UM ESTUDO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DE TAREFAS INVESTIGATIVAS E A TORRE DE HANÓI

Suzana Domingues da Silva
Universidade Estadual do Paraná – campus de Campo Mourão
Suzana369@hotmail.com

Valdete dos Santos Coqueiro
Universidade Estadual do Paraná – campus de Campo Mourão
vcoqueiro@yahoo.com.br

Resumo:
O objetivo desse trabalho foi utilizar a Torre de Hanói, juntamente com tarefas investigativas, para que os alunos construam uma função exponencial que expresse o número mínimo de movimentos, conforme a quantidade de discos. As tarefas investigativas foram aplicadas com alunos de um 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Paraná. Este trabalho, que se respalda nos estudos teóricos de Rêgo e Rêgo (2006), Turrioni e Perez (2006), Castro (2009), Ponte *et al* (2009) dentre outros, é de natureza qualitativa com características descritivas. Para a coleta de dados, utilizamos a produção escrita dos sujeitos envolvidos na pesquisa e também observações e anotações realizadas. Por meio dessa pesquisa, foi possível verificar a importância do jogo juntamente com as tarefas investigativas para elaboração de estratégias e de modelos matemáticos, assim como, para desenvolver o raciocínio analítico dos alunos em suas resoluções.
Palavras-chave: Educação Matemática; Função Exponencial; Tarefas Investigativas; Torre de Hanói;

1. Introdução

O interesse em realizar este trabalho utilizando a Torre de Hanói, surgiu devido a oportunidade de desenvolver um Projeto de Iniciação Científica (PIC), orientado pela segunda autora deste texto. A proposta do trabalho foi de realizar estudos teóricos e investigativos a respeito dos materiais que compõem o Laboratório de Matemática do Programa Brasil Profissionalizado. Este programa foi criado em 2007 pelo Governo Federal, com o objetivo de integrar o conhecimento do Ensino Médio à prática (BRASIL, s-d).

Dos materiais estudados, um deles foi a Torre de Hanói e, por meio de pesquisas, aprendemos conteúdos e atividades que poderiam ser desenvolvidas com esse material. No entanto, até o momento, estes estudos estavam apenas na teoria. Deste modo, surgiu o interesse em utilizar a Torre de Hanói para possibilitar a relação entre teoria e prática, tão fundamental ao ensino, o que foi concretizado por meio do trabalho de conclusão de curso da graduação em Matemática. Além do interesse pelo material, concordamos com as pesquisas de Turrioni e Perez (2006, p. 61), que ressaltam que os materiais didáticos são de suma importância na aprendizagem, pois "facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos".

Também optamos por contemplar, nesse trabalho, a Investigação Matemática que, segundo Rocha e Ponte (2006, p.31), "envolve formular questões, propor conjecturas, realizar testes para validar ou rejeitar essas conjecturas, avaliar da sua plausibilidade, encontrar provas da sua correção e levantar novas questões para investigar".

Nesta perspectiva, este trabalho teve por objetivo utilizar o jogo Torre de Hanói, juntamente com tarefas investigativas, para que os alunos construam uma função exponencial que expresse o menor número de movimentos que consistem nas transferências dos discos de uma haste a outra, conforme a quantidade de discos durante a partida.

2. Algumas considerações sobre Material Didático e Investigação Matemática

O processo de ensino da matemática consiste em criar estratégias que proporcionem ao aluno atribuir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, analisar, discutir e justificar (PARANÁ, 2008). Uma das estratégias que pode proporcionar esse significado é a utilização de material manipulável. Segundo Rêgo e Rêgo (2006, p. 43), o material manipulável é de suma importância, pois, ao ser utilizado de maneira apropriada, "os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para quê aprender matemática, vencendo os mitos e os preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos". Dessa forma, utilizar material manipulável em sala de aula pode promover um ambiente de investigação, favorecendo discussões sobre as relações matemáticas obtidas e contribuindo para que os alunos reflitam, levantem uma problemática e formulem soluções.

