necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Brasileiro em OK.

Tarefa 2 - Situação de Comparação de Área no AG2

1- Observe o conjunto de figuras abaixo:



Agora, responda cada uma das perguntas.

- Entre as figuras, quais possuem área maior que A? _____
Explique como você fez:
- Entre as figuras, quais possuem área menor que A? _____
Explique como você fez:
- Entre as figuras, quais possuem a mesma área que A? _____
Explique como você fez:

As respostas corretas esperadas são: as figuras que possuem área maior que a do quadrado A, são C e G, as figuras que possuem área menor que a de A são B e F e as figuras D e E possuem a mesma área que A.

Por outro lado, há erros e entraves esperados, já identificados em pesquisas anteriores, como por exemplo, confusão entre área e perímetro (FERREIRA, 2010); colocar que figuras de área iguais são idênticas, área está relacionada ao formato das figuras (MELO, 2003);

dificuldade em dissociar área de figura e área e número, considerar o comprimento dos lados da figura para calcular as áreas (DUARTE, 2002), que poderiam a priori ser cometidos pelos sujeitos da pesquisa. Esses erros previsíveis correspondem à mobilização de outros critérios de comparação que sinalizam uma compreensão conceitual inadequada do que é a área de uma figura. É o caso da comparação dos perímetros, da comparação de outros comprimentos das figuras ou ainda a mobilização de uma noção intuitiva de espaço ocupado, vinculada à percepção (concepções geométricas).

5. Possíveis Procedimentos e Teoremas em ação

Nessa tarefa o aluno poderá comparar as áreas das figuras B, C e D com a do quadrado A pela contagem de quadradinhos. Ao perceber que as figuras A e D são compostas por quatro quadradinhos cada, que B é composta por três quadrados, e que C contém cinco quadradinhos que podem concluir que a área de B é menor que a de A, a área de C é maior que a de A e a área de D é igual à de A. Nesse procedimento, está subjacente um teorema em ação verdadeiro “*a área é a quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma figura*” (FERREIRA, 2010).

Com relação a essa questão Douady e Perrin-Glorian (1989) colocam que duas figuras S_1 e S_2 , tem mesma área quando elas são constituídas do mesmo número de quadrados, podendo ser sobrepostos ou não, assim temos que D tem mesma área que A. Ainda segundo essas autoras, se S_1 contém menos quadrados que S_2 , a área de S_1 é menor que a de S_2 , o que leva a concluir que área da figura B é menor que a do quadrado A e que a área de C é maior que a do quadrado A.

A comparação das áreas de A e B também podia ser realizada por inclusão nos ambientes materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre 2*, ou seja, no primeiro os alunos tinham como possibilidade decalcar a figura B para sobrepor-la ao quadrado A, no segundo podiam selecionar a ferramenta mover e arrastar B até incluí-la em A.

Assim podiam notar por inclusão que a área da figura B é menor que a da figura A. Esse mesmo procedimento pode ser evidenciado na comparação das áreas da figura F com o quadrado A. Os alunos também podem notar que após incluírem F em A, “F terá metade da área da figura A”, um invariante operatório correto é que diz respeito a inclusão -“se uma figura X cabe dentro de outra figura Y então a área de X é menor que a área de Y (FERREIRA, 2010).

As áreas das figuras E e G, assim como a de F, não podem ser comparadas apenas pela contagem de quadradinhos. Para comparar a área da figura E com a de A, um dos procedimentos que os alunos podem mobilizar é decompor essa figura em dois triângulos retângulos e recompor uma figura possível de ser comparada por sobreposição. Nesse caso um quadrado, notando assim que as figuras A e E possuem as mesmas áreas. Os teoremas em ação mobilizados nesse caso serão: “*superfícies equidecompostas têm mesma área*”. Na comparação de A com D, além do procedimento de contagem descrito anteriormente, poderão decompor o tetraminó representado pela figura D, em dois retângulos e em seguida deslizar as peças e compor um quadrado para então sobrepô-lo à figura A e notar que possuem as mesmas áreas, dois teoremas em ação que podemos identificar nessa comparação é “*o corte e colagem sem perda nem sobreposição conserva as áreas*” e a “*área é invariante por isometria*”.

