

TEORIA DOS GRAFOS: CONCEITOS ELEMENTARES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

*Jonathan Gil Müller
Colégio São Paulo
jgmuller21@gmail.com*

*Tânia Baier
Universidade Regional de Blumenau (FURB)
taniabaier@gmail.com*

Resumo:

Neste artigo é apresentado o relato de uma experiência pedagógica desenvolvida com estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada no município de Ascurra, Estado de Santa Catarina. A atividade didática realizada pelos educandos foi elaborada no formato de desafio lúdico, tendo sido seguidos os preceitos metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, objetivando a interação entre aluno, professor e o conhecimento por meio de modelos didáticos sugeridos ou desenvolvidos pelo professor. Foram enfocados alguns tópicos de um ramo da Topologia, a Teoria dos Grafos, que na atualidade é amplamente aplicada, principalmente na área da computação, sistemas de comunicação e planejamento urbano. O planejamento do desafio lúdico objetivou o entendimento de alguns conceitos elementares da Teoria dos Grafos: vértice, aresta, grafo e grafo dirigido ou dígrafo.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos; Desafio lúdico; Ensino Fundamental.

1. Ensino de Matemática: novas possibilidades pedagógicas

O ensino de Matemática na atualidade torna-se cada vez mais desafiador. Despertar o interesse e a curiosidade do estudante para a Matemática, como também proporcionar aulas instigantes e motivadoras, é uma tarefa que demanda a elaboração de atividades diferenciadas das usualmente encontradas nos livros didáticos. Cabe ao professor de Matemática estar ciente e consciente das transformações vivenciadas pela sociedade, como também do desenvolvimento desta ciência na contemporaneidade, para elaborar alternativas pedagógicas que estejam alinhadas com as novas demandas sociais, culturais e tecnológicas. Uma das opções é trazer para a sala de aula tópicos de Matemática relacionados com os atuais avanços da ciência. Para D'Ambrosio (1996, p. 32): “O grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos”.

Continuam sendo importantes as diretrizes encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para a área da Matemática, recomendando ajustar o trabalho escolar a uma nova realidade e adotar a atividade matemática escolar para direcionar a construção do conhecimento matemático a serviço do estudante, visando auxiliá-lo a compreender e transformar a sua realidade. O mesmo documento também realça que o estudo da Matemática proporciona uma forma de compreender e atuar no mundo, sendo explicitado que o conhecimento gerado nesta área do saber é fruto da construção humana em interação constante com o contexto natural, social e cultural (BRASIL, 1998).

O estudante mostra-se motivado diante de uma teoria ou conhecimento que tem aplicabilidade em sua prática cotidiana e em problemas e situações mais imediatas. Não se trata de abolir, na escola, todo o conteúdo matemático produzido no passado, mas sim, que o conhecimento de fatos históricos da Matemática do passado venha a contribuir para o aprendizado e o desenvolvimento da Matemática da atualidade. Os professores são responsáveis pela preparação para o futuro, sendo necessária a abordagem da Matemática de hoje, contextualizada no presente e com destaque para o futuro (D'AMBROSIO, 1996).

Neste artigo é apresentado o relato da aplicação de um desafio lúdico com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, abordando alguns conceitos elementares da Teoria dos Grafos. A atividade, parte da dissertação defendida junto ao Mestrado em Ensino de Ciências Naturais de Matemática da Universidade Regional de Blumenau, é constituída por uma situação lúdica elaborada com fins didáticos, cuja aplicação seguiu os preceitos metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, objetivando a interação entre aluno, professor e o conhecimento por meio de modelos didáticos sugeridos ou desenvolvidos pelo professor.

