

ANÁLISE DE ERROS EM QUESTÕES DE TEOREMA DE PITÁGORAS: Um estudo com alunos do Ensino Fundamental

Mayara Gabriella Grangeiro Pereira
Universidade do Estado do Pará
maygabriella@hotmail.com

Ana Paula Nascimento Pegado Couto
Universidade do Estado do Pará
ana.couto16@hotmail.com

Acylena Coelho Costa
Universidade do Estado do Pará
acylena@gmail.com

Resumo:

Este trabalho apresenta os resultados de um estudo que teve como objetivo realizar uma análise dos erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental ao resolverem questões sobre Teorema de Pitágoras. Utilizamos como instrumento de pesquisa um teste contendo 6 questões de Teorema de Pitágoras que aplicamos à uma turma do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Belém do Pará. Como metodologia de pesquisa optamos pela pesquisa diagnóstica, do tipo qualitativa, em que buscamos descrever os resultados obtidos com base na aplicação de um teste diagnóstico. Na análise das questões conseguimos identificar os erros e as dificuldades mais comuns cometidas pelos alunos e observamos que os erros na aplicação do Teorema estão relacionados à falta de compreensão na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo, bem como no desenvolvimento de operações básicas.

Palavras-chave: Educação matemática; Avaliação da aprendizagem em matemática; Análise de erros; Teorema de Pitágoras.

1. Introdução

No âmbito escolar, ainda é muito presente no processo avaliativo o chamado acerto ou erro, no qual a preocupação é maior com a quantidade de acertos do que com a aprendizagem. Segundo Carvalho e Carvalho (2001, p.61) “[...] o erro tem sido visto como prova do fracasso ou incapacidade do aluno, sendo passível de punição, crítica.” No entanto é por meio do erro que podemos avaliar as dificuldades encontradas pelo aluno em relação ao conhecimento adquirido. Para isso é preciso dar importância à análise de erros como um processo avaliativo, tentando explicitar a maneira como o aluno abordou o problema, entendendo seu raciocínio e o conhecimento matemático.

Ao analisar os erros podemos caracterizar os alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta, valorizando os modos particulares que eles constroem seu conhecimento. A correção dos erros torna-se muito importante e deve ser feita cuidadosamente, procurando saber qual é a dificuldade e/ou necessidade presentes neles, para que se possa definir que estratégias usar com o objetivo de ajudar os alunos a avançar no conhecimento.

Por ser pouco estudado, o erro acaba sendo generalizado e analisado de forma incorreta, além disso, não há preocupação com o raciocínio usado e sua maneira de interpretação e resolução. A identificação dos erros e sua natureza são imprescindíveis para saber orientar o aluno conforme sua necessidade e situação, Cury (1995) aponta três maneiras de analisar as questões dos alunos, a saber: detectando os erros sem discuti-los com os alunos, aproveitando-os para retomar o conteúdo e superar dificuldades, ou explorando-os com os alunos, tentando compreender suas formas de pensar ou questionando sua validade.

Este trabalho se justifica porque acreditamos ser importante investigar os erros e dificuldades dos alunos em Teorema de Pitágoras, tais dificuldades são apontados em alguns estudos, dentre os quais destacamos: Bastian (2000) para conhecer as dificuldades dos alunos no processo ensino-aprendizagem em Teorema de Pitágoras; Mottin (2004) acerca da utilização de material didático-pedagógico para o estudo do Teorema de Pitágoras e Tashimaa e Silva (2008) sobre as lacunas no ensino-aprendizagem da geometria.

Assim, nos propomos neste trabalho, analisar os principais erros dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em algumas questões de Teorema de Pitágoras.

2. Estudos sobre Teorema de Pitágoras

Apresentamos uma breve análise de alguns estudos referentes ao assunto Teorema de Pitágoras, os quais apresentam os erros e as dificuldades mais comuns dos alunos quanto às definições e às relações envolvendo esse conteúdo. Assim, analisamos três trabalhos que vão nos auxiliar neste estudo.

