EXPLORANDO CURVAS PLANAS POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DA GEOMETRIA DINÂMICA: UMA EXPERIÊNCIA COM UM GRUPO DE ALUNOS

Caroline Conrado Pereira[1]
E.E.E.M. Ernesto Alves de Oliveira
caroline_conrado@ymail.com

Charles Bruno da Silva Melo[2]
E.E.E.M. Gastão Bragatti Lepage
xarlesdemelo@yahoo.com.br

Resumo:
Este trabalho apresenta um relato de uma experiência e descreve a exploração de curvas planas, nesse caso a comparação entre a parábola e a catenária, por meio da Modelagem Matemática e da Geometria Dinâmica. Considera-se que o ensino de Geometria Analítica deveria estar ligado às conversões entre as representações algébrica e geométrica, e, para facilitar esse processo, neste trabalho foi usado o GeoGebra. A aplicação do experimento ocorreu em uma escola pública no município de Santa Cruz do Sul/RS, com três alunos, e teve por objetivos construir um modelo matemático para uma curva catenária, explorar a visualização de modo dinâmico, bem como apresentar o conteúdo matemático de uma forma atraente. As atividades realizadas seguiram as etapas sugeridas por Bassanezi (2002) e Burak (2004). Conclui-se que os objetivos foram alcançados, pois o trabalho possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção de seu conhecimento.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria, Geometria Analítica; Catenária.

Introdução

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), a Geometria Analítica deve possibilitar a articulação entre a Geometria e a Álgebra, sendo que o professor deve trabalhar a compreensão de figuras geométricas por meio de equações e vice-versa, evitando memorizações de fórmulas e abandonando a simples apresentação de equações.

Conforme Eisenberg e Dreyfus (1989), “muitos conceitos e processos, na Matemática da escola, podem ser obtidos por meio de interpretações visuais, isto é, modelos visuais podem ser construídos e refletem uma grande parte da compreensão da estrutura dessa área”,

---

[1] Mestre em Ensino de Matemática e professora da Educação Básica.
[2] Mestre em Ensino de Matemática e professor da Educação Básica.

sendo, por esse motivo, um referencial importante para a prática desenvolvida num conteúdo do Ensino Médio, o qual merece estudos inovadores, como este, em Geometria Analítica.

Para favorecer a construção de modelos visuais, foi escolhido o software GeoGebra, que é um programa livre de Geometria Dinâmica, adequado à análise gráfica, pois nele se pode tanto explorar conceitos geométricos quanto algébricos. Ele permite que os alunos construam figuras e realizem investigações sobre propriedades e conceitos, manipulando objetos.

Conforme Cruz (2005), a Geometria Dinâmica é aquela que permite sua exploração por meio do movimento de figuras na tela de um computador, cujas características estabelecem condições para que o usuário (aluno) manuseie seus componentes e realize conjecturas, atendendo aos requisitos necessários para que observem regularidades.

Para isso, foi realizada uma experiência de ensino com três alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Santa Cruz do Sul/RS, no ano de 2014, com o objetivo de enfocar a diferença entre uma curva catenária e uma parábola por meio da Modelagem Matemática.

Para a análise dos dados e interpretação dos resultados, foi utilizada a Modelagem Matemática, segundo as etapas sugeridas por Bassanezi (2002) e Burak (2004). Os dados foram coletados a partir das estratégias utilizadas pelos alunos nas soluções apresentadas por eles durante o desenvolvimento das atividades e dos registros dos questionamentos e discussões realizados em sala de aula.

1. Geometria Analítica e curvas planas no Ensino Médio

Conforme Lehmann (1974), um dos principais objetivos da Geometria Analítica é o estudo das propriedades de várias curvas. O estudo das curvas na escola básica tem início no 9º ano do Ensino Fundamental, quando os alunos têm o primeiro contato com o estudo das funções polinomiais de primeiro e segundo grau, intensificando-se no primeiro ano do Ensino Médio.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2006), propõem quatro unidades temáticas para o estudo da Geometria no Ensino Médio: Geometria Espacial, Geometria Plana, Geometria Métrica e Geometria Analítica.

