

O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA DESMISTIFICAR A “FÓRMULA DE BHASKARA”

Maritza Camilli Almeida Brito
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
mayzinha0070@hotmail.com

Welma Oliveira Heisig
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
alexwelma@yahoo.com.br

Resumo:

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de apresentar e discutir uma oficina sobre a desmistificação da “Fórmula de Bhaskara” usando como recurso a Tendência da Educação Matemática História da Matemática. A criação desta monitoria se deu pela dificuldade e equívoco apresentados por alunos que observamos, de diferentes modalidades de ensino, e pela análise de alguns livros didáticos também feita por nós. Vivenciamos e constatamos estas dificuldades enfaticamente em uma sala do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Polivalente, localizado na cidade de Vitória da Conquista, Bahia. Este contato foi proporcionado pelo Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), em parceria com a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. O trabalho conta com uma breve contextualização da tendência História da Matemática e da relação existente entre as Equações Quadráticas e a Fórmula de Bhaskara, sendo finalizado com a monitoria.

Palavras-chave: Tendência da Educação Matemática; História da Matemática; Equações Quadráticas; Fórmula de Bhaskara.

1. Introdução

Este trabalho resulta-se da apreensão das dificuldades e equívocos percebidos em alguns alunos da educação básica, baseada em nossa experiência tanto como alunas quanto como graduandas do curso de Licenciatura em Matemática. Essas percepções se deram especialmente em um Colégio Estadual de Vitória da Conquista e foram proporcionadas pelo contato direto dos alunos com o conteúdo que envolve as equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara. Através destes comportamentos iniciamos uma pesquisa mais aprofundada a cerca deste conteúdo, o que nos resultou no encontro da Tendência História da Matemática como estratégia para facilitar a abordagem do mesmo de forma mais clara e objetiva.

Para diagnosticar estes problemas encontrados, optamos por montar uma oficina que tem como recurso a Tendência da Educação Matemática História da Matemática com o objetivo de levar um pouco da contextualização histórica do conteúdo e sanar as dificuldades e controversas apresentadas pelos alunos. O uso desta tendência se deu pelo fato da mesma realçar que a matemática possui um processo histórico, que é uma construção humana,

surgida pelas necessidades práticas desenvolvidas para atender a determinadas demandas da sociedade. E sobre o uso desta tendência o autor Groenwald (2004, p.47) afirma que:

O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. O conhecimento da história da matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda sua essência.

Além deste recurso, fomos orientadas por algumas pesquisas teóricas e tivemos como auxílio um vídeo. Só após isso pudemos aplicar a monitoria sobre as Equações Quadráticas e a desmistificação da “Fórmula de Bhaskara” em uma sala do terceiro ano do Ensino Médio.

2. História da Matemática

A História da Matemática é um instrumento importantíssimo para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, pois ela contribui tanto para a construção do conhecimento quanto para a evolução dos conceitos matemáticos. Esta tendência culminou-se de forma mais alastrante em 1999 com a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHM. Infelizmente não é constante o seu uso em sala de aula e nos livros didáticos, isso porque existe uma série de fatores que ainda impossibilitam tanto professores quanto autores recorrerem a esta tendência, sendo estes fatores: a necessidade de ser feita mais pesquisas e leituras, o aperfeiçoamento da formação docente, sensibilidade dos autores para escolher histórias que envolvam os conteúdos, a reformulação da grade curricular de algumas instituições de ensino para a implantação e valorização desta tendência nos cursos de licenciatura para que assim os docentes se sintam motivados a implantarem este recurso em suas metodologias de ensino.

Sabemos como a disciplina de matemática é considerada por muitos uma hidra saída da mitologia grega, que ao se cortar uma cabeça nasce outras duas no lugar. Então é preciso amenizar essas dificuldades e reduzir o fracasso escolar nesta disciplina, motivando os alunos de alguma forma. Assim, a utilização da História da Matemática passa a ser uma ferramenta consideravelmente eficiente que modela a realidade. Ao contextualizarmos o conteúdo matemático deixamos transparecer as necessidades da humanidade em desenvolver aqueles estudos; para que eles servem; a sua verdadeira importância e também sua aplicação que é constantemente questionada pelos discentes. Outra vantagem do uso desta tendência é a

construção de pontes para a interdisciplinaridade, é possível criar ligações com a História, com a Filosofia, com a Geografia entre outras disciplinas.