2. Teoria dos Grafos: uma introdução

Na Matemática, a Teoria dos Grafos é classificada como uma área da Matemática Discreta e é tida como um ramo da Topologia, que segundo Bell (1985), caracterizou-se pelo estudo qualitativo dos objetos, onde valores como peso, distância ou velocidade não tem importância. Conforme afirma Boaventura Netto (1979, p. 1): “Ao contrário de muitos ramos

da Matemática, nascidos de especulações puramente teóricas, a Teoria dos Grafos tem sua origem no confronto de problemas práticos relacionados a diversas especialidades [...]”. Para D’Ambrosio (1996), o que hoje conhecemos como Matemática Discreta consiste em uma forte tendência para a Matemática do futuro e problemas que se relacionam com essa área despertam maior interesse para os estudantes. Este autor destaca a possibilidade de aplicar esse tipo de Matemática para qualquer nível de ensino.

Historicamente, a Teoria dos Grafos teve seu início com a resolução do clássico *Problema das sete pontes de Königsberg*, apresentada pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler, em 1736. Nos anos seguintes, pouco foi realizado e acrescentado à teoria iniciada por Euler. Somente em meados do século XIX, através de alguns trabalhos isolados, entre eles o Teorema das Quatro Cores, deu-se continuidade ao estudo desta teoria. O recente desenvolvimento da tecnologia de computadores foi essencial para a evolução da Teoria dos Grafos (SZWARCFITER, 1984).

Pela sua facilidade de representação, a Teoria dos Grafos está sendo muito referenciada na atualidade, principalmente na área da computação, sistemas de comunicação e planejamento urbano. Rabuske (1992) destaca algumas aplicações em áreas como: processos industriais, análise de caminho crítico, tática e logística, estratégias militares, sistemas de comunicação, estudo de transmissão de informações, escolha de uma rota ótima, fluxos em redes, redes elétricas (engenharia elétrica e civil, arquitetura, computação), genética, psicologia, economia, estrutura social, jogos, física, química, tecnologia de computador, antropologia, linguística, entre outros. Conforme o entendimento de Feofiloff, Kohayahawa e Wakabayashi (2011, p. 5):

A teoria dos grafos estuda os objetos combinatórios – *os grafos* – que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque são um interessante desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas.

Além de atingir diversas áreas do conhecimento, a Teoria dos Grafos está relacionada com muitos ramos da Matemática como, por exemplo, Teoria dos Grupos, Teoria de Matrizes, Análise Numérica, Probabilidade, Topologia e Combinatória (RABUSKE, 1992).

3. Teoria das Situações Didáticas de Brousseau

A Teoria das Situações Didáticas se fundamenta na ideia do estudante construir seu próprio conhecimento por meio de uma situação didática preparada pelo professor. Conforme afirma Oliveira (2013, p. 83), essa teoria tem como base o princípio de que “cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação”. Para isto é necessário que o professor seja criativo e procure trabalhar um conhecimento ou saber matemático a partir de uma situação real ou da realização de um jogo educativo como também pela utilização de objetos matemáticos que contribuam para a construção de novos conhecimentos.

De acordo com Brousseau (2008), o enfoque da Teoria das Situações Didáticas se dá na construção de modelos que proporcionem a interação entre estudante, professor e o conhecimento matemático, ajustando o que se aprende e o processo pelo qual a aprendizagem acontece. Sua pergunta inicial se deu no âmbito de saber quais seriam as condições ideais para que um estudante qualquer perceba a necessidade de um conhecimento matemático em determinadas ocasiões. Nesse contexto, o meio é considerado como um sistema independente, o qual deve ser modelado. Assim, as situações didáticas passam a ser o objeto central de estudo dessa teoria.

Na Teoria das Situações Didáticas o processo de aprendizagem é dividido em quatro fases diferentes, porém interligadas, onde o saber assume funções diferentes e o aprendiz relaciona-se de modo diferente com o saber. Nessas fases observam-se momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização (ALMOULOU, 2007).

