

APRENDENDO MATEMÁTICA COM O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Fabricia de Carvalho Paixão
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
fah-carvalho@hotmail.com

Thaís Michele Mártires
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
thamy_thaismichelli@hotmail.com

Tiago Pereira
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
tiago025pereira@hotmail.com

Fábio Alexandre Borges
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
fabioborges.mga@hotmail.com

Mariana Moran Barroso
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
marianamoranmar@gmail.com

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão
rezendeveridiana@gmail.com

Resumo: O objetivo deste minicurso é a exploração de uma das geometrias não-euclidianas, a geometria fractal, com o intuito de explorar alguns conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados em sala de aula com alunos de Ensino Fundamental e Médio. Neste minicurso, também abordaremos questões teóricas a respeito da geometria fractal, a qual se caracteriza pela sua auto-similaridade. E com o auxílio de alguns materiais disponibilizados pelos autores deste trabalho, será realizada a construção do triângulo de Sierpinski com materiais manipuláveis e também com o auxílio do *software* Geogebra. Na sequência, exploraremos o comportamento da área e do perímetro de cada etapa da construção do triângulo de Sierpinski.
Palavras-chave: Educação Básica; Geometria Fractal; Triângulo de Sierpinski.

1. Introdução

A geometria não-euclidiana como conteúdo escolar oferece inúmeras possibilidades de exploração de conceitos matemáticos estudados na Educação Básica. Dentro desta geometria, embora pouco explorada, mas com grandes potencialidades temos a geometria fractal, que tem como precursor o matemático francês Benoit Mandelbrot. Entendemos que estudar conteúdos matemáticos junto com a geometria fractal atrelados ao uso de tecnologias,

especialmente

de softwares, pode contribuir com professor e aluno no ensino e aprendizagem da matemática.

O tema geometria fractal na sala de aula é estudado pelos três primeiros autores desta proposta em seus trabalhos de Iniciação Científica que encontra-se em andamento, sob a orientação dos três últimos autores.

Sendo assim, como parte dos resultados de nossos estudos, propomos este minicurso com o objetivo de explorar a geometria fractal e trabalhar conceitos matemáticos. Primeiramente, discutiremos a respeito desta geometria e a importância de se trabalhar com esta no Ensino Fundamental e Médio. Por fim, será apresentado o fractal denominado triângulo de Sierpinski, o qual pode ser construído em papel, com auxílio de régua e compasso, ou no *software* Geogebra. Iremos então instruir e realizar ambas as construções com os participantes. Também instigaremos os participantes a explorar o triângulo de Sierpinski em relação ao comportamento de sua área e perímetro, no surgimento de cada etapa.

2. Um pouco sobre a Geometria Fractal

Ao observarmos alguns lugares do nosso cotidiano nos deparamos com casas, edifícios, barracões e outras construções que seguem o modelo da geometria euclidiana, sendo essas construções modeladas pela representação de quadrados, triângulos, círculos, cubos, esferas, entre outros. Porém, ao observarmos o galho de uma árvore, folhas de uma planta, montanhas, raios em um dia de chuva, nuvens e até mesmo alguns alimentos, nos deparamos com algumas formas irregulares que não podem ser modeladas perfeitamente com formas da geometria euclidiana. Contudo, podemos utilizar a geometria fractal para modelar essa natureza irregular.

As ideias de Barbosa (2005) entram em consonância conosco quando diz:

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, 2005 p.10).

Ainda segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot foi o pioneiro em estudar a geometria fractal que, para este, tal geometria reflete uma natureza de irregularidades e fragmentação. É famosa sua indagação: ‘Que extensão tem o litoral da Grã- Bretanha?’¹. Entre suas publicações a obra que se destaca é *The Fractal Geometry of Nature*, New York Freeman, 1997.

Segundo Barbosa (2005), a definição de fractal apresentada inicialmente por Mandelbrot é baseada no conceito de dimensão: “*um fractal é, por definição, um conjunto para qual a dimensão Hausdorff- Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica*” (BARBOSA, 2005 p.18). Porém, esta definição não satisfaz nem mesmo Mandelbrot, que recebeu algumas críticas. Posteriormente, J. Feder caracterizou fractal da seguinte forma: “*um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos*” (BARBOSA, 2005 p.18).