Com relação à figura G poderão colocar que tem área maior que a de A visualmente ao perceberem que a figura G é composta por um quadrado de mesma área que o da figura A adicionado um triângulo retângulo, esse procedimento nos traz à tona segundo Duarte (2002) o princípio de aditividade de área, segundo o qual dada uma figura G composta pela união de duas figuras quase disjuntas (com no máximo pontos de fronteira em comum) G_1 e G_2 , a área de G é a soma das áreas de G_1 e G_2 .

6. Análise a posteriori da tarefa 2

Apresentaremos a seguir alguns procedimentos e teoremas em ação mobilizados pelos sujeitos da pesquisa nos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 na resolução desta tarefa de comparação de área. Como já explicitamos anteriormente, os alunos foram organizados em duplas, duas por ambiente.

As duplas do ambiente papel e lápis não dispunham de nenhum outro recurso além do lápis e do papel. Segue-se um exemplo de resposta para o item a, no qual a dupla considera que o paralelogramo E tem área maior que a do quadrado A (quando na verdade as áreas das duas figuras são iguais). :

a) Entre as figuras, quais possuem área maior que A? <u> E </u> Explique como você fez:
<i>Eu acho porque a figura E é mais comprida.</i>

A análise da vídeo gravação mostra que os alunos compararam os comprimentos de lados das duas figuras. Um dos sujeitos dessa dupla afirma que “*E tem área maior porque tem dois lados mais compridos que A*”. Essa dupla leva em consideração o comprimento dos lados das figuras no processo de comparação de suas áreas. Interpretamos esse erro como vinculado à mobilização de um teorema em ação falso segundo o qual *o comprimento dos lados determina a área de uma figura*. Os estudos de Duarte (2002) explicitado em nossa análise a priori coloca que esse processo de comparação de área considerando comprimentos dos lados da figura aparece com frequência nas resoluções das tarefas sobre área.

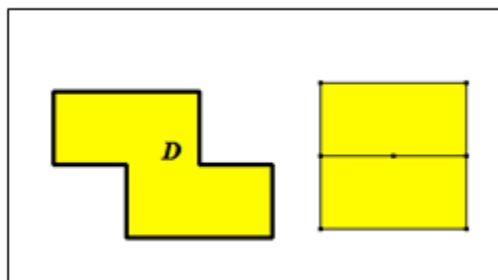
A Dupla 2 do ambiente Papel e Lápis coloca que apenas “G” tem área maior que a de A Mesmo não justificando em sua ficha de papel, identificamos na vídeo-gravação que um dos sujeitos dessa dupla afirma o seguinte: “*G é mais maior porque tem um pedaço a mais que A*”. Assim para esses alunos a relação de ordem das áreas está apoiada em um invariante operatório correto de acordo com o princípio de aditividade de área previsto em nossa análise, segundo o qual dada uma figura G composta pela união de duas figuras quase disjuntas (com no máximo pontos de fronteira em comum) G1 e G2, a área de G é a soma das áreas de G1 e G2.

As duas duplas que resolveram as tarefas no ambiente Materiais Manipulativos, decalcaram o quadrado A com o papel de decalque e em seguida iniciaram o processo de comparação das áreas das figuras, tendo A como referência. A dupla 1 do ambiente Materiais Manipulativos realizou sobreposições da figura A em cada uma das demais figuras e como A cabe dentro de G por inclusão, sobrando uma parte, essa dupla concluiu que apenas essa figura teria área maior que a do quadrado A. A segunda dupla desse ambiente também observa que a área de G é maior que a de A, por inclusão, porém mesmo não tendo como incluir A em C, concluem também que a área de C é maior que a de A, pela contagem de quadradinhos.

A primeira dupla do Ambiente Aprenti Géomètre 2 realiza no software a sobreposição das figuras. Identifica corretamente as figuras que têm área maior que a de A apoiando-se na inclusão. A segunda dupla desse ambiente também utiliza processo de sobreposição, porém identificaram que apenas a figura C teria área maior que a do quadrado A. Com relação ao item (b) os procedimentos e os invariantes são similares aos do item (a).