O trabalho realizado por Bastian (2000) propõe um estudo sobre o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras enfatizando o caráter necessário de tal Teorema. O objetivo da pesquisa da autora foi testar uma sequência didática construída em alunos de 8ª série que ainda não tenham o conhecimento do Teorema.

Bastian (2000) aplicou um questionário diagnóstico visando investigar as concepções dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, bem como detectar se ocorreriam alguns dos erros apontados pela pesquisadora francesa Berté. Tais erros foram constatados pela pesquisadora brasileira ao analisar os resultados obtidos.

Outro trabalho investigado foi de Mottin (2004), que tem por finalidade apresentar uma alternativa de procedimento no processo ensino-aprendizagem, objetivando proporcionar a utilização de material didático-pedagógico que possibilite uma melhor compreensão do estudo da Álgebra, a partir do Teorema de Pitágoras. O estudo foi desenvolvido em um Centro Educacional no Rio Grande do Sul, envolvendo alunos da 8ª série do Ensino Fundamental.

Foram elaboradas na pesquisa atividades sobre Álgebra e Teorema de Pitágoras. Aplicando dois questionários, um no início da prática e outro no final. Pela análise do primeiro teste aplicado, a autora percebeu que os alunos tinham muitas lacunas no conhecimento do Teorema de Pitágoras. Após a análise dos resultados obtidos nos testes e exercícios, Mottin (2004) ressalta o crescimento dos alunos durante a prática, mostrando que o trabalho foi relevante para o desenvolvimento do conteúdo abordado.

Por último, analisamos o trabalho de Tashimaa e Silva (2008), cujo objetivo foi identificar as dificuldades e buscar alternativas para melhorar o nível de conhecimento dos alunos em relação ao Teorema de Pitágoras. A pesquisa foi realizada, com 38 alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual, localizada no Paraná.

As atividades que foram propostas por essas autoras tinham como objetivo analisar possíveis métodos alternativos correlacionados ao ensino da Matemática. A avaliação teve três momentos: teste de sondagem, aplicação da sequência de exercícios e avaliação final. Após a avaliação, efetuaram um levantamento e analisaram o desempenho de cada aluno. Com isso, as autoras observaram diferentes dificuldades dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta tanto na resolução de problemas matemáticos, como na aprendizagem de outros conceitos geométricos presentes nas atuais propostas curriculares.

Na análise dos estudos de Bastian (2000), Mottin (2004) e Tashimaa e Silva (2008), observamos semelhanças em relação às dificuldades e aos erros cometidos pelos alunos na compreensão do Teorema de Pitágoras. Com base nessas dificuldades apontadas desenvolvemos as categorias de erros identificados a partir das respostas dos alunos investigados e que serão apresentadas nas análises dos resultados.

3. Procedimentos Metodológicos

Neste estudo desenvolvemos uma pesquisa diagnóstica, do tipo qualitativa, na qual buscamos descrever os resultados obtidos com base na aplicação de um teste diagnóstico. Para Rudio (2007) o objetivo da pesquisa descritiva é descobrir e observar fenômenos, tentando descrever, classificar e interpretá-los sem interferir nos fatos observados. Sendo assim, ele coloca a pesquisa diagnóstica como sendo parte da pesquisa descritiva.

Utilizamos como instrumento de pesquisa um teste diagnóstico com 6 questões sobre o referido assunto para investigamos os erros e dificuldades dos alunos em Teorema de Pitágoras, que foi aplicado em uma turma de 20 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belém do Pará. Após a aplicação do teste realizamos as análises quantitativa e qualitativa dos erros e dificuldades com base nos estudos correlatos.