No entanto, apenas o material manipulável não garante o aprendizado, sendo necessário um encaminhamento metodológico do professor, como afirmam Fiorentini e Miorim (1990, p.6), ao afirmarem que "[...] nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina". Assim, optamos em contemplar neste trabalho, a Investigação Matemática. Por meio das tarefas investigativas que compõem essa tendência, acredito que elas podem propiciar aos alunos significados às relações obtidas por eles na exploração do material.

Nesta perspectiva de Investigação Matemática, Tomazetto e Nacarato (2009) afirmam que, investigar é descobrir algo novo, encontrar soluções para as questões que não se conhece, é permitir ao aluno, no ato da exploração, o estabelecimento de relações, conjecturas e a busca por validá-las.

Segundo Castro (2004), as aulas investigativas referem-se firmemente a tarefa proposta aos alunos e as atividades realizadas por estes. Ainda para a mesma autora, há a necessidade de se diferenciar, tarefa e atividade, pois neste contexto de investigação eles assumem significados distintos: A *tarefa* é a proposta de trabalho que o professor apresenta aos alunos, e a partir do momento em que os alunos aceitam a proposta do professor, a tarefa passa ser uma *atividade* matemática, ou seja, é a ação que realizam para resolver a tarefa, é a execução da investigação matemática.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) destacam que as atividades de investigação consistem em três fases, que podem ser concretizadas de diversas formas. Na primeira fase, o professor deve evidenciar qual é a proposta de ensino e como serão realizadas as tarefas. Na segunda fase, o professor passa a acompanhar o trabalho deles de modo a oferecer o apoio necessário. E por último, ao final de uma investigação, o professor propõe uma discussão sobre o trabalho realizado. Este é um momento importante, no qual é feita a partilha de conhecimentos dos quais os alunos percebem a validação e justificação de suas conjecturas matemáticas.

3. Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um jogo constituído por uma base contendo três hastes e discos de diâmetros diferentes com uma perfuração no centro de cada disco. O objetivo desse jogo é transferir todos os discos de uma haste para outra. Vence o jogo quem conseguir transportar todos os discos no menor número de movimentos possível, sendo que só é permitido movimentar um disco de cada vez e de modo a não colocar um disco maior sobre um disco menor.

A Tabela 1 mostra o número mínimo de movimentos para transferir $1, 2, \ldots 5$ discos. Ao observar esta tabela, percebe-se que o número mínimo de movimentos em relação à quantidade de disco pode ser escrito por meio da seguinte relação: $M(n) = 2^n - 1$, em que M é o número de movimentos e n é o número de discos. A demonstração por indução finita para esta relação pode ser encontrada em (WATANABE,1986).

Tabela 1: Número de discos e o número mínimo de movimentos

Nº de discos	1	2	3	4	5
Nº mínimo de movimentos	1	3	7	15	31

Fonte: Autora.

A Torre de Hanói pode ser trabalhada em todos os anos escolares da Educação Básica, desde que se respeite os objetivos de cada nível. Na pré-escola, pode ser trabalhada da seguinte forma: separar as cores e tamanhos dos discos, propiciando o desenvolvimento da coordenação motora e a identificação das formas em ordem crescente e decrescente. Já no Ensino Fundamental II, propicia ao aluno compreender as potências de base 2, o processo de construção da linguagem matemática, o conceito de variáveis e o reconhecimento das potências como multiplicação de mesmo fator e a radiciação como sua operação inversa. E no Ensino Médio, proporciona ao aluno o entendimento do conceito de Sequência Numérica, Progressão Geométrica e Funções Exponenciais. Além desses conceitos matemáticos, a Torre de Hanói pode desenvolver o raciocínio lógico, indutivo e cognitivo dos jogadores a partir de estratégias tomadas por eles. A Torre de Hanói utilizada neste trabalho, é do Laboratório de Matemática do Colégio Estadual de Campo Mourão – E. F. M. P. N. mostrada na Figura 1, com 10 discos de diâmetros diferentes.