A dialética da ação consiste em colocar o aprendiz em situações de ação e, por meio dela adquirir as informações necessárias. A dialética da formulação é o momento da troca de informações, onde o estudante expõe para outros colegas as estratégias utilizadas e a solução encontrada. Na dialética da validação o aluno deve mostrar a validade do modelo desenvolvido por ele, submetido ao julgamento de um interlocutor. A dialética da institucionalização consiste na intervenção do professor, formalizando os conceitos apresentados pelos estudantes no momento da validação (ALMOULOU, 2007).

4. O desafio lúdico

A atividade realizada pelos estudantes foi adaptada de Lopes (2010) e escolhida por possibilitar o ensino e a aprendizagem de alguns conceitos elementares da Teoria dos Grafos de uma forma lúdica e divertida, por meio de um tema atrativo aos alunos do ensino fundamental. Na elaboração do desafio lúdico foram enfocados os seguintes conceitos elementares da Teoria dos Grafos: vértice, aresta, grafo e grafo dirigido ou digrafo. Inicialmente os estudantes leram o texto intitulado *Grafos e o torneio de Futebol*, apresentado a seguir:

Alguns jovens, amigos de Carlos, estão participando de um torneio de futebol que acontece anualmente entre os quatro colégios do município. Os quatro times de cada colégio são formados pelas turmas de 6º e 7º ano. O torneio é formado por quatro grupos com quatro times cada um. A primeira fase do torneio aconteceu por meio da disputa entre os times de cada grupo.

No quadro 1 estão apresentados os resultados dos jogos realizados durante a primeira fase:

Quadro 1 – Resultados da primeira fase do torneio de futebol

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4
Time A 4 x 2 Time B	Time E 1 x 0 Time F	Time I 2 x 1 Time J	Time M 3 x 1 Time N
Time C 0 x 2 Time D	Time G 0 x 0 Time H	Time K 0 x 1 Time L	Time O 0 x 0 Time P
Time A 1 x 0 Time C	Time E 2 x 0 Time G	Time I 6 x 0 Time K	Time M 0 x 0 Time O
Time D 3 x 0 Time B	Time H 1 x 0 Time F	Time L 2 x 1 Time J	Time P 0 x 2 Time N
Time D 0 x 3 Time A	Time H 2 x 2 Time E	Time L 0 x 0 Time I	Time P 1 x 2 Time M
Time B 1 x 2 Time C	Time F 2 x 2 Time G	Time J 3 x 2 Time K	Time N 1 x 1 Time O

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Carlos atualmente está no 8º ano e não poderá mais jogar no time do seu colégio, porém, foi convidado pela equipe de organização do torneio para auxiliar na construção das tabelas dos jogos. Carlos, entusiasmado, aceitou a proposta.

Nos anos anteriores, nas aulas de Matemática, Carlos realizou algumas atividades propostas pelo professor envolvendo conceitos relacionados com a Teoria dos Grafos. Por ter gostado muito do assunto, resolveu tentar uma possível aplicação do tema no contexto do torneio. Com a ajuda de seu professor de Matemática, Carlos iniciou seus estudos.

– O nosso problema inicial é construir um grafo a partir dos resultados de cada grupo, diz o professor de Matemática. Você tem alguma sugestão Carlos?

Carlos responde:

– Essa é fácil! Cada grupo formará um grafo e os vértices serão os quatro times de cada grupo: Time A (A), Time B (B), Time C (C) e Time D (D).

– Ótima sugestão, disse o professor, e quais são as arestas?

– Como mostra a tabela do torneio, são seis jogos em cada grupo, então cada grafo terá seis arestas que ligam os times dois a dois.

– Correto, afirma o professor. Mas como faremos para indicar o vencedor?

Carlos pensa um pouco e responde:

– No Grupo 1, como o time A venceu o time B, a aresta que liga os dois times fica orientada de B para A, assim: $B \rightarrow A$.

Em seguida o professor considerou a possibilidade de empate.

– E se empatar? Como você imagina que possa ser representada uma situação onde acontece um empate?