4. Análise dos Resultados Obtidos

Utilizando as dificuldades e erros apontados na revisão de estudos supracitados, criamos três categorias para classificar os principais erros cometidos pelos alunos na resolução das questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, tais categorias são:

C1 – erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo;

Entendemos como erro na compreensão dos elementos, como sendo a falta de habilidade do aluno identificar os lados do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa).

C2 – erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes;

Admitimos como erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes, os raciocínios aleatórios utilizados para a resolução da questão, no qual eles manipulam os dados fornecidos para se chegar à algum resultado.

C3 – erros no desenvolvimento das operações matemáticas;

Consideramos como erros no desenvolvimento das operações matemáticas, todos os equívocos realizados nas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Com base nos resultados do teste aplicado, construímos um quadro que faz o comparativo do número de acertos, erros e questões em branco.

Quadro 1 – Comparativo de acertos, erros e não fez

Questões	Acertos	Erros	Não fez
1	55%	20%	25%
2	30%	25%	45%
3 a)	60%	30%	10%
3 b)	60%	30%	10%
4	45%	35%	20%
5	60%	15%	25%
6	50%	25%	25%

Fonte: As autoras

Após os resultados apontados no Quadro 1 podemos perceber que as questões com maior índice de erros foram as questões 4 com 35% e a questão 3 item “a” e item “b” com 30%. A questão 5 foi a que teve o percentual de erros menor em relação às demais questões.

A seguir apresentamos as questões que foram resolvidas pelos alunos, os seus respectivos objetivos e a análise feita em algumas das respostas dadas pelos mesmos, analisando cada questão por categoria de acordo com seus erros. Escolhemos para as análises as questões que apresentaram erros significativos e que foram cometidos pelos demais alunos. Em relação às categorias utilizadas nesse estudo, temos:

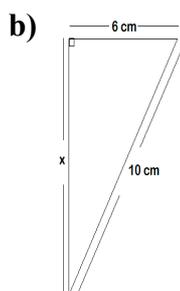
I. Categoria C1 – erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo

A análise dos resultados mostrou que os alunos apresentam uma falta de compreensão ao identificar os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo, pois foi observado nas respostas que eles identificaram um dos catetos como sendo a hipotenusa, assim como o

inverso, a hipotenusa como sendo um dos catetos. As questões que se enquadram nessa categoria são a 3ª (item “b”) e a 4ª questão. Seguem as questões analisadas pela categoria 1.

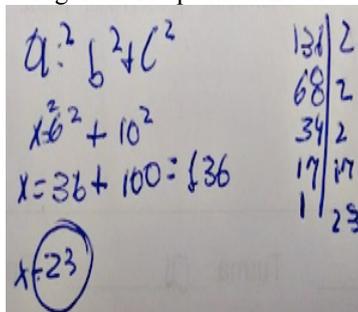
Questão 3

Aplicando o teorema de Pitágoras, determine a medida x indicada em cada um dos triângulos:



Com essa questão nós queremos verificar se o aluno consegue determinar o valor de x em diferentes posições do triângulo retângulo. Esta questão teve 60% de acertos, 30% de erros e 10% dos alunos deixaram a questão em branco. A figura 1 mostra o principal erro cometido pelos alunos.

Figura 1: Resposta aluno A4



Fonte: Teste dos alunos

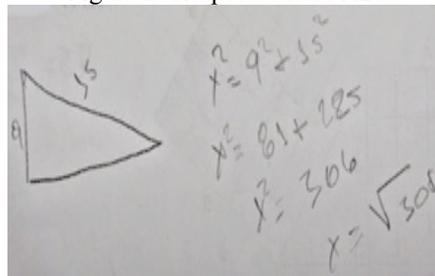
Como pode ser observado na figura 1, o aluno A4 troca os elementos do triângulo retângulo atribuindo o valor da hipotenusa como sendo um dos catetos, levando-o ao erro. Este é um dos principais erros cometidos pelos alunos ao resolverem questões envolvendo o Teorema de Pitágoras como citado no trabalho de Bastian (2000). Ao calcular um dos catetos, alguns alunos escreveram que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto.