O professor não precisa ser um grande conhecedor da História da Matemática para utilizar desta ferramenta, ele pode enriquecer suas aulas com a trajetória da construção do conceito matemático trabalhado, sem que essa ferramenta se torne uma obrigação. Compartilhar curiosidades que conheça e contextos históricos motivadores podem elevar os padrões educacionais e aflorar o interesse dos discentes. Contudo a falta desta tendência acaba por tornar a matemática uma disciplina com pouco significado, porém repleta de símbolos que parecem saídos de uma cartola como passe de mágica.

3. Equações Quadráticas e a Fórmula de Bhaskara

A maioria dos alunos se surpreende quando dizemos que as equações quadráticas possuem uma longa história envolvendo muitos matemáticos importantes, de diversas civilizações, que se preocuparam em solucioná-las. Segundo Boyer (1974), problemas envolvendo estas equações já apareciam há mais de quatro mil anos em textos que foram escritos em placas de argila na Babilônia e em papiros no Egito. As fórmulas resolutivas criadas pelos babilônios, gregos, hindus, árabes e até mesmo italianos, entre os séculos XV e XVI para solucionar estas equações, eram por meio de palavras. Um bom tempo depois, as mesmas foram adquirindo um novo aspecto, usado atualmente, através das intervenções feitas por François Viète (1540-1603) e René Descartes (1596-1650). Para entendermos melhor, faremos um breve passeio pela verdadeira história deste conteúdo tão conhecido.

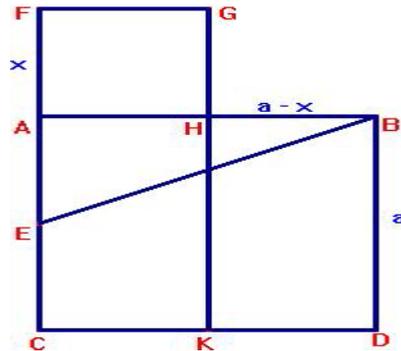
Na Babilônia, mesmo já resolvendo as equações a 4000 a.C, o primeiro registro envolvendo resolução de problemas com equações quadráticas só foi encontrado em meados de 1700 a.C, feito em uma tabua de argila com palavras. Os enunciados e resoluções de equações do segundo grau dos babilônios eram feitos mais ou menos da seguinte maneira: Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? (O que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). E as instruções para a resolução deste problema eram: Pegue a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, (0; 5 x 0; 5 = 0; 25). Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado (870; 25 = (29; 5) ²) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30), que será o valor do lado do quadrado procurado.

Um pouco mais tarde, no Egito, os primeiros indícios da existência das equações de segundo grau se deram aproximadamente em 1950 a.C, em um exemplo encontrado no Papiro de Berlim. São poucos os registros encontrados pelos historiadores envolvendo o tratamento das equações do segundo grau pelos egípcios. Um exemplo que pode ilustrar a abordagem destas equações seria: A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado. A resolução deste problema se dá mediante as seguintes instruções:

1. Tome $x = 3$; então, $y = 4$
2. Assim, $3^2 + 4^2 = 25 \times (25 \neq 100)$
3. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$
4. $10 \div 5 = 2$
5. Os lados são $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$: (Papiro de Berlim)

Já os gregos criaram um modelo geométrico para estudar as soluções das equações quadráticas. Os mesmos, assim como os babilônios, achavam que estaria longe de se trabalhar com a matemática simbólica, por este motivo sentiram a necessidade de se valerem de construções geométricas para estudar algumas equações. Foi na Grécia que a matemática demonstrativa se desenvolveu e nesse contexto podemos citar dois nomes muito importantes para a história da matemática, Pitágoras e Euclides. O primeiro, dentre muitas de suas descobertas, a mais famosa é o teorema geométrico, que por sinal leva seu nome. Não há nada que afirme o seu contato direto com as equações quadráticas, porém, há indícios de que tanto ele quanto seus discípulos resolveram equações geometricamente, tais como: $x^2 = ab$, $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ e $x^2 + b = ax$. Já o segundo, Euclides, foi responsável por desenvolver um método de aproximação geométrica, que depois foi utilizado para resolver equações quadráticas. A presença das equações se evidencia na proposição 11 do seu livro “Elementos de Euclides” que se apresenta da seguinte forma: “Dividir um segmento de reta dado de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado construído sobre a outra parte” (AABOE, 1984, p. 77). Este problema é um problema geométrico, que pede para ser encontrado o ponto H, sabendo que AB é uma reta dada, em que $AB \times HB = AH$. (FIGURA 1)