Os conteúdos e habilidades propostos pelo PCNEM em Geometria Analítica são

> representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras. Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas

> geométricos. Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características. Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa. Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p. 125).

De acordo com Eves (2004), a Geometria Analítica concebida por Descartes e Fermat estuda o ponto e a reta no plano, sendo que, para um ponto, está associado um par ordenado e, permitindo que, para cada curva no plano, esteja associada uma equação bem definida. As ideias fundamentais dessa geometria residem na conversão da análise geométrica para uma análise algébrica. Para o autor:

> antes da Geometria Analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos.René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. (EVES, 2004, p. 383).

A Geometria Analítica estuda representações no plano cartesiano e equações algébricas, e essas são estudadas de maneira mais aprofundada no Ensino Médio, momento em que os alunos trabalham com as funções polinomiais do 2º grau, na resolução de situações-problema, envolvendo principalmente construção de modelos matemáticos para expressar a área de uma região após ser ampliada. Além disso, aplica-se a Geometria Analítica à determinação de trajetórias de um objeto em um lançamento, as quais são semelhantes a uma parábola.

De acordo com os PCNEM, a unidade de Geometria Analítica tem como principal objetivo proporcionar ao aluno uma visão algébrica dos elementos geométricos, em que ele tenha oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações ou inequações. Também, oportuniza o aluno conhecer como o pensamento matemático do século XVII deu origem ao cartesianismo que transformou toda a história e a ciência.

2. A curva catenária

A partir da leitura de um recorte da monografia de Sirlene Resende de Faria (2011), buscou-se um pequeno histórico da curva catenária, que é descrita a seguir.

A catenária, palavra que vem do latim *catena* e significa corrente, é uma curva descrita por um cabo suspenso por suas extremidades, submetido apenas à força da gravidade. Esta curva foi proposta por Galileu Galilei como a representação de uma parábola.

Alguns matemáticos refutaram a ideia de Galileu, tendo sido um dos primeiros o matemático e físico holandês Christhiaan Huygens, que, no ano de 1647, mostrou, com argumentos físicos, que a curva não era uma parábola, porém não demonstrou sua fórmula.

O matemático Joachim Jungius, em 1669, apresentou trabalhos refutando a ideia; Jakob Bernoulli propôs um desafio aos matemáticos da época, o qual consistia em resolver o problema da catenária. Surgiram três soluções geométricas para o desafio pelos matemáticos Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz, os quais mostraram suas propriedades, mas, em nenhuma das soluções, demonstraram como conseguiram chegar à solução.

O problema da corrente suspensa foi, por muito tempo, algo a ser resolvido pelos matemáticos. As soluções que foram propostas pelos três matemáticos supracitados marcaram o fim do estilo arquimediano da Matemática e um novo sucesso para o Cálculo, pois, enquanto Huygens mostrou que o problema poderia ser resolvido pelo estilo clássico, Bernoulli e Leibniz o fizeram por meio do cálculo diferencial.

A curva catenária é muito semelhante, a olho nu, a uma parábola, porém a única maneira de distinguir uma da outra é por meio de suas equações, ou seja, a catenária é dada pela função hiperbólica, enquanto a parábola é uma função polinomial. Em Sowkowski (1994) encontra-se:

> a função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um fio flexível suspenso pelas extremidades na mesma altura [...], as linhas de telefone ou de energia elétrica podem ser distendidas entre os postes dessa maneira. A forma do fio parece sugerir uma parábola, mas é, na realidade, uma catenária. (SOWKOWSKI, 1994, p. 558).

A curva catenária pode ser representada pela função $f(x) = a.\cosh\left(\frac{x\ b}{a}\right) + c$, e a parábola, pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. No que segue, apresentam-se alguns fundamentos sobre Modelagem Matemática e sobre Geometria Dinâmica.

3. Modelagem Matemática e a Geometria Dinâmica

O objetivo do Ensino Médio, conforme com os PCNEM, em cada área do conhecimento, é desenvolver de forma combinada conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, assim como desenvolver conhecimentos mais amplos e abstratos, que contemplem uma cultura geral e uma visão do mundo.