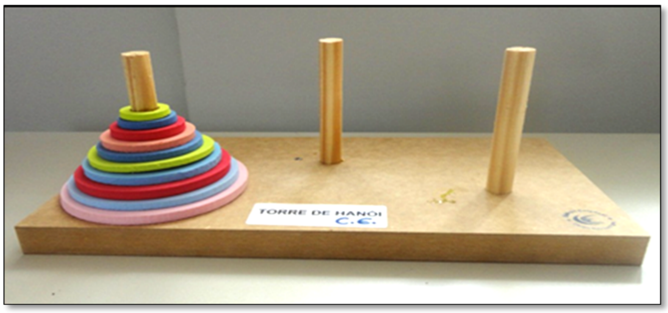

Figura 1: Torre de Hanói
Fonte: Laboratório Brasil Profissionalizado

4. Procedimentos Metodológicos e Análise dos Dados

Este relato de experiência se caracteriza como trabalho qualitativo, de cunho interpretativo, em que desejamos compreender as estratégias de resoluções dos alunos, bem como analisar suas resoluções frente ao objetivo traçado. Para a coleta de dados, utilizamos a produção escrita dos sujeitos envolvidos na pesquisa e também observações e anotações

ISSN 2178-034X

realizadas. A turma escolhida para a realização das tarefas investigativas foi um 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR – *Campus* de Campo Mourão. Escolhemos essa turma por se tratar de futuros professores de Matemática, para que, dessa forma, eles pudessem conhecer o material, contribuindo, assim, na formação acadêmica inicial e possibilitando que, futuramente, esse material, pudesse ser inserido em suas aulas na Rede Básica de Ensino.

As tarefas, de maneira geral, consistiam em instigar os alunos, após a manipulação da Torre de Hanói, a investigarem uma relação matemática que expressasse a quantidade mínima de movimentos, conforme a quantidade de discos. Este trabalho foi realizado no horário normal de aula, no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) da UNESPAR/*Campus* de Campo Mourão, e em um único encontro, totalizando três horas/aulas, contando com a participação de 11 alunos. Dos onze alunos, formaram-se um trio e quatro duplas, nomeados de T1, D1, D2, D3 e D4.

Após terem se organizado, distribuímos uma Torre de Hanói para cada participante e na sequencia fizemos uma apresentação do material e como jogá-lo. Feito isso, entregamos a primeira tarefa, com o seguinte enunciado: "*Movimente o número de discos de uma haste para a outra conforme as regras do jogo e anote a quantidade de movimentos que você realizou na Tabela 2*". O objetivo da tarefa era deixar os alunos jogarem livremente e se familiarizarem com o material.

Como podemos observar na Tabela 2, os alunos tiveram divergências em alguns resultados. No entanto, para um e dois discos, eles chegaram à mesma resposta. Podemos observar ainda, que a dupla D1 não completou toda tabela, pois, tinham observado que cada vez que jogavam, a quantidade de movimentos diminuía. Assim, a dupla estava tentando encontrar o número mínimo de movimentos para cinco discos. Como a dupla já havia jogado, pedimos que entregasse a tarefa, mesmo sem completá-la. Vale ressaltar que, até este momento, não tinha sido dito o objetivo do jogo, que é transportar a pilha de discos de uma haste para a outra com o menor número de movimentos possíveis.

Tabela 2: Quantidade de movimentos realizados pelos grupos

Número de Discos	Quantidade de Movimentos				
	T1	D1	D2	D3	D4
1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3
3	7	7	11	7	7
4	15	15	19	15	15
5		31	33	31	41

Fonte: T1, D1, D2, D3 e D4

Após terem terminado, fizemos na lousa a tabela da primeira tarefa, colocando o resultado de cada grupo conforme eles nos informavam. E, de acordo com os resultados no quadro, questionamos os alunos se poderia haver uma quantidade mínima de movimentos para cada número de discos. Como eles observaram que alguns valores estavam diferentes, eles responderam que existia sim uma quantidade mínima, porém não sabiam qual era e nem qual o melhor caminho para encontrá-la. Até o momento, os alunos apenas jogaram e manipularam o material, com exceção do trioT1, que já conseguiu estabelecer uma relação com o objetivo do jogo.