Figura 1- Resolução geométrica de uma equação do segundo grau.



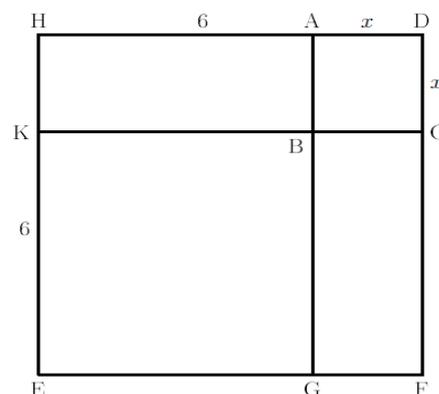
Fonte: Liliane Rose Refatti e Eleni Bisognin (2005)

O método de resolução deste exemplo é muito complicado e difícil de ser compreendido, por isso não é necessário que seja aceito.

Dos árabes, o que mais se destacou foi Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, que em 825 escreveu sua obra sobre a ciência das equações. Nesta obra, ele apresenta a equação do segundo grau, sua resolução, de forma retórica, além de uma validação geométrica denominada método de completar quadrados, método diferente dos utilizados pelos gregos.

Figura 2 – Exemplo de problema que envolve equação quadrática.

Exemplo: Encontrar a solução para $x^2 + 12x = 64$.



Na figura ao lado tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = x$ e que $\overline{AH} = \overline{CF} = 6$. Conseqüentemente a área do quadrado $ABCD$ é dada por $A_q = x^2$ e a área dos retângulos $HKBA$ e $BGFC$ é dada por $A_r = 6x$. A soma dessas áreas é $x^2 + 6x + 6x = x^2 + 12x$. Completa-se o quadrado $HEFD$ com o quadrado $KEGB$, cuja área é dada por $A'_q = 36$. A área do quadrado $HEFD$ é dada por $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36 = 64 + 36 = 100$, o que resulta $x = 4$.

Fonte: Hermes Antônio Pedroso (2010)

Outro povo que teve bastante significância para o desenvolvimento das equações quadráticas foram os hindus. Os mesmos tiveram uma participação fundamental para a resolução da equação quadrática, e um de seus feitos foi a introdução de número negativos nos coeficientes desta equação e também o uso do zero, que até então não tinha sido utilizado. Os personagens que se mais destacaram foram: Āryabhata (476-550), Brahmagupta (598-665?) e Bhaskara (1114- 1185).

O primeiro possui alguns problemas matemáticos que envolvem equações do segundo grau, porém não apresenta fórmulas resolutivas para elas. Já o segundo, fez um estudo mais completo sobre as equações do segundo grau voltado para a fórmula escrita, hoje conhecida como $ax^2 + bx = c$, além de ser o primeiro matemático a usar os números negativos e o número zero como um elemento de cálculo. Algum tempo depois surge Bhaskara, conhecido como “sábio”, nome que ficou bastante conhecido. Bhaskara era professor; matemático; astrólogo e astrônomo, e realizou grandes feitos para a matemática, sendo um deles a solução geral da equação $x^2 = 1 + py^2$ e de várias outras equações diofantinas. Escreveu seis trabalhos, mas os que mais se destacaram foram Lilavati (nome de sua filha e que contém 278 versos) e Vija-Ganita, ambos se tratavam de equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas, regras de três, dentre outros. Curiosamente, a fórmula utilizada por Bhaskara, ficou conhecida aqui no Brasil como “fórmula de Bhaskara” em praticamente todos os livros didáticos e até mesmo nas salas de aula através do professores.