Na área da Matemática, uma das maneiras de alcançar este objetivo é a Modelagem Matemática, "que consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devam ser interpretadas na linguagem usual" (BASSANEZI, 2002, p. 24). Esta metodologia é sugerida como uma das competências a serem alcançadas pelos alunos da educação básica, de acordo com a Matriz de Referência do Enem para a área de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2009). Duas competências, entre outras, salientam o uso da Modelagem Matemática:

Excluído:

> • Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
> • Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou tecno-científicas, usando representações algébricas.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) também sugerem o uso da Modelagem Matemática, quando propõem:

> o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. (p.07).

A Modelagem Matemática pode ser aplicada a diversas situações de ensino e aprendizagem, com intenção de desenvolver e estimular alunos e professores de Matemática a desenvolver suas habilidades como modeladores, de acordo com Bassanezi (2002).

No que segue, apresentam-se as fases da modelagem dos autores citados, segundo Bassanezi (2002) e Burak (2004): escolha do tema, levantamento de dados, formulação de problemas, construção e resolução de modelos matemáticos e discussão dos resultados, bem como, se necessário, a reformulação do modelo.

Com o propósito de facilitar a análise e a visualização pelos alunos, foi aliado ao trabalho o *software* matemático GeoGebra para verificação dos modelos matemáticos. Ele reúne ferramentas para desenvolver atividades de Geometria, Álgebra e Cálculo. É um sistema de Geometria Dinâmica, pois permite realizar construções de pontos, vetores, segmentos, retas, assim como funções e curvas, possibilitando sua modificação de forma dinâmica.

O GeoGebra é um programa adequado para o estudo da Geometria Analítica, pois facilita a análise gráfica e a exploração de conceitos algébricos, por meio das transformações geométricas.

4. Análise e desenvolvimento da atividade

Nesta seção, são descritos o desenvolvimento das etapas de Modelagem Matemática e o uso da Geometria Dinâmica. O tema foi escolhido pela professora a partir de uma disciplina cursada durante o Mestrado, cujo assunto era "Curvas Planas no Ensino Médio[3]". Os alunos, neste trabalho, serão identificados como A1, A2 e A3.

No primeiro encontro, realizado na sala de informática, os alunos leram artigos referentes à parábola e à curva catenária e assistiram a um vídeo que mostrava a importância da última na construção de pontes. Essas leituras serviram de embasamento teórico para a construção das atividades de Modelagem.

Orientados pela professora, os alunos pesquisaram sobre a função quadrática, suas propriedades e os parâmetros a, b e c. Após o estudo dessa função, os alunos observaram o comportamento da curva quando eram modificados seus parâmetros. Para isso, tiveram o apoio do GeoGebra.

No segundo momento, questionou-se os alunos se toda a curva representava uma parábola. A partir desse questionamento, os estudantes fizeram uma pesquisa sobre curvas que são semelhantes a parábolas. Assim, após essa busca, encontraram a curva catenária e registraram as diferenças existentes entre ela e a parábola.

Motivados pela pesquisa realizada, os alunos sugeriram usar uma corda, para que fossem suspensas suas duas extremidades e pudessem verificar se, de fato, a curva obtida com este material adequava-se à catenária, e não a uma parábola. A professora questionou se eles lembravam de algum lugar em que haveria uma corrente ou corda suspensa pelas extremidades, sujeitas apenas à força da gravidade, tendo sido iniciado o seguinte diálogo entre professora e alunos:

A3: - *Vamos tirar uma foto dos fios de luz, eles estão suspensos por suas extremidades*.

A1: – *"Sora", e se fôssemos no estacionamento do shopping, onde têm correntes, podemos dar uma olhada?*

Após as sugestões dos alunos, o grupo deslocou-se até o estacionamento do shopping da cidade, onde constataram que, realmente, as correntes estavam suspensas pelas

---

[3] Tema sugerido na disciplina de Fundamentos de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA).

extremidades. A professora indagou: - *E agora, como vocês farão para verificar se é uma parábola ou se é semelhante a uma catenária?*

O aluno A1 respondeu que era possível marcar no chão pontos de 20 cm em 20 cm e marcar um eixo, correspondente ao eixo *x*, e, em cada ponto desse eixo, marcar-se-ia a altura da corrente em cada um deles, o que corresponderia ao eixo y. Os outros alunos aceitaram a sugestão e, com o material que já tinham, no caso, giz e fita métrica, iniciaram seus registros (quadro 1), conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: alunos bolsistas coletando dados.