Em seguida entregamos a tarefa 2, que constava o seguinte enunciado: "*O objetivo do jogo Torre de Hanói é movimentar os discos de uma haste para a outra utilizando o menor número possível de movimentos. Jogue novamente e tente encontrar essa quantidade mínima.*"

Nesta tarefa é apresentado o objetivo do jogo com o propósito de estimular os alunos a investigarem e explorarem o material, a fim de chegarem a quantidade mínima de movimentos, bem como estimular o raciocínio lógico na realização de suas jogadas. Nesta tarefa direcionamos a haste que deveria transportar os discos, ou seja, transportar a pilha de discos da primeira para a última haste, chamando a haste do meio de haste suporte e a última de pivô, dificultando um pouco mais a investigação e com o intuito de elaborarem alguma estratégia.

A Tabela 3 revela que a maioria dos grupos encontrou a mesma resposta, com exceção da dupla D3 que, curiosamente, na tarefa anterior, descobriu a quantidade certa para quatro e cinco discos. Pudemos analisar também, que os alunos discutiram mais em grupo, exploraram e investigaram mais o material. Neste contexto de exploração e análise do material, Turrioni e

Perez (2006) afirmam que o material manipulável é fundamental na aprendizagem, pois, além de facilitar na observação e análise, o material desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico. Ainda os mesmos autores ressaltam que o material manipulável é essencial para o ensino experimental e para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos. A seguir, na Tabela 3, temos a produção escrita dos grupos.

Tabela 3: Quantidade mínima de movimentos realizados pelos grupos

Número de Discos	**Quantidade Mínima de Movimentos**				
	T1	D1	D2	D3	D4
1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3
3	7	7	8	7	7
4	15	15	15	16	15
5	31	31	31	28	31

Fonte: T1, D1, D2, D3 e D4

Na sequência, aplicamos a terceira tarefa, a qual constava o seguinte enunciado: "*Que estratégia você utilizou para obter o número mínimo de movimentos dos discos?*" Esta tarefa tinha por objetivo verificar se os alunos tinham elaborado alguma estratégia para movimentar os discos de uma haste para outra, e qual era essa estratégia.

Na realização desta terceira tarefa, os alunos começaram a observar mais suas jogadas afim de formular uma estratégia. Os grupos D1, T1 e D4 conseguiram elaborar a seguinte estratégia para movimentar os discos com um número mínimo: se a pilha tiver quantidades ímpares de discos, o primeiro disco será transportado na haste em que se deseja colocar toda a pilha, ou seja, a que chamamos de pivô; já se a pilha de discos for par, eles deverão transportar o primeiro disco para a haste suporte. Já as duplas D2 e D3 não conseguiram elaborar uma estratégia. Durante esta tarefa, pudemos observar, pelas discussões dos alunos, as conjecturas que levantaram e os testes que faziam, até chegarem em alguma relação que fosse válida. Apesar de alguns alunos não terem conseguido encontrar uma relação, todos os grupos fizeram e discutiram a tarefa. A Figura 2 mostra a produção escrita da dupla D1.

- Quando a quantidade de discos for par, o primeiro disco deve ser colocado na haste-suporte. E quando a quantidade for ímpar, o primeiro disco deve ser colocado na extremidade oposta a inicial.