Com relação ao item (c) à identificação das figuras de mesma área que a do quadrado A, as duas duplas do ambiente Materiais Manipulativos afirmam que D e A têm áreas iguais. A primeira dupla decompõe a figura D e a recompõe produzindo um quadrado idêntico ao

quadrado A. O procedimento empregado pela dupla 1 do ambiente Apprenti Géomètre 2, cujo protocolo é reproduzido a seguir, é similar:



Há uma diferença importante na resolução das duas duplas. A que trabalhou com materiais manipulativos sentiu a necessidade de sobrepor o quadrado A e o quadrado produzido pela decomposição e recomposição. Por isso, interpretamos que o teorema-em-ação verdadeiro mobilizado é que *figuras que coincidem por sobreposição têm mesma área*. Já os alunos que realizaram a tarefa no software não sentem a necessidade de sobrepor a nova figura e o quadrado, o que nos leva a inferir que mobilizam o teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a decomposição e recomposição de uma figura, sem perda nem sobreposição conserva a área da figura*. Entretanto, em ambos os casos a conservação da área por decomposição e recomposição conveniente está presente, pois ao deduzir da comparação das áreas dos quadrados que a figura A e a figura D têm mesma área, os sujeitos se apoiam implicitamente no fato que a figura D tem mesma área que o quadrado obtido por decomposição e recomposição conveniente.

As duplas do ambiente papel e lápis, não conseguiram explicitar corretamente qual seria a figura de mesma área que a do quadrado A nesse item. A primeira afirma que a figura G tinha a mesma área que A e a segunda dupla conversam entre si e surge a seguinte pergunta: “*Como assim mesmas áreas?*”? Em seguida o aluno 1 responde com a seguinte expressão: “*é ter o mesmo tamanho*” a conversa dessa dupla nos traz algumas reflexões, destacaremos a seguir esse diálogo:

Aluno 1- *eu acho que B tem mesma área.*

Aluno 2- *tem não porque B falta um pedaço, olha!*

Aluno 2- *era bom que a gente pudesse desenhar para ver.*

Aluno 1 – *eu ainda acho que é B;*

Aluno 2- *mas por quê?*

Aluno 1 – *porque tem mesma altura e mesma largura.*

Aluno 2 – *Ah bom! Eu acho que tem mesma largura, mas mesma altura? (dúvida).*

Por fim decidem que B tem a mesma área que A, observamos que um dos alunos no início da conversa, para ele faltava em B um pedaço, ou seja, uma parte de B para poder ter mesma área que a da figura A, identificamos assim que a ideia de mesma área para esse aluno estaria relacionada as figuras A e B terem a mesma forma, ou mesmo que B teria que ser idêntico ao quadrado A para terem a mesma área.

7. Discussão dos resultados e considerações Finais

Os procedimentos utilizados pelos alunos para comparar as áreas das figuras desta tarefa envolveram decomposição, recomposição, sobreposição e ladrilhamento seguido de comparação das medidas de área obtidas. Esses procedimentos estavam apoiados em teoremas-em-ação corretos segundo os quais - *figuras que coincidem por sobreposição têm mesma área, a decomposição e recomposição de uma figura, sem perda nem sobreposição conserva a área da figura.*

Por outro lado, também foram observados erros e omissões, que interpretamos como indícios da mobilização de teoremas-em-ação errôneos. É o caso do uso do critério de comparação de comprimentos da figura para comparar suas áreas ou o fato de não identificar que certa figura tem área menor que outra porque não é possível obter inclusão de uma figura em outra, sem realizar uma decomposição e recomposição. Pode-se ressaltar que boa parte dos procedimentos empregados pelos alunos foi apoiada na relação entre os aspectos geométricos e da grandeza área, sendo o numérico secundário. Tanto no ambiente materiais manipulativos como no Apprenti Géomètre 2 a possibilidade de deslocar as figuras, decompor e recompor foi um elemento importante tanto para deixar os aspectos numéricos em segundo plano como para fortalecer elementos conceituais importantes na resolução da tarefa como a aditividade das áreas e a invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição. Esses ambientes oferecem ferramentas que permitem superar limitações do ambiente papel e lápis, no qual as ações só podem ser feitas mentalmente.

8. Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BALDINI, L. A. Ferreira. **Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica**. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longuers et les aires au collège.** 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.

BELLEMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental.** Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages.** Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.** Educational Studies in Mathematics.v.20, n.4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área, como Grandeza, no Ensino Fundamental.** 2002. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação).- Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental:** estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) -. Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 1. Ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GOBBI, J.A. **Do livro didático ao software geogebra:** a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental. 2012. 135f. Dissertação (Curso de Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)-Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2012.

MELO, M.A.P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5º a 8º série do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro.** 2003. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Pós- graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2003.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada:** influência de algumas variáveis. 2010.141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

SILVA, A.D.P.R. da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica:** um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental. 2016. 315f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.