– Podemos fazer uma orientação dupla, desse modo: $A \leftrightarrow B$, representando o empate na partida entre os times A e B.

Entusiasmado o professor responde:

– Correto! Vejo que você já pode construir os grafos da primeira fase do torneio. Acredito que a equipe de organização ficará muito satisfeita com a sua atuação no torneio. Bom trabalho!

Carlos continuou o trabalho e fez o diagrama de grafo, apresentado na Figura 1, referente aos resultados dos jogos realizados pelos times que constituem o Grupo 1.

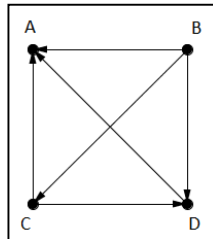


Figura 1 – Diagrama de grafo dos jogos do Grupo 1

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Após a leitura do texto, os estudantes realizaram algumas questões, elaboradas com o objetivo de relacionar o contexto do campeonato, conforme apresentado no enunciado, com a estrutura de um grafo, identificando o significado dos vértices e a função das arestas orientadas.

Dentre as questões realizadas, a primeira foi a construção do diagrama de grafo de cada um dos outros três grupos e a Figura 2 mostra o resultado esperado.

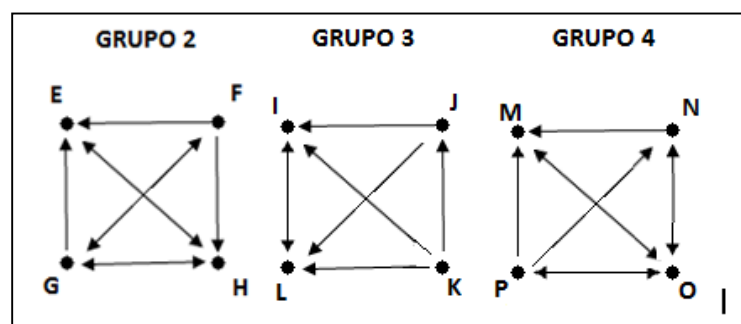


Figura 2 – Resultado esperado na primeira questão do desafio

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Na segunda questão, foi solicitado que, de acordo com o grafo orientado do grupo 1, indicar os dois primeiros colocados do grupo 1, explicando o raciocínio utilizado. Com esta atividade, esperava-se que os estudantes percebessem que os vértices que possuem maior número de arestas direcionadas representam o time com melhor colocação no grupo. Observando o grafo, os estudantes concluiriam: Primeiro colocado o Time A e o segundo colocado o Time D. O critério a ser utilizado é a quantidade de arestas direcionadas aos vértices, ou seja, quanto mais arestas direcionadas ao time, melhor a sua colocação no grupo.

Na terceira questão os estudantes indicaram os dois primeiros colocados dos outros três grupos. Junto com o enunciado da questão estava disponibilizado um critério utilizado pela FIFA, transcrito a seguir, a fim de auxiliar na decisão das colocações.

DICA: A classificação definida pela FIFA é feita assim: cada vitória vale 3 pontos e cada empate vale 1 ponto. Em caso de empate no total de pontos a classificação é feita pelo saldo de gols. Nesse caso é necessário consultar a tabela. Mantendo-se o empate, a classificação é decidida pelo maior número de gols marcados.

Na terceira questão, a colocação correta dos grupos 2, 3 e 4 é a seguinte:

- Grupo 2: primeiro colocado o time E e segundo colocado o time H.
- Grupo 3: primeiro colocado o time I e segundo colocado o time L.
- Grupo 4: primeiro colocado o time M e segundo colocado o time O.

A aplicação desta atividade durou aproximadamente 45 minutos. Ao final da aplicação da atividade, o professor sistematizou os conceitos relacionados com a situação estudada, formalizando os conceitos de vértice, aresta e grafo e explicando que os grafos construídos, referentes ao torneio de futebol, são chamados pelos matemáticos de dígrafo ou grafos dirigidos, que são grafos que possuem arestas orientadas. Ou seja, um dígrafo, ou grafo dirigido, consiste em um conjunto de vértices e arestas, sendo que cada aresta interliga dois vértices numa direção específica.