Questão 4

Seja um triângulo retângulo cujo a hipotenusa mede 15 cm e um dos catetos 9 cm. Determine o valor do outro cateto.

Para essa questão nosso intuito foi analisar a habilidade do aluno em construir um triângulo retângulo com as informações dadas no enunciado do problema e aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras. Os resultados para a questão 4 indicaram 45% de acertos, 35% de erros e 20% de respostas em branco. Dentre os principais erros encontrados, identificamos a resposta do aluno A20 especificado na figura abaixo.

Figura 2: Resposta aluno A20



Fonte: Teste dos alunos

Na análise da resolução do aluno A20, percebemos que apesar deste construir corretamente o triângulo retângulo e atribuir os valores fornecidos para hipotenusa e para cateto, o referido aluno comete um equívoco ao aplicar a fórmula do Teorema admitindo o valor a ser encontrado, no caso um dos catetos, no lugar da hipotenusa, calculando que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto.

Diante do erro cometido fica visível que o aluno A20 não possui conhecimento suficiente acerca do Teorema de Pitágoras. Esse mesmo erro foi apontado nos estudos de Bastian (2000) e Tashimaa e Silva (2008), constando a dificuldade dos alunos em aplicar o referido Teorema, na resolução de problemas.

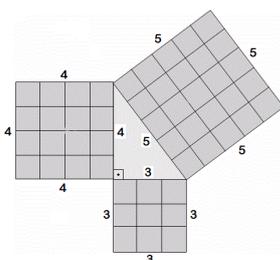
II. C2 – erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes

A análise das respostas mostrou que os alunos investigados apresentaram uma falta de compreensão ao aplicar as regras e estratégias para a resolução do Teorema de Pitágoras, os levando ao erro por meio de raciocínios aleatórios e irrelevantes. As questões que se

enquadram nessa categoria foram a 1ª questão, 2ª questão, 3ª questão item “a” e 5ª questão. A seguir destacaremos as questões analisadas pela categoria 2.

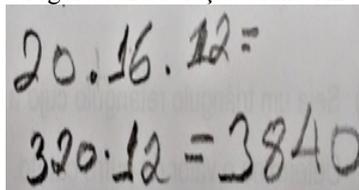
Questão 1

Verifique se a representação geométrica abaixo equivale ao Teorema de Pitágoras:



O objetivo desta questão foi verificar se o aluno conseguiria explicitar o Teorema de Pitágoras. Para esta questão, identificamos 55% de acertos, 25% de erros e 20% dos alunos deixaram a questão em branco. Uma das principais dificuldades apontadas pelos alunos é a compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo, tendo assim dificuldades em estabelecer o Teorema, isto é, “o quadrado da hipotenusa é soma do quadrado dos catetos”, no qual eles não associam a relação de área presente. Apresentamos a seguir alguns dos erros cometidos pelos alunos.

Figura 3: Resolução aluno A2


$$20 \cdot 16 \cdot 12 =$$
$$320 \cdot 12 = 3840$$

Fonte: Teste dos alunos

Podemos inferir, por meio da figura 3, que o aluno A2 apresenta um desconhecimento da relação pitagórica, cometendo um erro ao calcular o perímetro de cada quadrado ao invés de calcular a área, ou seja, ele somou as medidas dos lados dos quadrados e no final multiplicou todos os resultados.

O erro aqui detectado demonstra semelhança com os estudos de Bastian (2000) e Tashimaa e Silva (2008) quando tais pesquisadoras indicam que esse tipo de erro está relacionado com a dificuldade em estabelecer a condição necessária para igualdade pitagórica.