A partir de então, a Matemática ganha um forte crescimento na Europa, com a presença dos matemáticos: Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, responsável por introduzir no mundo europeu o sistema de numeração hindu-arábico, utilizando o número zero como raiz de equações, o método do cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadrada e cúbica e a resolução de equações lineares e quadráticas, e, um pouco depois o francês François Viète (1540- 1603), advogado que nas horas vagas se dedicava a matemática. O surgimento da Álgebra simbólica pode ser dado graças a ele. Viète começou a utilizar uma vogal para substituir uma quantidade desconhecida e uma consoante para representar um número desconhecido, e foi assim que surgiu a fórmula conhecida e usada por nós até hoje, fórmula esta que erroneamente aqui no Brasil se atribui a Bhaskara. Erroneamente pelo fato de até o final do século XVI não existir o uso de nenhum tipo de fórmula para a resolução das equações quadráticas, justamente porque não eram utilizadas letras para representar coeficientes. Esta fórmula só veio existir 400 anos após a morte do matemático Bhaskara.

Para ilustrarmos melhor, será descrito o método utilizado por Viète para resolver a equação quadrática, segundo Refatti e Bisognin (2005): Considerando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, consideremos $x = u + v$, sendo u e v variáveis auxiliares, têm-se:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0$$

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Ao resolver essa igualdade como uma equação na variável v , tem se

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0 \quad (1)$$

Anulando o coeficiente de v acha-se os valores de u , escolhendo $u = (-b \div 2a)$. Ao substituir este valor de u na equação (1) obtém-se:

$$av^2 + a(-b \div 2a)^2 + b(-b \div 2a) + c = 0 \quad (2)$$

manipulando o resultado da equação (2), encontra-se $y = (b^2 - 4ac) \div 4a^2$. Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, $v = \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) \div 2a}$. Entretanto, se $x = u + v$, resulta $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) \div 2a$, a qual é conhecida como “fórmula de Bhaskara” para determinar a raiz.

4. Apresentação e Discussão da oficina

Partido desses pressupostos, onde pudemos analisar a rica história que este conteúdo possui e a deficiência da mesma nas salas de aula, a turma escolhida por nós, para o desenvolvimento da oficina, que tem como finalidade contribuir para a aprendizagem dos alunos, foi à turma E do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Polivalente de Vitória da Conquista, com realização no 2º semestre do ano de 2015 em aproximadamente uma hora e vinte minutos. O objetivo foi desenvolver uma atividade que seria aplicada para enriquecer o conhecimento histórico das equações quadráticas e desmistificar a “Fórmula de Bhaskara”.

A atividade se deu em três etapas, na primeira etapa foi utilizado um vídeo de aproximadamente doze minutos, disponível no site dedicado a vídeos, o Youtube, intitulado “Esse tal de Bhaskara”, resultado de uma parceria entre a Fundação Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, pelo Ministério da Ciência e Tecnologia, pelo Ministério da Educação juntamente com a UNICAMP e o Instituto de Matemática, Estatística

e Computação Científica. Antes da apresentação do vídeo os alunos aos serem questionados a respeito do contexto histórico que fundamentou o surgimento da fórmula resolvente das equações quadráticas, afirmaram não conhecer nem a história e tampouco as equações quadráticas. Só depois de fazermos relações com a “Fórmula de Bhaskara” é que os alunos reconheceram o conteúdo, mas mesmo assim continuaram afirmando não conhecerem o contexto histórico.

O vídeo¹ traz uma discussão sobre a importância da utilização da História da Matemática como metodologia de ensino, mais especificamente sobre o contexto histórico das equações quadráticas, que já eram solucionadas por volta de 1700 A.C. pelos Mesopotâmios como se fosse uma receita, passando por uma perspectiva mais geométrica desenvolvida pelos Gregos entre 500 e 300 anos A.C., já os Árabes usavam o método de completar quadrados, também geométrico, para resolver os mesmos problemas cerca de 500 anos depois dos Gregos. Quase três mil anos depois dos Mesopotâmios, no século XII, os Hindus, mais precisamente Bhaskara, fez também a sua contribuição utilizando um método parecido com as receitas mesopotâmicas. Somente mil anos depois da invenção do método Árabe o francês François Viète (1540 – 1603) se preocupou em facilitar a resolução desses problemas desenvolvendo a notação algébrica conhecida erroneamente hoje no Brasil como “Fórmula de Bhaskara” devido a um equívoco por volta de 1960 no período da Matemática Moderna.