5. Conceitos da Teoria dos Grafos relacionados à aplicação do desafio lúdico

Nas atividades realizadas pelos estudantes todas as informações referentes à primeira fase do campeonato de futebol podem ser apresentadas por meio de um quadro ou por uma estrutura formada por pontos e setas, chamada grafo dirigido. Nessa estrutura estão presentes todas as informações relevantes na situação explorada: o conjunto de times que disputam o torneio, os jogos já realizados e as vitórias.

O conjunto de pontos que compõem o grafo, os quais representam os times que disputam o torneio, é denominado de conjunto V , e cada ponto deste conjunto é chamado de vértice, ou seja, o conjunto V é o conjunto de vértices de um grafo (JURKIEWICZ, 2009).

Interessa num grafo saber quem são os vértices e como eles estão interligados, isto é, quem são as arestas. O conjunto de linhas (setas) interligando os vértices, as quais representam os jogos já realizados, recebem o nome de conjunto A , onde cada linha (seta) deste conjunto é denominada de aresta, ou seja, o conjunto A é o conjunto de arestas do grafo (JURKIEWICZ, 2009). Desse modo, podemos concluir que um grafo é formado por um conjunto não vazio de vértices e um conjunto de arestas. Segundo Silva (2009, p. 19): “Um *grafo* é uma representação de um conjunto de pontos e do modo como eles estão ligados”.

Grafo dirigido ou digrafo são os grafos que possuem um sentido ou orientação para as suas arestas. Em caso contrário dizemos que o grafo não é dirigido (RABUSKE, 1992). Aldous e Wilson (2000, tradução nossa) esclarecem que um dígrafo consiste em um conjunto de elementos chamados vértices e um conjunto de elementos chamados arestas, sendo que cada aresta interliga dois vértices numa direção específica.

6. Resultados obtidos por meio da aplicação das atividades

Durante a realização das atividades, surgiram poucas dúvidas. Os estudantes responderam as questões propostas sem a intervenção do professor, que somente auxiliou na interpretação do texto que apresentava a descrição do torneio de futebol.

Na primeira pergunta, 11% dos participantes não construíram o grafo dirigido corretamente. Percebeu-se que não compreenderam o modo de representar o direcionamento

das arestas e não entenderam a sua função no grafo correspondente. Foi observado que conseguiram identificar a quantidade de arestas dirigidas que incidem em cada vértice, porém não foram capazes de construir a estrutura do grafo correta. A figura 3 mostra a resposta equivocada apresentada por um dos alunos.

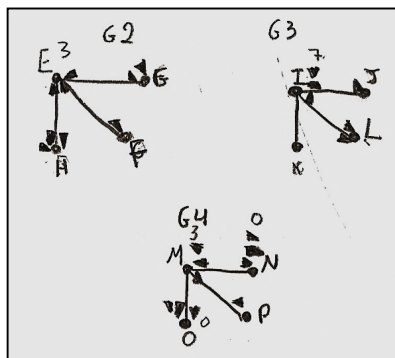


Figura 3 – Resolução incorreta da primeira questão da atividade

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

Os demais alunos apresentaram as soluções para a primeira questão desenhando corretamente os digrafos correspondentes aos outros grupos do campeonato de futebol.

Na segunda questão, todos os estudantes indicaram a colocação correta do grupo 1, porém somente 67% utilizaram como critério a quantidade de arestas orientadas para cada vértice. Os demais utilizaram o critério adotado pela FIFA, que consiste na contagem de pontos de acordo com a quantidade de vitórias e empates de cada time. A figura 4 mostra a resposta apresentada por um dos estudantes:

Os times A e D, que eu observei quantas setas criam em cada time.