Questão 2

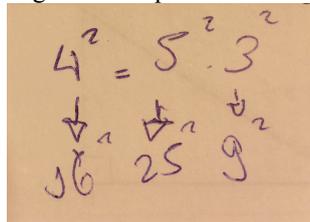
Verifique se as igualdades abaixo equivalem a relação pitagórica:

a) $20^2 = 12^2 + 16^2$

b) $25^2 = 9^2 + 16^2$

Com essa questão nosso intuito foi verificar se o aluno compreende a relação Pitagórica. Os resultados obtidos revelam os seguintes índices: 30% de acertos, 25% de erros e 45% dos alunos não fizeram a questão. Acreditamos que o alto índice de questões em branco está relacionado a não compreensão da equivalência do Teorema de Pitágoras, uma vez que a relação pitagórica já encontrava-se estabelecida, cabendo ao aluno comprovar se era verdadeira ou não. Apresentamos a seguir um dos erros cometidos pelos alunos investigados ao resolver tal questão.

Figura 4: Resposta aluno A7



$4^2 = 5^2 + 3^2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $16 \quad 25 \quad 9$

Fonte: Teste dos alunos

Ao analisarmos a figura 4, percebemos que o aluno A7 não domina a equivalência do Teorema de Pitágoras, tampouco consegue concluir se a relação pitagórica é verdadeira ou não. Os resultados aqui demonstrados vão de encontro ao estudo de Tashimaa e Silva (2008), pois a maioria dos alunos investigados (75%) não demonstraram capacidade de conjecturar a existência da relação pitagórica.

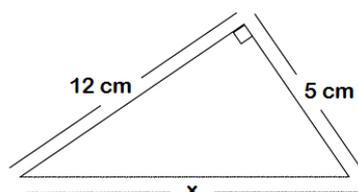
III. C3 – erros no desenvolvimento das operações matemáticas

Nesta categoria percebemos por meio dos testes analisados que uma das principais dificuldades encontradas para a resolução das questões foi o desenvolvimento das operações matemáticas como, potenciação e radiciação, em virtude da falta de conhecimento dos alunos ou provavelmente, por falta de atenção. As questões que se enquadram nesta categoria são a 3ª item “a”, 5ª questão e 6ª questão.

Questão 3

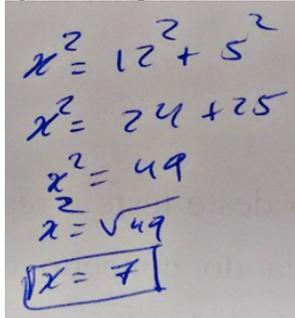
Aplicando o teorema de Pitágoras, determine a medida x indicada em cada um dos triângulos:

a)



Com essa questão nosso objetivo foi verificar se o aluno consegue determinar o valor de x em diferentes posições do triângulo retângulo. Esta questão teve 60% de acertos, 30% de erros e 10% dos alunos deixaram a questão em branco. Apresentamos na figura 5 um dos erros cometidos pelos alunos.

Figura 5: Resposta aluno A14



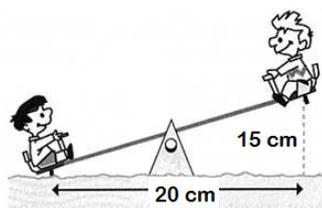
The image shows handwritten work on a piece of paper. The calculations are as follows:
 $x^2 = 12^2 + 5^2$
 $x^2 = 24 + 25$
 $x^2 = 49$
 $x = \sqrt{49}$
 $x = 7$

Fonte: Teste dos alunos

Podemos observar que o aluno A14 aplica corretamente o Teorema, mas comete um erro ao calcular a potência 12^2 como sendo duas vezes o número doze. Este erro também foi destacado nos estudos de Mottin (2004), dito erros de cálculos numéricos, no qual o aluno acaba calculando o quadrado de um número como sendo o dobro do mesmo.