Ao enveredarmos por esse caminho entendemos que pouco se fala sobre a história dos conteúdos matemáticos em sala de aula e essa foi a principal razão por optarmos por essa Tendência na Educação Matemática. A história permite aos alunos entenderem quando, como e porque surgiu aquele conceito, permite ainda o despertar do interesse dos alunos por aquele conteúdo, visto que o surgimento dos conteúdos matemáticos está cercado de interessantes momentos da humanidade. Ao conhecer a história, os alunos perceberam o desenvolvimento do conteúdo estudado, todas as tentativas, erros e contribuições ao decorrer do tempo.

¹ <https://www.youtube.com/watch?v=dw6wD5bP5vw>

Figura 3 – Aplicação da monitoria com os alunos em grupo.

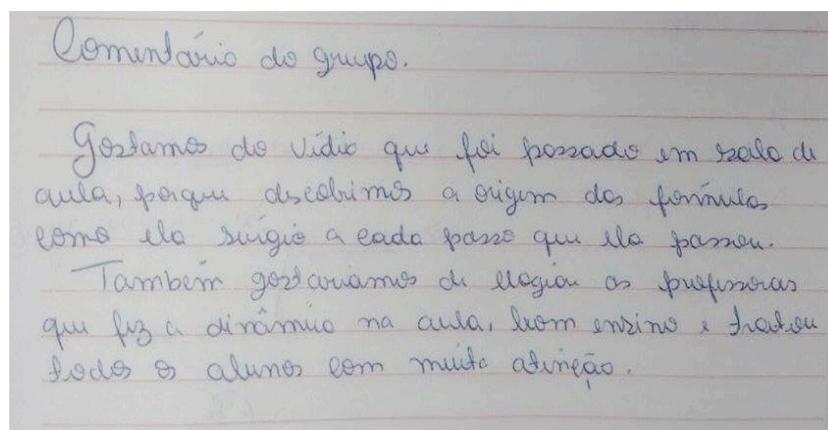


Fonte: Autoras.

Na segunda etapa, a turma que contava com vinte alunos, foi dividida em equipes e depois de uma breve revisão sobre o conteúdo, responderam as equações que surgiram no vídeo. Apesar de não ser esse o principal foco da atividade realizada, nos foi possível identificar e sanar algumas dúvidas que surgiram no desenrolar da atividade.

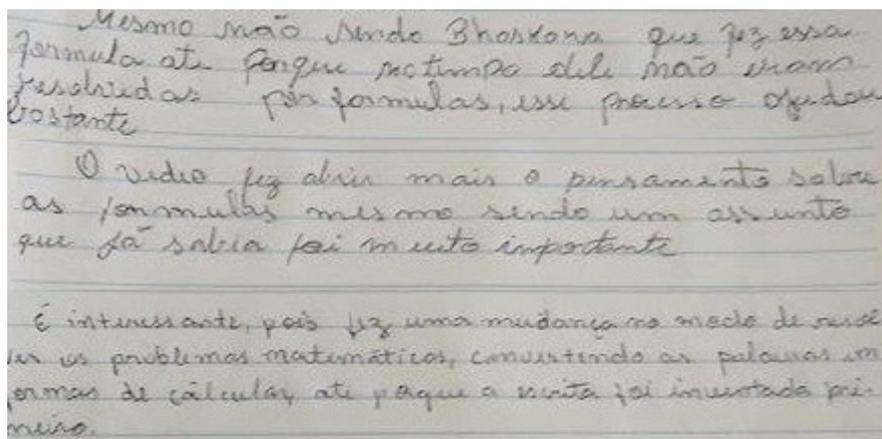
Finalmente na terceira etapa foi solicitada aos alunos uma comparação sobre como foi aprender o conteúdo sem o contexto histórico e como seria no ponto de vista deles se esse conteúdo fosse apresentado contextualizado. Nesta etapa as equipes foram convidadas a escrever um parágrafo com essa informação.

Figura 4 – Comentário de um dos grupos sobre a monitoria.