Figura 4 – Resolução da segunda questão da atividade feita por um aluno

Fonte: Dados da pesquisa (2015).

A terceira questão foi respondida de modo correto por 66% dos participantes. Dos demais, 14% fizeram a análise correta, percebendo que, de acordo com os grafos dirigidos dos

grupos 2, 3 e 4, haveria empate para as duas primeiras colocações, porém não realizaram o desempate de acordo com os critérios estabelecidos pela FIFA. O restante dos alunos, representando 14% do total, erraram na colocação de pelo menos um dos grupos.

Foi observado que, de modo geral, os estudantes tiveram facilidade no entendimento dos conceitos abordados. Registrou-se o seguinte comentário de um aluno durante a oficina: “Até no futebol dá de utilizar os grafos!” Isso evidencia que o estudante é capaz de perceber a relação da Matemática em seu contexto, despertando, assim, o interesse pelo estudo desta área do conhecimento.

7. Considerações finais

Durante a realização desta atividade observou-se o interesse dos estudantes e a curiosidade pela teoria relacionada. Os estudantes permaneceram envolvidos com a atividade durante o processo de resolução, e seus comentários revelaram que assumiram o papel do personagem fictício Carlos, do enunciado da atividade. Após uma breve conversa sobre a Teoria dos Grafos, alguns de seus aspectos históricos e aplicações, os estudantes mostraram-se admirados pelo fato de uma estrutura tão simples ser utilizada na resolução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento humano. Trabalhar em sala de aula com uma teoria aplicável a diversas situações atuais facilita o entendimento da Matemática como uma ciência em contínuo processo de construção, cujo desenvolvimento se dá por meio das necessidades humanas, tanto no sentido científico, tecnológico, cultural ou social.

A metodologia adotada para a aplicação da atividade, a Teoria das Situações Didáticas, influenciou positivamente nos resultados obtidos. Pode-se perceber que o estudante apresenta melhores resultados quando lhe é atribuída mais responsabilidade na construção de seu próprio conhecimento, atuando como protagonista nesse contexto. Desse modo o estudante sente-se parte do processo de aprendizagem e não apenas um mero espectador.

A realização desta atividade trouxe para a sala de aula o futebol, tema recorrente nas conversas entre os estudantes, relacionado com um conteúdo matemático atual, a Teoria dos Grafos, consistindo em uma alternativa pedagógica que possibilita a abordagem da Matemática Discreta, revelando o aspecto qualitativo da Matemática.

8. Agradecimentos

O autor agradece o apoio recebido da Universidade Regional de Blumenau na forma de bolsa gratuidade para a realização do Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECIM / FURB).

9. Referências

ALDOUS, Joan M; WILSON, Robin J. *Graphs and applications: an introductory approach*. London: Springer, 2000.

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BELL, Eric Temple. *Historia de las matematicas*. México, D.F: Fondo de Cultura Economica, 1985.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. *Teoria e modelos de grafos*. São Paulo: Ed. Blücher, 1979.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática*. 6 ed. Campinas: Papirus, 1996.

FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. *Uma introdução sucinta à teoria dos grafos*. São Paulo, 2011. Disponível em: <www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Acessado em: 18 de dezembro de 2014.

JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos: uma introdução*. Rio de Janeiro, 2009. Apostila 5 de Programa de iniciação científica da OBMEP.

LOPES, Maria Laura Mouzinho Leite (coord.) *Grafos: jogos e desafios*. Rio de Janeiro. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/Projeto Fundão, 2010.

OLIVEIRA, Maria Marly de. *Sequência didática interativa no processo de formação de professores*. Petrópolis: Vozes, 2013.

RABUSKE, Márcia Aguiar. *Introdução à teoria dos grafos*. 1 ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992.

SZWARCFITER, Jayme Luiz. *Grafos e algoritmos computacionais*. Rio de Janeiro: Campus, 1984.