Distância horizontal em centímetros	Distância vertical em centímetros
15	62
30	57
45	49
60	43,2
75	39
90	35
105	34
120	33
135	33,2
150	35
165	38
180	43
195	49
210	55,3
225	64

Quadro 1. Dados obtidos pelo grupo.

Na sequência, foi construído um gráfico no programa Excel, para que se pudessem ajustar os pontos a fim de verificar se a curva seria uma parábola. Para isso, os alunos utilizaram a ferramenta 'inserir gráfico de dispersão' e, após, formataram uma linha de tendência polinomial do segundo grau (Figura 2).

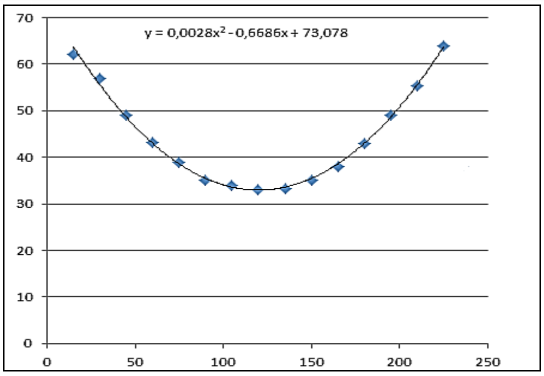

Figura 2: construção do primeiro modelo matemático.

Os alunos observaram que alguns pontos não estavam alinhados, o que, de fato, pode ser observado, pois, ao traçarem as medidas a olho nu, essas medidas não eram precisas. Ao analisarem a linha de tendência, puderam verificar, a partir do modelo, que não se tratava de uma parábola, mas de algo muito semelhante.

Depois da análise do modelo, verificou-se a necessidade de sua reformulação. A professora sugeriu que os alunos utilizassem o GeoGebra para verificação do modelo, mas que não fossem utilizados os pontos, e sim a foto da corrente que haviam feito. Deveriam inserir a foto da corrente no *software*, recurso ainda desconhecido por eles. Em seguida, iniciou-se um trabalho de experimentação, como pode ser verificado no diálogo abaixo:

A2: Professora... e agora como vou marcar os pontos?

A1: Tem uma caixa que diz 'ponto', usa ela e marca os pontos...

A3: Marcar os pontos onde?

A1: Sobre a corrente, na imagem.

Os alunos fizeram o que o colega A1 sugeriu. A professora, sempre orientando o trabalho e mediando as atividades, perguntou: *Após marcar os pontos sobre a corrente, o que vocês puderam observar?*

A1: É preciso marcar os pontos com calma sobre a imagem, para que não fiquem os pontos fora, como aconteceu no primeiro modelo.

Professora: Com quantos pontos se determina uma parábola?

A1: Por três pontos, temos isso registrado no nosso diário de campo.

Professora: Quantos pontos vocês marcaram sobre a corrente, na imagem?

A3: Muitos.

A2: Então vamos deixar apenas três pontos.

Com essa constatação, os alunos marcaram apenas três pontos e traçaram a parábola, obtendo a função do segundo grau, cuja equação foi $f(x) = 0{,}01x^2 \quad 0{,}7x + 13{,}28$. O modelo encontrado ficou próximo do primeiro modelo, anteriormente encontrado pelos alunos no Excel. Além disso, a turma pôde observar que a linha não fica ajustada em toda extensão da corrente.

Posteriormente à comparação do primeiro modelo com o segundo, os alunos chegaram à conclusão de que a corrente não poderia ser representada por uma parábola, porém era muito semelhante. Concluíram, então, que o segundo modelo representava uma parábola com maior precisão.

A partir desse fato, observado por meio da reformulação do modelo matemático, a professora solicitou que os alunos abrissem outra janela no software e inserissem novamente a imagem obtida pela fotografia e, após, digitassem na caixa de entrada a equação que representava a função hiperbólica $f(x) = a.\cosh\left(\frac{x \quad b}{a}\right) + c$. Essa equação já havia sido pesquisada pelos alunos durante a coleta de dados. Ao digitaram na caixa de entrada, o *software* indicou a necessidade de usar os controles deslizantes com os quais eles ainda tinham contato. Feita a mediação da professora, seguiu-se o seguinte diálogo:

A1: Que legal... é parecido com uma parábola!!!