Fonte: Autoras.

Figura 5 – Comentário de cada integrante de um dos grupos sobre a monitoria.



Fonte: Autoras.

Os resultados dessa experiência comprovaram como já esperávamos, que o professor que contextualiza o conteúdo com a história faz uso de uma importante ferramenta metodológica, pois a matemática não deve ser desvinculada das atividades humanas. Segundo D’Ambrósio (1999, p.97),

Desvincular a matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na educação da matemática. Em toda a evolução humana, as ideias matemáticas vêm definindo estratégia de ação para lidar com o ambiente, criando e desenvolvendo instrumento para esse fim e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para própria existência.

Nesse viés, a história da matemática favorece uma compreensão mais lúcida da relação dessa ciência com as suas implicações no mundo. Os alunos foram participativos e se mostraram motivados pela história e enfim perceberam que o conteúdo estudado não surgiu do nada e foi possível responder a tão famosa pergunta: “para que serve isso?”. Lembramos que a História deve ser associada ao conteúdo e não só apresentada como uma simples “contação de estória”, pois dessa forma não servirá para os efeitos pedagógicos esperados.

5. Considerações Finais

Com esta experiência comprovamos que qualquer estudante sabe o que é a fórmula de Bhaskara, mas poucos sabem que esta fórmula para resolução das equações quadráticas nada tem a ver com o famoso matemático. E entendemos que este é um problema que precisa ser resolvido.

Se a utilização da Tendência História da Matemática tivesse um uso mais recorrente, provavelmente não teríamos passado por tantos anos sacramentando uma mentira a tal ponto

que ela se tornou uma verdade absoluta em nosso meio escolar. Cabe agora aos atuais e futuros discentes corrigirem este erro. Apenas um único aspecto como esse equívoco, já nos permite mostrar a grande importância do aspecto histórico no ensino/aprendizagem da matemática.

Não queremos, contudo, concluir que a História da Matemática é a solução de todos os males no ensino desta disciplina, mas sim evidenciarmos o quanto ela é importante como sabiamente afirmou o historiador René Rémond [s.d] – “É impossível compreender o seu lugar para quem ignora todo o passado; ser uma pessoa contemporânea é também ter consciência das heranças, consentidas ou contestadas.”

6. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), que nos permitiu o contato com o colégio. Agradecer a direção do Colégio Estadual Polivalente de Vitória da Conquista – Bahia, por ter nos dado a oportunidade. Agradecer também a professora regente da turma envolvida na monitoria, professora Angélica de Santana, que nos concedeu sua aula para a realização da atividade e ainda colaborou para o registro da mesma, através de vídeos e fotos. Sua participação foi de fundamental importância para a realização desta atividade. Gostaríamos também de reconhecer a importância da colaboração da Ms. Ana Paula Perovano na correção deste trabalho. E por fim agradecer a turma, por ter nos recebido de forma agradável e acolhedora, sendo ativos e participativos durante toda a atividade, mostrando respeito, interesse, desempenho e rendimento.

7. Referências

D'AMBRÓSIO, U., A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97–115.

GROENWALD, C. L.S., **Perspectivas em Educação Matemática**. Canoas: Ulbra, 2004.

FRAGOSO, W. C., **Uma Abordagem Histórica da Equação do 2º grau**. In. Revista do Professor de Matemática, nº43, 2000, p. 20-25.

PEDROSO, H. A., **Uma breve história da equação do 2º grau.** In: Revista eletrônica de Matemática, nº 2, 2010.

PITOMBEIRA, J.B., **Revisitando uma velha conhecida.** Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2016, 10:42:12.

SANTOS, M.J., **A Fórmula de Bhaskara - História da Matemática.** Disponível em: <<http://professor-marciosantos.blogspot.com.br/2009/06/formula-de-baskhara-historiada.html>>. Acesso em: 01 fev. 2016, 03:04:08.

SIQUEIRA, R.A.N.. **Tendências da educação matemática na formação de professores / Regiane Aparecida Nunes de Siqueira.** Ponta Grossa: [s.n.], 2007.

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Pernambuco. **Anais... HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA UMA TENDÊNCIA NECESSÁRIA.** Pernambuco: 2006