Ao estudarmos geometria euclidiana, aprendemos que o ponto não possui dimensão, que a reta possui dimensão 1 e o plano dimensão 2. Na geometria não-euclidiana, em relação à dimensão que os fractais apresentam, segundo Vallim (2008) essas figuras apresentam uma dimensão topológica, assim como o ponto, a reta e o plano.

Uma característica presente nos fractais é a auto-similaridade, que, segundo Barbosa (2005), é uma propriedade especial dessas formas geométricas (fractais). Esta propriedade garante que as partes de um fractal que lhe seguem são semelhantes. Para uma melhor compreensão veja a figura 1.

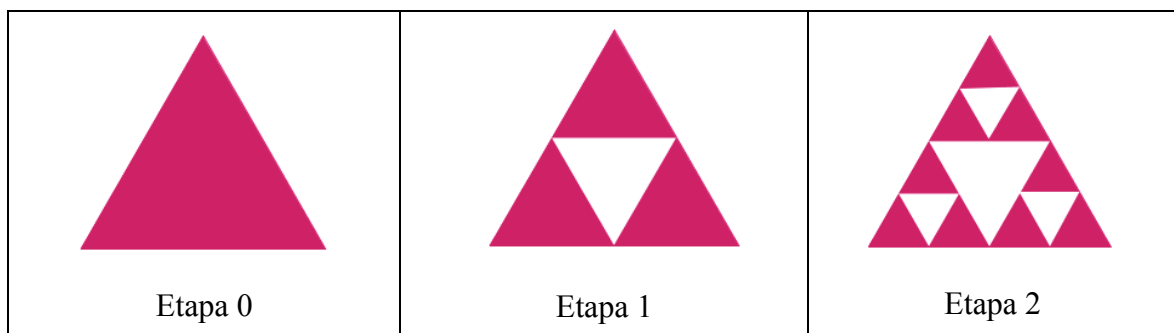


Figura 1- Presença da auto-similaridade no fractal Triângulo de Sierpinski

Fonte: Autores

¹ Ao observarmos um mapa geográfico, podemos perceber que o litoral dos países não é *perfeito* quando nos baseamos na geometria euclidiana. Imagine se fossemos medir o litoral da Grã- Bretanhã, conforme Barbosa: “a resposta possível variará conforme a escala de medição, Baías e penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada.” (BARBOSA, 2005 p.12). A geometria fractal pode modelar estas situações e nos proporcionar respostas para indagações como esta.

Como podemos observar na figura acima, os triângulos formados no interior do triângulo rosa em cada nova etapa (iteração), recordam o triângulo da etapa anterior. Ou seja, os triângulos formados na etapa 2 recordam o triângulo formado na etapa 1. O fractal então possui uma auto-similaridade.

As Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) é um documento oficial do Estado do Paraná, responsável por recomendar os conteúdos e metodologias que podem ser empregados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No ano de 2008 houve alterações neste documento que acresceram ao tópico de Geometrias as Geometrias Não-Euclidianas, como conteúdos estruturantes do currículo escolar paranaense. Dentre as geometrias não-euclidianas contempladas por esta mudança está a noção de Geometria dos Fractais (PARANÁ, 2008).

As ideias de Barbosa incentivam o trabalho da geometria fractal:

Cremos, no entanto, que para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração e talvez evidenciando o êxtase na contemplação da beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais (BARBOSA, 2005 p. 14).

Assim, propomos este minicurso que visa o trabalho da geometria fractal no Ensino Fundamental e Médio, e com o intuito de proporcionar aos atuais e futuros profissionais da educação um maior conhecimento a respeito da geometria fractal e instruções em como trabalhar com esta geometria em sala de aula. Segundo Miskulin (2006) o desenvolvimento de tecnologias proporciona novas dimensões ao percurso educacional, o que ultrapassa os paradigmas do ensino tradicional e cabe ao educador estar aberto a essa nova forma do saber, nova maneira de produzir, apropriar, gerar e dominar o conhecimento e saber científico.