A2: Mas nós pesquisamos que a parábola é mais pontiaguda do que a catenária...

Professora: Então digitem a expressão da função polinomial do segundo grau e comparem.

A3: Muito legal! Elas parecem ser iguais, mas não são.

Com a constatação dos alunos, a professora pediu que ajustassem a curva catenária, utilizando os objetos deslizantes, ou seja, *a, b* e *c*, para que ela se encaixasse na corrente, de modo o mais fiel possível. Eles começaram a mover os objetos deslizantes e observaram que não era possível, naquele intervalo, encaixar a curva. Na sequência, o aluno A1 encontrou como aumentar o intervalo, utilizando as propriedades, e ensinou aos outros colegas. O aluno A1, ao explorar a ferramenta, observou uma propriedade denominada "incremento", que possibilita ajustar os coeficientes em décimos, centésimos ou milésimos. Dessa maneira, conseguiram encontrar o modelo que melhor se ajustou à curva, como mostra a Figura 3.

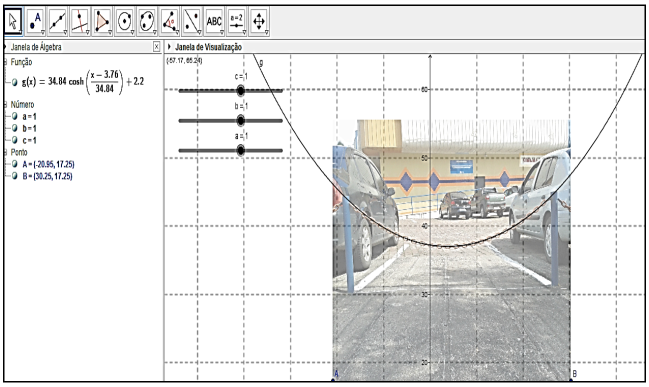

Figura 3: modelo encontrado pelo aluno A1.

O modelo matemático encontrado pelos alunos que melhor representou a curva catenária analisada foi $g(x) = 34{,}84.\cosh \dfrac{x \quad 3{,}76}{34{,}84} + 2{,}2$.

5. Considerações Finais

O presente trabalho evidenciou que o processo de Modelagem Matemática aliado à Geometria Dinâmica permitiu aos alunos identificarem propriedades de uma parábola, além de observarem que ela é muito semelhante à catenária.

A partir do recurso computacional GeoGebra, foi possível aos alunos construírem o modelo que representava a curva catenária, por meio dos ajustes dos parâmetros, e, com isso, constatar as diferenças existentes entre as curvas.

Além disso, foi possível promover a autonomia dos alunos, na procura de obtenção de informações sobre as curvas, bem como na manipulação do *software*. Por meio da discussão dos alunos, foi possível identificar que apresentaram algumas inseguranças, como no uso de algumas ferramentas disponibilizadas no GeoGebra e no desenvolvimento destas atividades. Considera-se que o papel do professor como mediador das atividades foi essencial ao trabalho.

Entende-se que o objetivo do experimento foi alcançado, já que possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção de seu próprio conhecimento.

6. Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 30 set. 2014.

________. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília, 2009. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13318&Itemid=310>. Acesso em 30 set. 2014.

_________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília, 2002.

BURAK, D.; Modelagem Matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM.

CRUZ, D. G. **A utilização do ambiente dinâmico e interativo na construção de conhecimento distribuído.** Curitiba – PR, 2005. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação – linha de pesquisa educação matemática). Setor de Educação. UFPR.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Unicamp, 2004.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum. In: EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (ed.). **Visualization and Mathematics Education**. Focus on learning problems in mathematics. Winter 1989, v. 11, n. 1. Center for Teaching/Learning of Mathematics. 1989.

FARIA, S.R.F. **Catenária**. 2011. Monografia (Pós-graduação em Matemática com ênfase em Cálculo). Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.

LEHMANN, C. H. **Geometria analítica.** 1. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.