Figura 2: Produção escrita da dupla na terceira tarefa
Fonte: D1

Posteriormente, entregamos a quarta tarefa, que tinha o seguinte enunciado: "*Sabendo a quantidade mínima de movimentos para o número de discos, um, dois três, quatro e cinco, encontre o número mínimo de movimentos para seis, sete e oito discos. Qual procedimento você utilizou para encontrar? Anote todo o procedimento utilizado e os resultados na Tabela abaixo.*" Nesta tarefa, os alunos deveriam completar a tabela sem manipular o material. A mesma, tinha por objetivo encontrar alguma relação matemática entre a quantidade mínima de movimentos de $1, 2, \dots, 5$ discos, a fim de usarem tal relação para completar o restante da tabela, para $6, 7$ e 8 discos. Neste momento, a investigação não seria por meio do jogo, a investigação aconteceria por meio apenas da observação da regularidade dos valores da tabela. Os alunos teriam que observar e manipular os números, ou seja, a tarefa exigia um raciocínio indutivo, que é algo normal no dia a dia, mas que, de maneira geral, está pouco presente nas aulas de matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Para completar a tabela as duplas D1 e D2 observaram que a quantidade mínima de movimentos crescia de forma exponencial. Elas perceberam que os valores cresciam em uma potência de base 2, ou seja, entre 1 e 3, aumenta 2, entre 3 e 7, aumenta 4 e assim por diante. Como podemos ver na produção escrita de um dos grupos na Figura 3.

Número de Discos	Quantidade Mínima de Movimentos
1	1
2	3 +2
3	7 +4
4	15 +8
5	31 +16
6	63
7	127
8	255

Tabela 1.3: Quantidade mínima de movimentos

Notamos que do disco 1 para o 2 soma-se 2 movimentos, do disco 2 para o três soma-se 4 movimentos e assim sucessivamente até encontramos o número de movimentos de oito discos. E depois, conseguimos notar que trabalhando com a potência na base 2 elevado ao número de discos e subtraindo 1, seria o nº de movimentos.

Figura 3: Produção da dupla na quarta tarefa
Fonte: D2

ISSN 2178-034X

Já os grupos T1, D3 e D4, viram outra regularidade. Observaram que a quantidade mínima de movimentos é o dobro da quantidade anterior de movimentos mais 1. Conforme a produção escrita do grupo T1 mostrada na Figura 4.

Número de Discos	Quantidade Mínima de Movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

Tabela 1.3: Quantidade mínima de movimentos

Para encontrar, nós calculamos o dobro da etapa anterior mais 1.

Figura 4: Produção do grupo na quarta tarefa
Fonte: T1

Por fim, entregamos a quinta tarefa, contendo o seguinte enunciado: "*Tente encontrar um modelo matemático que expresse a quantidade mínima de movimentos conforme a variação dos discos (sem recorrerem a quantidade anterior de discos)*".

Nesta tarefa, as duplas D1, D2 e D4 encontraram um modelo descrito por uma função exponencial, ou seja, $2^n - 1$, em que n é o número de discos. As duplas D1 e D2, na tarefa anterior, já haviam relacionado à função exponencial, no entanto a dupla D4 ainda não e, no momento desta tarefa, elas investigaram ainda mais as regularidades dos números e perceberam que a quantidade mínima de movimentos pode ser descrita por uma função exponencial, a Figura 5 mostra a produção escrita da dupla D1.

$2^n - 1$

n= número de discos

Figura 5: Produção escrita da dupla na quinta tarefa
Fonte: D1

Já os grupos T1 e D3, encontraram um modelo matemático descrito pela quantidade anterior de movimentos, mais um, ou seja, $2n + 1$, em que n é a quantidade anterior de movimentos, descrito por uma função afim, conforme podemos ver na Figura 6, a produção escrita da dupla D3. Este modelo depende da quantidade anterior de movimentos e não em relação ao número de discos, dessa forma, para saber a quantidade mínima de movimentos, por exemplo, para mil discos, teria que calcular um por um até chegar em novecentos e noventa e nove; logo, seria inviável esse modelo.

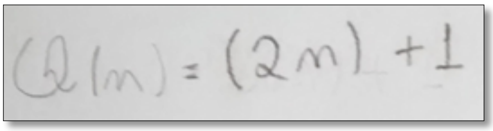

Figura 6: Produção escrita da dupla na quinta tarefa
Fonte: D3

Depois de terem concluído esta tarefa, escrevemos os resultados que eles obtiveram na lousa. Fizemos uma discussão a respeito dos dois modelos que encontraram, validamos os dois e concluímos que o modelo matemático ideal, seria a função exponencial. Esse momento final de discussões é uma das características da investigação matemática apresentada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), pela qual a investigação matemática, como atividade de ensino e aprendizagem, possibilita ao aluno agir como um matemático, não apenas em suas conjecturas, refutações e conclusões, mas também na apresentação dos resultados, discussões e argumentações, tanto com seus colegas, quanto com o professor. E ainda os mesmos autores enfatizam que a fase final é fundamental, pois nela os alunos desenvolvem a capacidade de se comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho.

5. Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo proporcionar aos alunos de um 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR *Campus* de Campo Mourão, contribuições a respeito do material didático, Torre de Hanói, utilizando-se de tarefas investigativas para encontrar o modelo matemático que expressasse a quantidade mínima de movimentos, atrelada a quantidade de discos, cujo modelo é representado por uma função exponencial. Com este trabalho pudemos confirmar a importância em conciliar a teoria com a prática e os benefícios de se trabalhar tanto com materiais manipuláveis, quanto com tarefas investigativas.

Com base nos relatos e nas observações durante o desenvolvimento das tarefas, pudemos perceber que os alunos, em geral, não encontraram dificuldades em compreender as regras do jogo. A Torre de Hanói despertou nos alunos a curiosidade e entusiasmo em encontrar estratégias, conceitos e métodos de resoluções, frente aos “desafios” propostos a eles. O jogo possibilitou uma aula diferenciada e dinâmica, uma vez que os alunos desenvolviam pensamentos matemáticos, brincando, além de possibilitar a aprendizagem e uma aplicação prática da função exponencial. A Torre de Hanói, também permitiu aos alunos o desenvolvimento do raciocínio lógico para realizar suas jogadas e elaborar estratégias para obter o número mínimo de movimentos.

A dinâmica deste trabalho, também, possibilitou aos alunos a interação com os colegas do grupo e a troca de ideias no desenvolvimento das tarefas. Além disso contribuiu na formação inicial dos mesmos, pois puderam conhecer e aprender a utilizar o jogo Torre de Hanói. É relevante ressaltar que somente o jogo, como qualquer outro material, não é suficiente para que se ocorra o aprendizado de conceitos matemáticos. É também necessário que o professor crie propostas de trabalho, de modo que os alunos abstraiam relações matemáticas do material. Neste sentido, as tarefas investigativas exerceram um papel importante neste trabalho, pois, por meio delas, os alunos foram norteados em relação à proposta, a fim de estabelecerem relações com a função exponencial.

6. Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Brasil Profissionalizado.** s.d. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index2.php?option=com_content&view=article&id=12325&Itemid=663>. Acesso em: 11 agosto 2015.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática**. Dissertação de Mestrado em Educação: Educação Matemática. Campinas: FE/Unicamp, 2004. Disponível em:< http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2011/matematica/maio/dissertacao_juliana_facanali_castro.pdf>. Acesso em 02 de Fevereiro de 2016.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática**. Texto extraído do Boletim da SBEM-SP, n.7, de julho-agosto de 1990. Disponível em: < http://drbassessoria.com.br/1UmareflexaosobreousodemateriaisconcretosejogosnoEnsinodaMatematica.pdf>. Acesso em: 11 de agosto de 2015.

PARANÁ, Secretária de Estado da Educação do. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

REGÔ, R. M.; REGÔ, R. G. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática**. In: LORENZATO, S. (Org.): O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p. 39- 56.

ROCHA, A; PONTE, J. P. *Aprender matemática investigando*. In: **Zetetiké: Revista de Educação Matemática** – Cempem – FE – Unicamp, Campinas, v.14, n.26, p.29-54, dez . 2006.

TOMAZETTO, M; NACARATO, A. M. *A desigualdade triangular: cenários para investigação numa sala de aula de 6ª série*. **GEPEM: Grupo de estudos e pesquisas em educação matemática da UFRRJ**, Rio de Janeiro, n.55, p.93-109, dez. 2009.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. **Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores**. In: LORENZATO, S. (Org.): O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, p. 77- 92.

WATANABE, Renate. *Vale para 1, para 2, para 3,... . Vale sempre?* In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 09, p. 32–38, 2º sem. 1986.