3. Desenvolvimento do minicurso

As tecnologias computacionais podem favorecer a construção de fractais como o Triângulo de Sierpinski. O *software* Geogebra é uma importante ferramenta que utilizaremos durante o minicurso, pois, de maneira eficiente e com riqueza de detalhes, o Geogebra nos permitirá extrair muitas informações sobre as figuras construídas, aprofundando o estudo deste fractal.

No entanto, inicialmente, utilizaremos materiais manipuláveis para a sua construção. O desenvolvimento deste minicurso será realizado em duas etapas, sendo construção utilizando materiais manipuláveis, com régua e compasso, e na sequência utilizando o *software* geogebra. Sendo assim, ressaltamos a importância desse minicurso ser realizado em laboratório de informática que tenha instalado o software Geogebra nos computadores.

A seguir apresentamos alguns passos da construção do triângulo de Sierpinski com régua e compasso e, em seguida, os passos da construção com o software geogebra. Para construir o triângulo de Sierpinski utilizaremos os seguintes materiais: folha sulfite, lápis, tesoura, compasso, régua.

1º passo: Iniciamos o processo a partir da construção de um triângulo equilátero. Indicaremos os passos para tal construção. Os vértices do triângulo serão os pontos A, B e C.

2º passo: Encontraremos os pontos médios dos segmentos AB, BC e AC. A união dos pontos médios será a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski. As outras iterações são análogas a esta. Seguem algumas iterações. Ver figura 2.

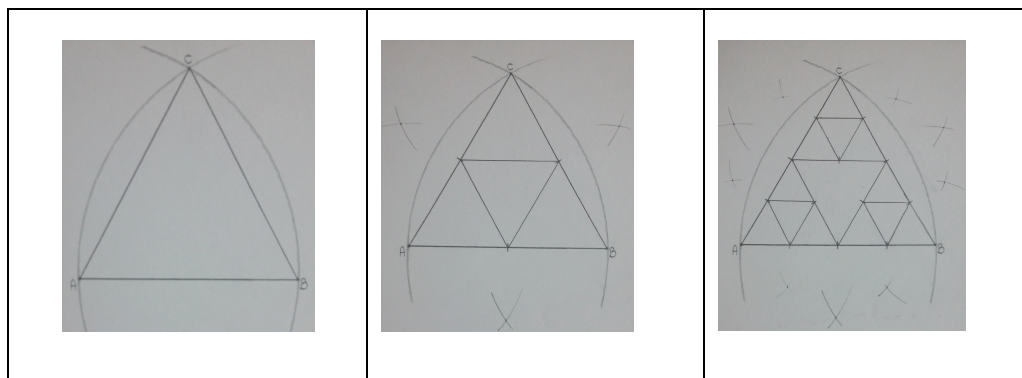


Figura 2: Representação das duas primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski Manual.
Fonte: Autores

Quanto à construção do Triângulo de Sierpinski utilizando o geogebra, descreveremos aqui as principais etapas para esta construção, no entanto, durante a realização do minicurso essas etapas serão detalhadas.

1º passo: Abrir o software Geogebra e construir um triângulo equilátero. Para esta construção, os participantes deverão utilizar a ferramenta Ponto, que está no segundo ícone do *software*.

Em seguida, deverão criar dois pontos na área de construção que serão os vértices do triângulo. Após, selecione a quinta ferramenta, em seguida, clique em polígono regular. A ferramenta irá solicitar quantos vértices terá o polígono, digite 3 e clique em *ok*. Obtemos assim, o triângulo equilátero ABC. Ver Imagens 1.

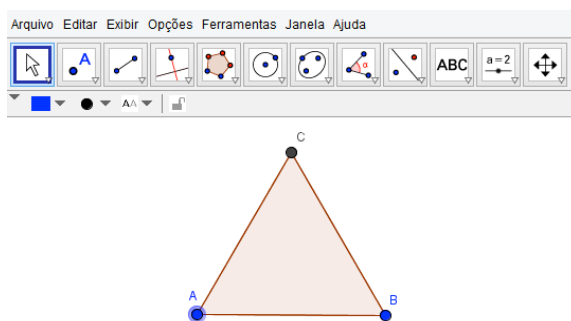


Figura 2 – Esboço da realização do segundo passo da construção
Fonte: Autores

2º passo: Construção da primeira iteração do Triângulo de Sierpinski. Para construir a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski, é preciso determinar os pontos médios dos lados AB, BC e AC do triângulo equilátero ABC. Para isto, os participantes deverão selecionar a ferramenta Ponto – Ponto Médio ou Centro, que se encontra no segundo ícone do *software*.