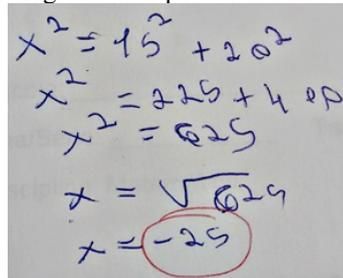
Questão 6

Pedro e o João estão brincando em uma gangorra, como indica a figura abaixo. A altura máxima a que pode subir cada um dos amigos é de 15 cm. Qual o comprimento do balancê?



Nosso objetivo com a questão 6 foi analisar o uso adequado do Teorema de Pitágoras em uma situação-problema. Os resultados indicam 50% de acertos, 25% de erros e 25% dos alunos deixaram a questão em branco. Percebemos, por meio dos dados obtidos, que uma das principais dificuldades encontradas para a resolução da questão foi o desenvolvimento das operações como, potenciação e radiciação, revelando a falta de domínio dos alunos investigados. A figura 7 expõe um dos erros cometidos pelos alunos.

Figura 7: Resposta aluno A10



$$x^2 = 15^2 + 20^2$$

$$x^2 = 225 + 400$$

$$x^2 = 625$$

$$x = \sqrt{625}$$

$$x = -25$$

Fonte: Teste dos alunos

Observando a resposta do aluno A10, na figura acima, é possível inferir que o mesmo sabe aplicar o Teorema de Pitágoras de forma correta, entretanto ao resolver a operação de radiciação acaba indicando um resultado negativo como resposta para a referida questão. Tal erro, também é apontado na pesquisa de Mottin (2004), a qual afirma que o aluno não observa que, por se tratar de uma medida, o resultado não pode ser um valor negativo.

De um modo geral as análises sobre os erros e dificuldades que os alunos apresentam nas resoluções das questões envolvendo o uso do Teorema de Pitágoras apontam resultados também encontrados nos estudos analisados. Porém, um ponto importante a ser destacado neste trabalho, e que não identificamos na literatura analisada, diz respeito a uma das principais dificuldades apontadas pelos alunos investigados, a saber: a falta de compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo, tendo assim a dificuldade em estabelecer a existência da relação pitagórica como sendo “o quadrado da hipotenusa é soma do quadrado dos catetos”, no qual eles não associam a relação de área presente.

5. Considerações finais

Esse estudo teve como objetivo analisar os erros cometidos por alunos do ensino fundamental em questões envolvendo o Teorema de Pitágoras.

Em nossas análises foi possível constatar que a causa dos erros dos alunos referentes à aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo está relacionada, sobretudo, a falta de compreensão na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo. Acreditamos que as dificuldades dos alunos na compreensão desses elementos necessitam ser superadas para que o aluno tenha a devida compreensão da relação pitagórica.

Após as análises dos erros cometidos pelos alunos, ficou evidente que o problema não está apenas no uso do Teorema de Pitágoras, mas também nas operações básicas havendo certa confusão no processo de resolução das mesmas.

6. Referências

BASTIAN, Irma Verri. **O teorema de Pitágoras**. 2000. 229 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, 2000.

CARVALHO, Meire Muzzi; CARVALHO, Denise Dutra Martins. Para compreender o erro no processo ensino aprendizagem. In: **Revista Presença Pedagógica**, v. 7, n. 42, p. 61-74, nov/dez. 2001.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva Histórica e Perspectivas Atuais na Análise de Erros em Educação Matemática. In: **ZETETIKE**. Campinas, v. 3, n. 2, p. 39-50, nov. 1995.

MOTTIN, Elisandra. **A Utilização de material didático-pedagógico em ateliês de matemática para o estudo de Teorema de Pitágoras**. 2004. 117 p. Dissertação de Mestrado em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. PUCRS, 2004.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática: estudo no ensino da Matemática elementar**. Campinas, São Paulo: Papirus, 2000.

TASHIMA, Marina Massaco; SILVA, Ana Lúcia da. **As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria**. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_marina_massaco_tashima.pdf. Acesso em 18 de novembro de 2015.