Selecionada a ferramenta, clicar nos pontos A e B obtendo o ponto médio D, e em seguida nos pontos B e C obtendo o ponto médio E, e, por fim, clicar em A e C, encontrando o ponto médio F. Em seguida, selecione a ferramenta Polígono – Polígono regular. Clicando nos ponto médios F e D, novamente aparecerá a janela pedindo a quantidade de vértices do Polígono, digite 3 e dê *ok*. Esta será a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski. Ver Imagem 3.

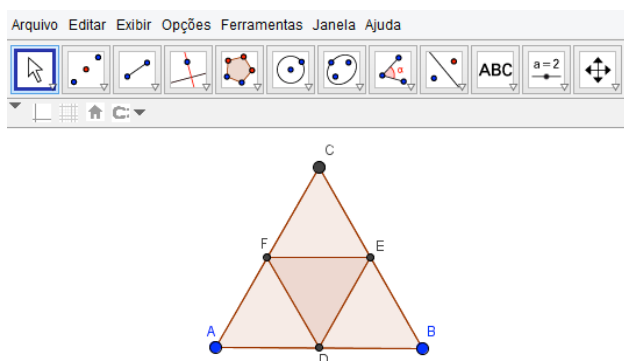


Figura 3 – Esboço da realização do segundo passo da construção
Fonte: Autores

A partir da primeira iteração podemos criar uma ferramenta para construir as próximas iterações. Durante o minicurso disponibilizaremos a todos os participantes um tutorial em PDF com todos os passos desta construção, com informações detalhadas inclusive da construção desta ferramenta, bem como, os passos de colorir o Triângulo de Sierpinski. Ver Imagem 4.

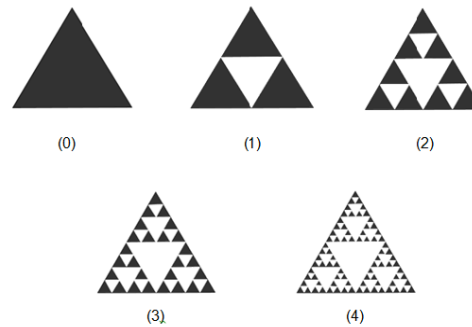


Figura 4: Algumas iterações do Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Autores

Dando continuidade ao minicurso, realizaremos uma análise do comportamento da área e do perímetro do Triângulo de Sierpinski conforme as iterações são realizadas. A seguir apresentamos as tabelas a serem utilizadas para esta análise.

Tabela 1 – Análise do perímetro Triângulo de Sierpinski

Etapa	Quantidade de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
0				
1				
2				
n				

Fonte: Autores

Tabela 2- Análise da área do Triângulo de Sierpinski

Etapa	Quantidade de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
0			
1			
2			
n			

Fonte: Autores

4. Considerações Finais

A geometria dos fractais nos propicia diversos conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados de maneira dinâmica e em diferentes níveis de ensino. Com este minicurso pretendemos construir com os participantes um pouco do conhecimento sobre esta geometria e como utilizá-la em sala de aula. Por se tratar de uma maneira diversificada de se ensinar matemática, tanto na atividade manual, quanto com a utilização do *software*, acreditamos que os alunos se sentirão mais motivados, podendo contribuir com seu aprendizado. Como estamos vinculados à área de Ensino, valorizamos diferentes metodologias no ensino de matemática, e esta geometria é uma ferramenta enriquecedora para o ensino.

5. Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimdo a geometria Fractal** - para a sala de aula. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 153-178. (Coleção Formação de Professores).

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008.

VALIM, J. C. M.; COLLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. In: XXII semana acadêmica da matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2008. Cascavel. **Anais da XXII semana acadêmica da matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná**: Edunioeste, 2008.